6. Prijenosne pojave

6.1. Uvod

Metali su dobri vodiči struje i topline, za razliku od keramika i plastika koji su loši vodiči struje i topline $\Rightarrow$ ukazuje da postoji veza između električne vodljivosti i vođenja topline i da su kod toga bitni slobodni elektroni.

Iz *Opće fizike*:

Električna vodljivost

$$V = R\,I \qquad R = \rho\,\frac{d}{S}$$

Električno polje $F = \dfrac{V}{d}$

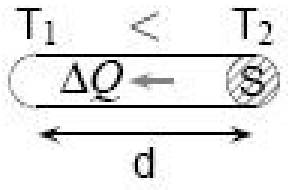
Gustoća struje $j = \dfrac{I}{S}$

$$\Rightarrow \quad j = \frac{1}{\rho} F \equiv \sigma F$$

Ohmov zakon

otpornost (ρ) provodnost (σ)

Toplinska vodljivost : Gustoća toplinske struje j_q je toplinska energija koja u jedinici vremena prođe kroz površinu *S* okomitu na smjer struje.



$$\frac{1}{S}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\kappa\frac{\Delta T}{d}$$

odnosno $j_q = -\kappa\nabla T$

$\kappa \rightarrow$ toplinska provodnost

Negativan predznak znači da toplinska struje teče od toplijeg kraja vodiča prema hladnijemu.

Drude pokazuje 1900.g. (Drudeov model) $\sigma = \dfrac{ZN\,e^2\tau}{m}$

Z je broj elektrona po atomu; *N* koncentracija atoma,

τ srednje vrijeme između dva sudara (relaksacijsko vrijeme), *e* elektronski naboj, *m* masa elektrona

1853.g. Wiedemann i Franz zaključuju da je u metalima električna vodljivost proporcionalna s toplinskom vodljivošću ($\kappa \sim \sigma$). Lorenz 1881.g. otkriva

$$L = \frac{\kappa}{\sigma T} = \text{konst.} = c\left(\frac{k_B}{e}\right)^2$$

Wiedemann-Franzov zakon

gdje je prema Drudeovoj teoriji $c \approx 3$ (L=Lorenzov broj)

1905.g. Lorenz primjenjuje Boltzmanov matematički formalizam

1928.g. Sommerfeld primjenjuje Fermi-Diracovu statistiku

1928.g. Bloch izračunava toplinsku i električnu vodljivost uzimajući u obzir međudjelovanje elektrona i fonona

6.2. Električna i toplinska vodljivost

Električna vodljivost

U odsutnosti vanjskog polja, prema Drudeu svi elektroni se gibaju istim iznosom brzine nasumično u svim smjerovima:

$$\sum_i \vec{v}_i \equiv 0.$$

Stavimo vodič u električno polje ***F***

$$\sum_i \vec{v}_i \not\equiv 0.$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{F}$$

integriranjem od t_1 do t_2 dobivamo

$$\boldsymbol{v}(t_2) - \boldsymbol{v}(t_1)\ (=\boldsymbol{u}) = -\frac{e\vec{F}}{m}(t_2 - t_1) = -\frac{e\vec{F}}{m}\Delta t$$

Ukupna brzina elektrona jednaka je zbroju brzine kojom se elektron giba izvan vanjskog polja i dodatka proizvedenog poljem ***u*** koja je sada usmjerena i zove se brzina zanošenja ili driftna brzina(’’drift velocity’’)

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$

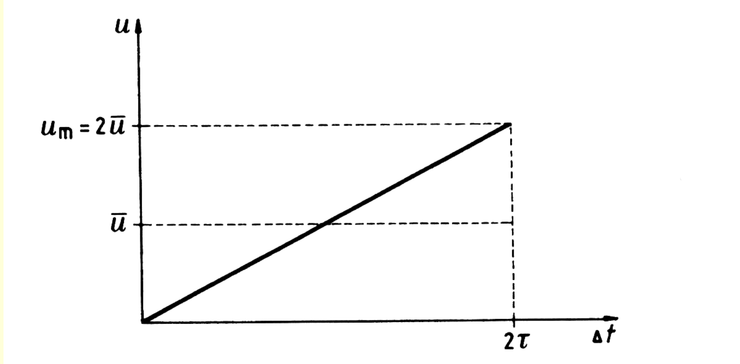
Kad ne bi bilo prepreka gibanju elektrona, elektroni bi se sve više i više ubrzavali: Međutim elektroni se sudaraju s ‘’preprekama’’ i ubrzavaju se samo između dva uzastopna sudara za što je potrebno neko srednje vrijeme 2τ (τ zovemo vrijeme relaksacije).

U vremenskom intervalu 0 do 2τ brzina zanošenja će porasti od

0 do $u_m = -\frac{e\vec{F}}{m} 2\tau$ Vremenski prosjek je onda $\vec{\bar{u}} = -\frac{e\vec{F}}{m}\tau$

Da bismo dobili veličinu neovisnu o polju definiramo pokretnost/mobilnost $\mu = \frac{|\bar{u}|}{F}$

Što nam uvrštavajući $\vec{\bar{u}}$ daje $\mu = \frac{e\tau}{m}$



. Brzina zanošenja elektrona u električnom polju kao funkcija vremena

Uzmimo sada cilindar/žicu presjeka S i duljine $d = \vec{\bar{u}}\,\tau$ kroz koju prolazi struja jakosti I

$$j = \frac{I}{S} = \frac{Q}{\tau S} = -\frac{eZn}{\tau S}\frac{d}{d} = -\frac{eZn}{V}\frac{d}{\tau} = -eZN\bar{u}$$

Možemo pisati i vektorski $\vec{j} = -eZN\vec{\bar{u}}$

Uvrstimo izraz za pokretnost $j = -eZN\left(-\frac{eF\tau}{m}\right)$

Dobivamo $j = \frac{e^2 ZN\tau}{m}F$ i uspoređivanjem s $j=\sigma F$

imamo izraz za električnu provodnost $\sigma = \frac{e^2 ZN\tau}{m}$

izraz kojeg je dobio Drude 1900.g.

Pomoću pokretnosti $\mu = \frac{e\tau}{m}$ izraz za vodljivost glasi $\sigma = ZNe\mu$

Provodnost proporcionalna je s pokretnošću.

Prema klasičnoj teoriji $\Rightarrow$ $\dfrac{m\overline{v^2}}{2} = k_B T$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{k_B T}{m}} \approx 10^5$ m/s,

A prema Fermi-Diracovoj raspodjeli (Sommerfeldov model)

$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}\, v_F \approx 10^6$ m/s, ako iz $\sigma = \dfrac{e^2 ZN\tau}{m}$

Izračunamo relaksacijsko vrijeme za tipičnu provodnost i elektronsku gustoću ($ZN = 5 \cdot 10^{28}$ m^{-3} ; $\sigma = 10^7\ \Omega^{-1}$m^{-1}) ; $\tau \approx 10^{-14}$ s

Dobivamo srednji slobodni put $\Lambda = 2\ \tau\ v \approx 10^{-14}$ s$\cdot 10^6$ ms$^{-1} \approx 10^{-8}$ m

Za $\approx$ stotinjak puta veći od među-ionskog razmaka u metalima ($\approx 10^{-10}$ m)

što nije moguće objasniti pomoću klasične fizike (Λ bi trebao biti reda veličine razmaka iona). Kvantna fizika : prepreke nisu ioni već nepravilnosti kristalne rešetke

Ovisnost otpornosti o temperaturi prema Drudeovom modelu:

uvrstimo τ iz relacije $\Lambda = 2\,\tau\, v$ u $\sigma = \dfrac{e^2 ZN\tau}{m}$ $\Rightarrow$ pomoću

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

$$\sigma = \frac{ZN\, e^2\, \Lambda}{2m\sqrt{\overline{v^2}}} \sim \sqrt{\frac{m}{k_B T}} \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$$

Odnosno $\rho \sim \sqrt{T}$

Međutim eksperimenti pokazuju $\sigma \sim 1/T$ za niske odnosno $\rho \sim T$ za visoke temperature

Znači Drudeov model ne objašnjava temperaturnu ovisnost električnog otpora metala

Joulov zakon

Prilikom sudara (raspršenja na defektima) elektroni gube energiju koju su dobili za iznos usmjerene brzine od 0 do u_m

$$u_m = -\frac{e\vec{F}}{m} \; 2\tau \;\Rightarrow \qquad \Delta E_i = \frac{m}{2}\left[(\vec{v}_i + \vec{u}_m)^2 - \vec{v}_i^2\right],$$

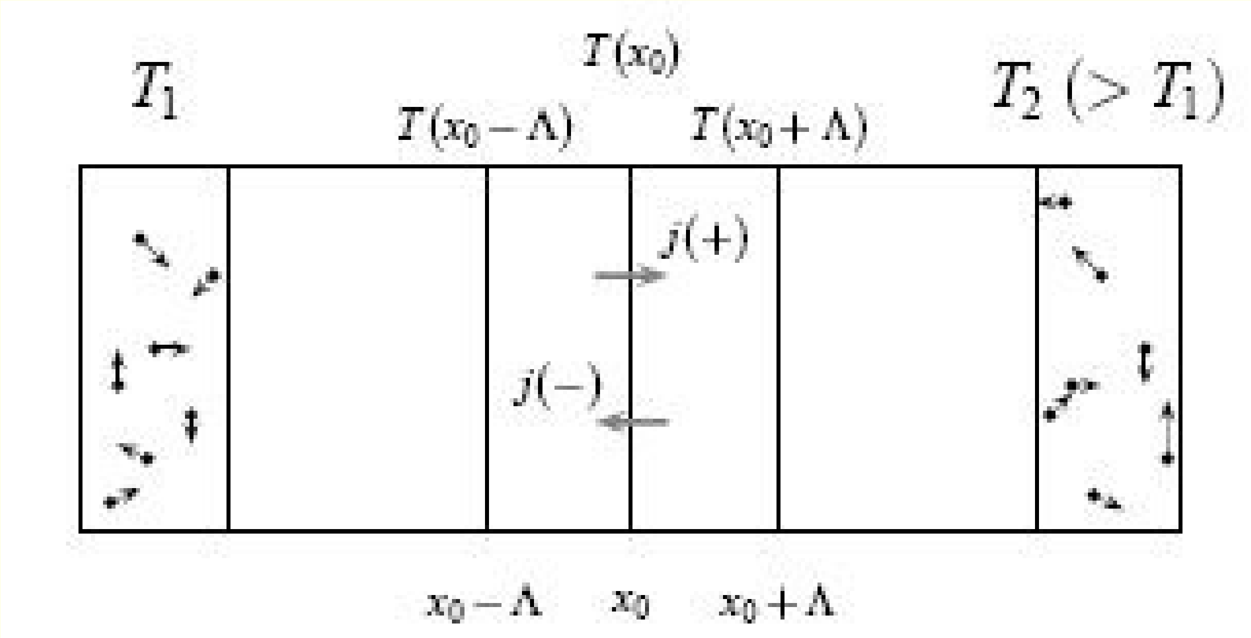
U jednoj sekundi elektron se sudari $1/2\tau$ puta, te je izmjena energije iu jediničnom vremenu i jediničnom volumenu određena izrazom

$$W = \sum_{i=1}^{ZN} \frac{1}{2\tau} \Delta E_i = \sum_{i=1}^{ZN} \left(-e\,\vec{v}_i \cdot \vec{F} + \frac{\tau\, e^2\, F^2}{m}\right) = \frac{ZN\, e^2\, \tau\, F^2}{m} = \vec{j} \cdot \vec{F}$$

jer je $\sum_i \vec{v}_i = 0$.

A to je poznati Jouleov zakon

Toplinska vodljivost



Čestice (elektroni) prelaze iz hladnijeg dijela u topliji i na taj način umanjuju prosječnu kinetičku energiju toplijem dijelu uzorka (i obrnuto).

Gustoća toplinske struje j_Q je toplinska energija koja u jedinici vremena prođe kroz površinu *S* okomitu na smjer struje. U vrijeme $t = \Lambda / v$ svi elektroni koji se gibaju u smjeru x, a nalaze se unutra kvadra $x_0 - \Lambda$, proći će kroz površinu *S* na mjestu x_0. Od svih elektrona 1/3 se giba u smjeru $\pm x$, odnosno 1/6 u smjeru + odnosno - . Ako svaki elektron ima energiju $E(x_0 - \Lambda)$, odnosno $E(x_0 + \Lambda)$, a njih ima ZN onda svi elektroni u smjeru (+) iz hladnijeg dijela u topliji prenose energiju

0

$E_x(+) = ZN\, S\, \Lambda\, E(x_0 - \Lambda)/6$ Gustoća termičke struje po definiciji jednaka je energiji po jedinici površine i vremenu, uz $\Lambda = v\, t$ imamo za toplinsku struju iz hladnijeg dijela u topliji i obrnuto

$$j(+) = \frac{ZN}{6}\, v\, E(x_0 - \Lambda)$$

$$j(-) = \frac{ZN}{6}\, v\, E(x_0 + \Lambda)$$

Ukupna gustoća toplinske struje jednaka je razlici ''toplije'' i ''hladnije'' struje; pretpostavljamo da se energija na udaljenosti Λ malo mijenja $\Rightarrow$ možemo primijeniti formulu

$$E(x_o \pm \Lambda) = E(x_o) \pm \Lambda\, \delta E/\delta x$$

$$j = j(+) - j(-) = -\frac{ZN}{6}\, v\, 2\Lambda\, \frac{\partial E}{\partial x}$$

odnosno $j_Q = -\dfrac{ZN}{3}\, v\, \Lambda\, \dfrac{\partial E}{\partial T}\, \dfrac{\partial T}{\partial x}$

Kako je $U=ZN\,E$, a po definiciji je $C_V=\delta U/\delta T \Rightarrow C_V=ZN\,\delta E/\delta T$

dobivamo $$j = -\frac{\Lambda\, v\, C_V}{3}\frac{\partial T}{\partial x}$$

imali smo $j_q = -\kappa\nabla T$,

toplinska provodnost je

$$\kappa = \frac{\Lambda\, v\, C_V}{3}$$

Λ = srednji slobodni put

v = srednja kvadratna brzina

C_V = Toplinski kapacitet

Drudeov klasični rezultat za Wiedemann-Franzov zakon

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\Lambda\, v\, C_V\, 2mv}{3\,ZN\,e^2\,\Lambda} \quad (E = mv^2/2) = \frac{4C_V E}{3ZNe^2}$$

Prema klasičnoj fizici prosječna kinetička energija elektrona jednaka je $E = 3k_B T/2$, odnosno za sve elektrone u metalu $E_{uk} = 3\,ZN\,k_B T/2 \Rightarrow C_V = 3\,ZN\,k_B/2$

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{4C_V E}{3ZNe^2} = 3\left(\frac{k_B}{e}\right)^2 T \qquad L = \frac{\kappa}{\sigma T} = 3\left(\frac{k_B}{e}\right)^2$$

slijedi $L\left(\frac{e}{k_B}\right)^2 = 3$

Da je to ispunjeno za sve metale i nema ovisnosti o temperaturi pokazuju i eksperimentalne vrijednosti umnoška $\left(\frac{e}{k_B}\right)^2$ s Lorenzovim brojem L za niz metala

Metal	$\left(\frac{e}{k_B}\right)^2 L$ 0° C	100° C
Ag	3,11	3,18
Al	2,94	2,99
Au	3,16	3,23
Bi	4,45	3,87
Cd	3,25	3,27
Cu	3,00	3,15
Ir	3,34	3,34
Mg	-	3,11

Metal	$\left(\frac{e}{k_B}\right)^2 L$ 0° C	100° C
Mo	3,51	3,75
Pb	3,32	3,45
Pd	3,11	3,18
Pt	3,39	3,49
Rh	3,45	3,41
Sn	3,39	3,34
W	4,04	4,30
Zn	3,11	3,15

Sommerfeld je primjenom Fermi-Diracove raspodjele dobio

$$L = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k_B}{e}\right)^2$$

što je praktički isto kao gore ($\frac{\pi^2}{3} \approx 3$)

Kako objasniti da Drudeov i Sommerfeldov model daju isti rezultat. U Drudeovom modelu napravljene su dvije greške (rezultat za energiju elektronskog plina i toplinskog kapaciteta elektrona) koje se međutim međusobno poništavaju.

Radi se u umnošku $$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{..C_V E}{......}$$

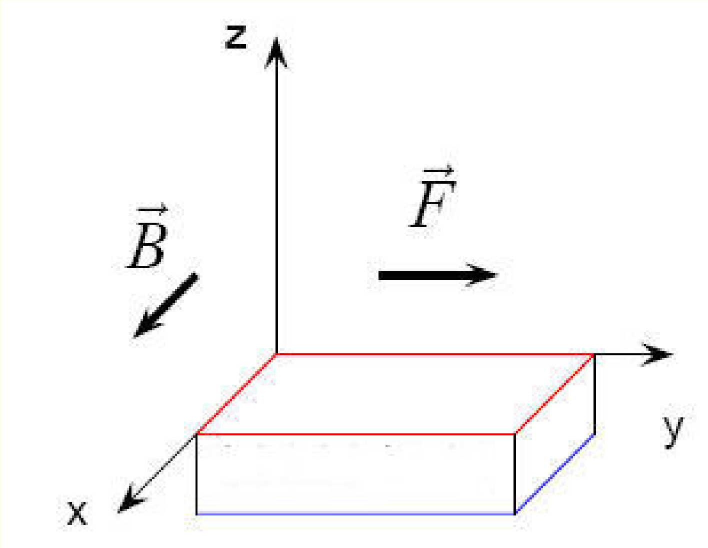
Klasična: $EC_V = \dfrac{3k_BT}{2} \bullet \dfrac{3ZNk_B}{2} = \dfrac{9}{4} ZNk_B^2 T$

Kvantna: $EC_V = \dfrac{3E_F}{5} \bullet \dfrac{\pi^2 k_B^2 ZNT}{2E_F} = \dfrac{3\pi^2 ZNk_B^2 T}{10}$

Što je praktički jednako jer je $\dfrac{9}{4} \approx \dfrac{3\pi^2}{10}$

6.3. Hallov effekt

Mjerenjem provodnosti $\sigma = \frac{e^2 ZN\tau}{m}$ ne možemo ustanoviti da li struju vode pozitivno ili negativno nabijene čestice. To se može pomoću Hallovog efekta (1879.g.)



Struja u y-smjeru:

$$j_y = ZNqu_y \qquad u_y = \frac{j_y}{ZNq}$$

Lorentzova sila

$$\overrightarrow{f_L} = q\vec{u} \times \vec{B} = -\overrightarrow{z_o} q u_y B_x$$

\+ + + + + + + +

Na donjoj plohi se nakuplja + naboj, uslijed čega se javlja dodatno električno polje F_z u z-smjeru, odnosno sila $f_z = F_z q$ koja djeluje u suprotnom smjeru od Lorenzove sile.

Nakupljanje stane kad se izjednače Lorentzova i električna sila

$$\overrightarrow{f_L} + \overrightarrow{f_E} = 0 \quad \Rightarrow \quad -qu_y B_x + F_z q = 0$$

$$-qu_y B_x + F_z q = 0 \quad \Rightarrow \quad F_z = u_y B_x$$ uvrstimo $$u_y = \frac{j_y}{ZNq}$$

(ne zaboravimo da je F_z inducirano polje) slijedi:

$$F_z = \frac{1}{ZNq} j_y B_x = R_H j_y B_x$$

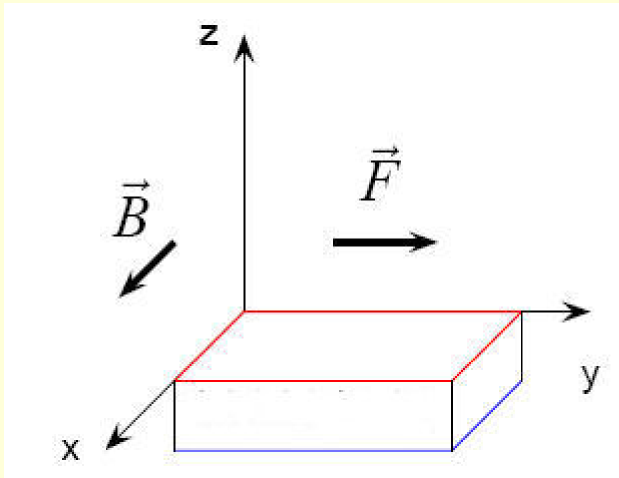
i konstanta proporcionalnosti R_H zove se Hallova konstanta (u ovom slučaju Hallova konstanta je pozitivna!!!).

Ovisi o vrsti naboja i njihovoj koncentraciji!!

Ako pri istoj orijentaciji struje i magnetskog polja zamijenimo naboje $q \rightarrow -q$ *(e)* i smjer gibanja naboja, smjer magnetske sile ostat će ista

$$\vec{f}_L = -\vec{z_o} q u_y B_x$$

i na donjoj plohi će se nakupljati elektroni, te se mijenja smjer induciranog polja



\- - - - - - - -

$$R_H = -\frac{1}{ZNq}$$

Hallova konstanta je negativna

Mjerenjem Hallove konstante jednostavno se izračuna koncentracija nosilaca naboja i njihov predznak.

Vrijednosti za neke metale:

Metal	N ($10^{28} m^{-3}$)	$-\frac{1}{eR_H}$
Li	4,8	3,6
Na	2,6	3,0
K	1,4	1,5
Rb	1,2	1,1

Metal	N ($10^{28} m^{-3}$)	$-\frac{1}{eR_H}$
Cs	0,93	0,80
Cu	8,5	10,2
Ag	5,8	6,9
Au	5,9	8,5

Bi ima najveću vrijednost H konstante$\Rightarrow$mala koncent. elek.

Cd, Be, Zn, V, W,... imaju negativnu H. konstantu, znači ponašaju se kao struju vode pozitivno nabijene čestice (šupljine).

U slučaju da struja nastaje gibanjem i elektrona i šupljina (μ_e i μ_h su pripadne pokretljivosti)

$$R = \frac{N_h \mu_h^2 - N_e \mu_e^2}{e(N_h \mu_h + N_e \mu_e)^2}$$

Za $N_e = N_h = N$ dobivamo

$$R = \frac{\mu_h^2 - \mu_e^2}{eN(\mu_h + \mu_e)^2}$$

Odnosno za $N_h = 0 \Rightarrow \quad R_e = -\frac{1}{eN_e}$

za $N_e = 0 \Rightarrow \quad R_h = \frac{1}{eN_h}$ kao što mora biti

1980.g. je otkriven **kvantni Hallov efekt.**

U dvodimenzijskim uzorcima (tanki filmovi)

Hallova provodnost

$$\sigma_H = \frac{j_y}{F_z}$$

je kvantizirana; određena je omjerom kvadrata elektronskog naboja i Planckove konstante

$$\sigma_H \sim \frac{e^2}{h}$$

6.4. Metal u oscilirajućem električnom polju

Ako na metal (elektrone) djeluje vremenski promjenljivo polje

$F = F_o e^{-i\omega t}$, na elektrone će osim sile električnog polja $-e F_o e^{-i\omega t}$ djelovati i sila trenja, proporcionalna umnošku mase i brzine $\Rightarrow$

jednadžba gibanja elektrona:

$$m\,\dot{u} = \underbrace{-e\,F_0\,e^{-i\omega t}}_{\text{sila el. polja}} - \underbrace{\gamma\,m\,u}_{\text{trenje}}$$

u je srednja brzina gibanja elektrona

ω je frekvencija titranja elekt. polja

γ je konstanta trenja

elektroni nisu vezani $\Rightarrow$ brzina će im se mijenjati s vremenom kao električno polje. Tražimo rješenje u obliku

$$u(t) = A \cdot e^{-i\omega t}$$

uvrštavanjem dobivamo **(Zad. br. NE)**

$$A = -\frac{e\,F_0}{m(\gamma - i\omega)}.$$

uz pretpostavku da se svi elektroni gibaju istom usmjerenom brzinom u gustoća struje iznosi

$$j = -e\,ZN\,u = \underbrace{\frac{ZN\,e^2}{m(\gamma - i\omega)}}_{\sigma(\omega)} \underbrace{F_0\,e^{-i\omega t}}_{\text{el. polje}}$$

Prema Ohmovu zakonu $j = \sigma(\omega) F$ provodnost iznosi

$$\sigma(\omega) = \frac{ZN\,e^2}{m(\gamma - i\omega)} \qquad (*)$$

za statičko polje $\omega = 0$, odnosno uspoređujući sa izrazom za statičku električnu provodnost

$$\sigma(0) = \frac{ZN\,e^2\tau}{m}$$

$$\sigma(\omega = 0) = \frac{ZN\,e^2}{m\gamma} \equiv \frac{ZN\,e^2\tau}{m}$$

konstanta trenja γ jednaka je inverznom relaksacijskom vremenu

$$\gamma = \frac{1}{\tau}$$

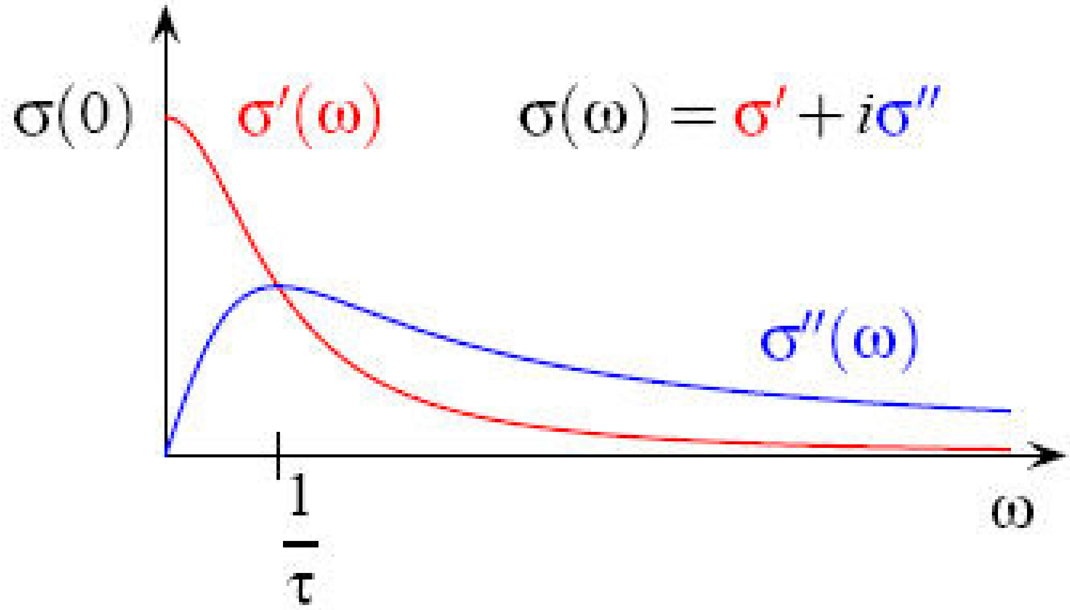
uvrstimo u relaciju (*) (Zadatak NE!!!)

dobivamo za provodnost u ovisnosti o frekvenciji. Provodnost ima realni i imaginarni dio:

niske frekvencije

$$\sigma(\omega) = \sigma(0)\,\frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \begin{cases} \xrightarrow{\omega\tau \ll 1} \sigma(0)\,(1 + i\omega\tau) \\ \xrightarrow{\omega\tau \gg 1} \sigma(0)\left[\frac{1}{(\omega\tau)^2} + \frac{i}{\omega\tau}\right] \end{cases}$$

visoke frekvencije



za $\omega\tau$ >> 1, sa povećanjem frekvencije vodljivost pada odnosno raste otpornost.

6.5. Matthiessenovo pravilo

U idealnom vodiču, prema Blochovom teoremu, elektronski valovi nesmetano se šire u idealnoj periodičnoj kristalnoj strukturi. Elektroni bi se trebali gibali bez raspršenje, $\tau \to \infty, \sigma \to \infty \Rightarrow$ idealni vodič.

U realnom vodiču dolazi do raspršenja elektrona na neperiodičnom potencijalu uslijed određene koncentracije defekata kristalne rešetke (dinamički defekti-primarno termička pobuđenja kristalne rešetke ili fononi; stacionarni defekti- primjese, praznine, dislokacije, granice zrna,..). Što su raspršenja učestalija, kraći je srednji slobodni put elektrona i vrijeme relaksacije krače.

Prema kvantnoj mehanici vjerojatnost sudara s nepravilnostima rešetke obrnuto je proporcionalna relaksacijskom vremenu:

$$w = \frac{1}{\tau}$$

Ako postoji više mogućih načina sudara elektrona, tada se vjerojatnosti međusobno zbrajaju $w = w_r + w_f$

gdje je w_r vjerojatnost sudara na stacionarnim defektima, a w_f na fononima, dakle

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau_f}$$

odnosno radi $\sigma = \dfrac{ZN e^2 \tau}{m}$

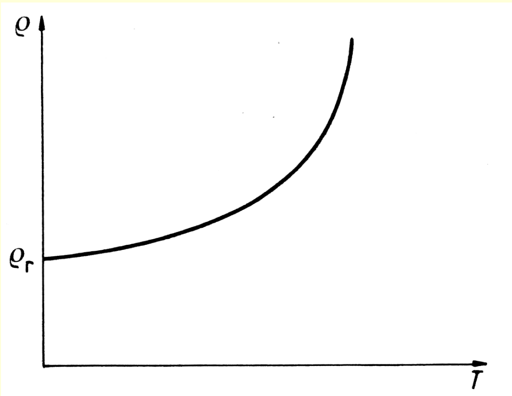
$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_r} + \frac{1}{\sigma_f} \qquad \text{odnosno} \qquad \rho = \underbrace{\rho_r}_{\text{primjese}} + \underbrace{\rho_f}_{\text{fononi}}$$

Također, ako postoji više različitih doprinosa stacionarnih defekata

$$\rho_r = \rho_{r1} + \rho_{r2} + \rho_{r3} + \ldots\ldots$$

Ovo pravilo je na temelju opažanja postavio Matthiessen 1862.g.

Na niskim temperaturama je očito fononski doprinos otpornosti zanemariv i $\rho \approx \rho_r$, dok na visokim temperaturama prevladava doprinos fononskog raspršenja te je $\rho_f >> \rho_r$, odnosno $\rho \approx \rho_f$



6.6. Nordheimovo pravilo

Slitine (legure) su smjese više metala. Jednostavan slučaj su binarne slitine Ag-Cu, Ag-Au, Mg-Cd,…. Svaki atom jednog elementa se ponaša kao nečistoća za drugi element, te bi stoga otpornost slitina morala biti veća nego otpornost čistih metala.

Za dovoljno niske temperature možemo zanemariti fononski doprinos.

Koncentracija drugog elementa n_2 u prvom može se smatrati kao koncentracija defekata n_2 te je otpor proporcionalan $\rho \sim n_2$, odnosno za koncentraciju prvog elementa n_1 u drugom $\rho \sim n_1$.

Oba izraza se mogu objediniti $\rho \sim n_1 \bullet n_2$ (Nordheim 1931. g.)

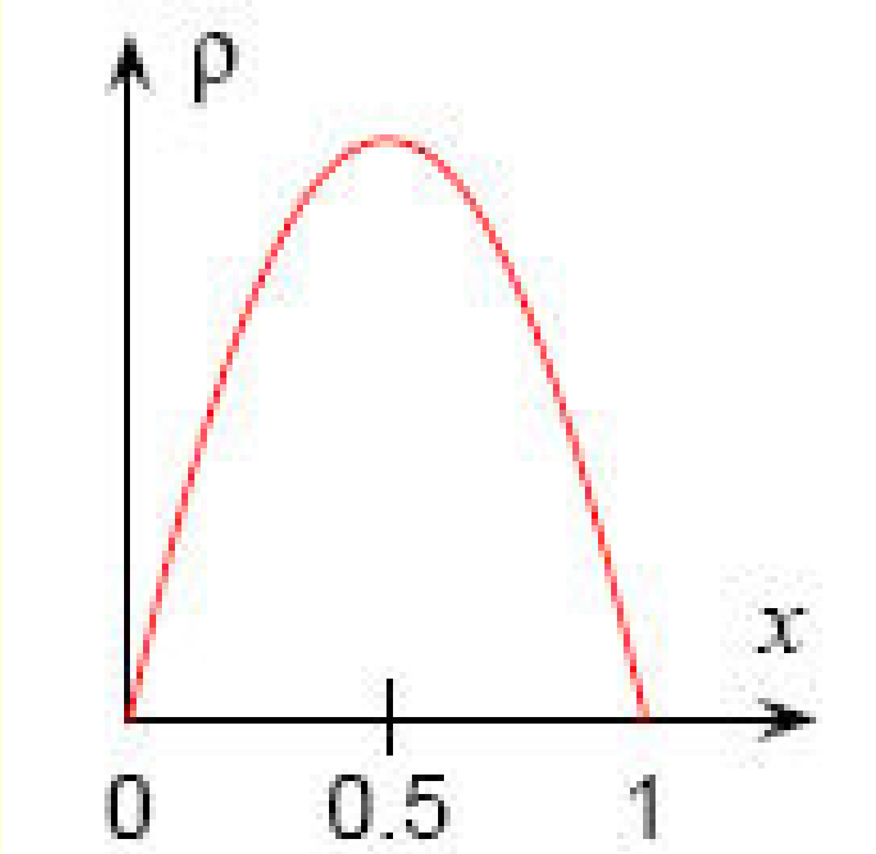
Općenito vrijedi $n = n_1 + n_2$

Ako je relativna koncentracija prve komponente $x = n_1/n$

onda je druge komponente $n_2 = n - n_1$; podijelimo izraz s n

$\Rightarrow n_2/n = 1-x \;\Rightarrow \rho \sim (n\, x) \bullet n\,(1-x) \;\Rightarrow\; \rho \sim x \bullet (1-x)$, izraz ima maksimum za x = ½

Za $x<<1 \Rightarrow \rho \sim x$ (linearna ovisnost za male koncentracije)



ρ
x
0
0.5
1

6.7. Otpor idealnog metala

Metal; jedan ion; akustičko titranje; gubitak savršene periodičnosti; elektronski valovi se raspršuju na fononima;

viša temperatura $\Rightarrow$ veća koncentracija fonona $\Rightarrow$ veća vjerojatnost elektronskog raspršenja $\Rightarrow$ veći elek. otpor$\rightarrow$

otpor idealnog metala (zanemarujemo statičke defekte)

Debyev model $\rightarrow$ fononska frekvencija $\omega = v_o |\boldsymbol{k}|$

v_o-brzina širenja zvuka u kristalu; $|\boldsymbol{k}|$ -valni vektor $2\pi/\lambda$

$0 < k < k_m \Rightarrow \omega_m = v_o k_m$

Početna energija elektrona : $E = p^2/2m$

Konačna energija elektrona: $E' = p'^2/2m$

Razlikuju se za fononsku energiju $E = E' \pm \hbar\omega$

''+'' znači emisiju, a ''–'' apsorpciju fonona

Prosječna elektronska energija je nekoliko eV, a maksimalna fononska

$$\hbar\omega_m = \hbar v_o k_m \approx 5\times 10^{-21} J \approx 0{,}03 eV$$

što je puno manje od elektronske $\Rightarrow$ $E \approx E'$ elast. raspršenje

Mogući procesi:

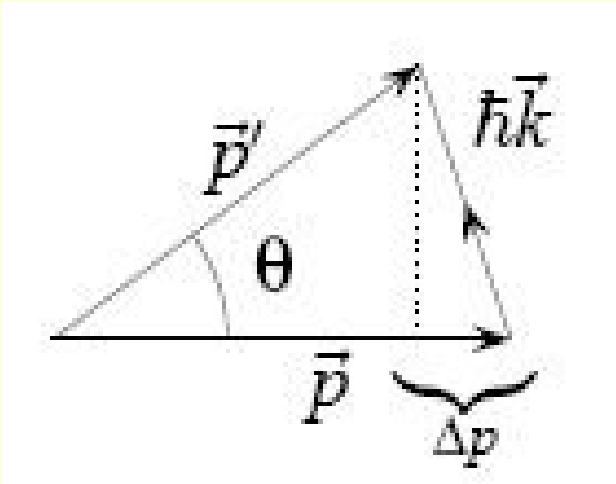
elektron se sudara s ionom te ga pobuđuje na titranje (emisija fonona)

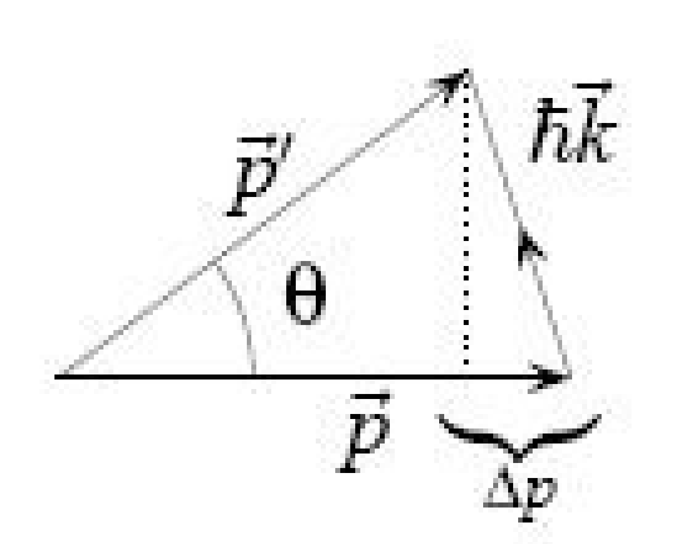
elektron sudarom poništava titranje iona (apsorpcija fonona)

Uslijed $E \approx E' \Rightarrow p' \approx p$ znači iznos elektronskog impulsa ostaje sačuvan, ali može doći do **promjene smjera**

$$\vec{p}\,' = \vec{p} \pm \hbar\vec{k}$$

$$\pm\hbar\vec{k} = \vec{p} - \vec{p}\,' \quad \Rightarrow$$





Δp je promjena impulsa u početnom smjeru gibanja elektrona zbog raspršenja na fononu

$\Delta p = p - p\cos\theta = p(1 - \cos\theta)$

$$\pm\hbar\vec{k} \;=\; \vec{p} - \vec{p}' \qquad \Rightarrow$$

$$\hbar^2 k^2 \;=\; p^2 + p'^2 - 2\,\vec{p}\cdot\vec{p}' \;=\; 2p^2(1-\cos\theta) = 2p\cdot\Delta p$$

odnosno:

$$\Delta p = \frac{(\hbar k)^2}{2p} \sim k^2$$

fononi velikog valnog broja jako utiču na gibanje elektrona

Ako je ρ_k parcijalni otpor koji nastaje raspršenjem elektrona na fononu valnog vektora ***k***, on će ovisiti o geometriji raspršenja Δp i o broju fonona u stanju s valnim vektorom **k**

Planckova funkcija raspodjele

$$\rho_k \propto \overline{N_k}\Delta p \qquad \overline{N_k} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$

Ukupan otpor bit će jednak zbroju parcijalnih otpora

$$\rho_f = \sum_{\vec{k}\sigma} \rho_k \propto 3\sum_k \overline{N_k} k^2 \propto \sum_k \frac{k^2}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$

Od sume pređemo na integral

$$\sum_k \to \int d^3k \to \int 4\pi^2 k^2 dk$$

Izračunati (**zadatak br. 11**)

Debyev model : $\omega = v_o|\mathbf{k}|$

$$\rho_f \propto \int_0^{k_m} \frac{k^2 4\pi k^2 dk}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$

$$\rho_f \propto \int_0^{\omega_m} \frac{\omega^4 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$

Debyeva temperatura θ

$$k_B\theta = \hbar\omega_{maks}$$

Nova varijabla

$$x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$$

$$\rho_f \propto T^5 \int_0^{\theta/T} \frac{x^4 dx}{e^x - 1}$$

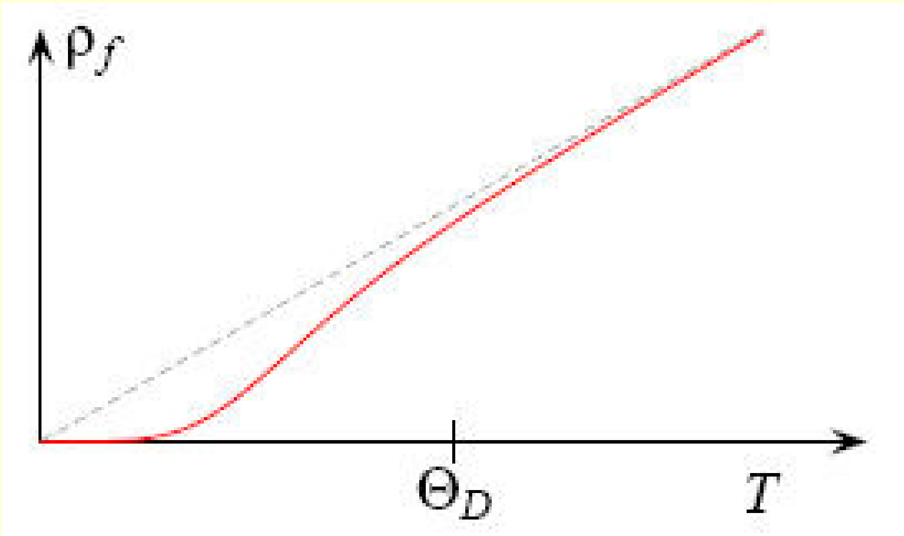
$$\rho_f \propto T^5 \int_0^{\theta/T} \frac{x^4 dx}{e^x - 1} \quad \#$$

Visoke temperature ($x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$) $x \ll 1 \Rightarrow e^x = 1 + x$

$$\int_0^{\theta/T} \frac{x^4 dx}{e^x - 1} = \int_o^{\theta/T} x^3 dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\theta}{T}\right)^4$$ što uvršteno u # daje $\rho_f \propto T$

Niske temperature: θ/T → ∞ , integral postaje neovisan o temperaturi $\int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{e^x - 1} = konst.$

$$\rho_f \propto T^5$$



Bloch 1928.g.

6.8. Toplinska vodljivost metala

Našli smo u 6.2. za toplinsku provodnost.

$$\kappa = \frac{\Lambda v C_V}{3}$$

Λ = srednji slobodni put
v = srednja kvadratna brzina
C_V = Toplinski kapacitet

U 4.3.kod Somm. modela $\Rightarrow$ brzine elektrona praktički ne ovise o temperaturi *(v*=konst.), a u 4.4 da je C_V elektronskog plina $\sim T$

$$\Rightarrow \kappa \sim \Lambda\, T$$

a) Vrlo niske temperature: Λ = konst. $\Rightarrow \kappa \sim T$

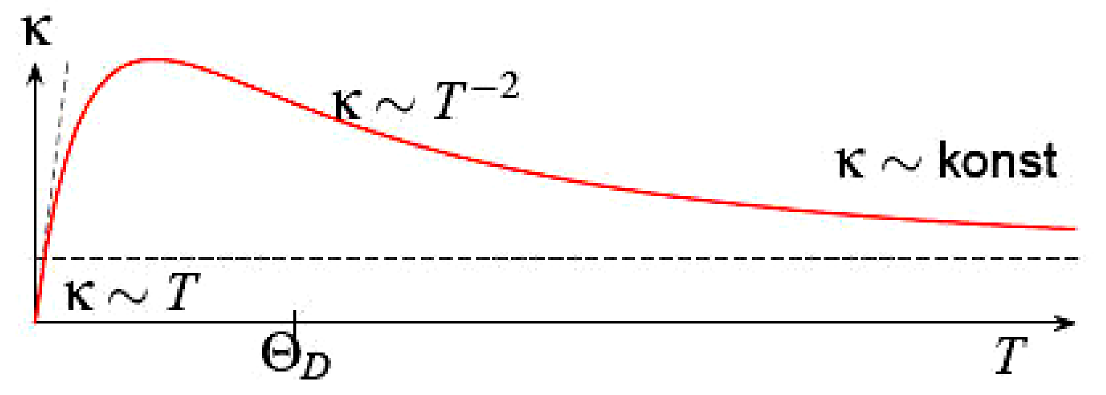
b) Više temperature: $\Lambda \sim 1/N_f$

1) $T \ll \theta$ $\quad N_f \sim T^3$

$\kappa \sim 1/T^2$

2) $T \gg \theta$ $\quad N_f \sim T$

κ = konst



6.9. Ponovo o Wiedemann-Franzovu zakonu

Izveli smo W-F zakon

$$L = \frac{\kappa}{\sigma T} = \text{konst.} = c\left(\frac{k_B}{e}\right)^2$$

uslijed $\sigma=1/\rho$ W-F zakon možemo pisati $\kappa\rho \sim T$

za $T \gg \theta$ κ = konst $\rho \sim T$ $\kappa\rho \sim T$ W-F zakon vrijedi

za $T \ll \theta$ $\kappa \sim 1/T^2$ $\rho \sim T^5$ $\kappa\rho \sim T^3$ W-F zakon NE vrijedi

za ekstremno niske temperature, otpornost dolazi samo od raspršenja na defektima

ρ = konst. $\kappa \sim T$ $\kappa\rho \sim T$ W-F zakon vrijedi