

- Radit ćemo po knjizi M.E. Peskina i D.V. Schroedera:
M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison Wesley, 1995.
- Uz tu knjigu ću ponekad rabiti knjigu S. Weinberga,
S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, 1995.

Te dvije knjige imaju dva potpuno različita pristupa. Weinbergov pristup je više deduktivan. On prvo razvija pojmove a tek ih onda rabi. Peskin i Schroeder pristupaju više induktivno. Djelomice razvijaju teoriju, upotrijebe je, a onda tu teoriju poslije detaljnije objasne. U tom smislu je Weinbergova knjiga potpunija. Međutim Peskin-Schroederova knjiga puno brže priprema formalizam koji je potreban za račune.

Notacija i konvencije

Jedinice

Rabi se prirodan sustav jedinica i kojem je

$$\hbar = c = 1. \quad (1)$$

$$\Rightarrow [\text{duljina}] = [\text{vrijeme}] = [(\text{energija})^{-1}] = [(\text{masa})^{-1}]. \quad (2)$$

Primjer:

$$m_{\text{electron}} = 9.109 \times 10^{-28} \text{g} = 0.511 \text{MeV} = (3.862 \times 10^{-11} \text{cm})^{-1}. \quad (3)$$

Što se tiče jedinica iz elektrodinamike rabe se Heaviside-Lorentzove jedinice u kojima su Coulombov potencijal i konstanta fine strukture dani sa ($e = -|e|$ je naboj elektrona)

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi r}, \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \quad (5)$$

Relativnost i tenzori

Lorenzovi indeksi označeni su grčkim slovima: $\mu = 0, 1, 2, 3$ odnosno t, x, y, z . Prostorni indeksi označeni su rimskim indeksima: i, j, k . Kada se indeksi ponavljaju, to znači da se po njima sumira (tzv. Einsteinova konvencija).

Metrički tenzor, 4-koordinata, primjeri skalarnog umnoška, p^2 za masivnu česticu, 4-derivacija, potpuno antisimetrični tenzor $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (6)$$

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}), \quad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\vec{x}), \quad (7)$$

$$p \cdot x = g_{\mu\nu}p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}, \quad (8)$$

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2, \quad (9)$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right) \quad (10)$$

$$\epsilon^{0123} = +1 \quad (\Rightarrow \epsilon_{0123} = -1). \quad (11)$$

Pojmovi iz QM

Minimalna supstitucija, Paulijeve matrice (spin):

$$p^\mu = (E, \vec{p}) = i\partial^\mu \quad (12)$$

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k, \quad (13)$$

$$\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2), \quad (14)$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Distribucije

Heaviside-ova step-funkcija, Diracova delta funkcija, delta funkcija u n dimenzija

$$\theta(x) \equiv \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} = \frac{-1}{(2\pi i)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-isx}}{s + i\epsilon} ds, \quad (16)$$

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} \theta(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}, \quad \int_a^b dx \delta(x) = 1, \quad 0 \in (a, b), \quad (17)$$

$$\delta^{(n)}(x) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{ikx}, \quad \int_I d^n x \delta(x) = 1, \quad \underbrace{(0, \dots, 0)}_n \in I. \quad (18)$$

Gama matrice i Diracovi spinori

Gama matrice: Cliffordova algebra; reprezentacija Lorentzove algebre; **4D:** kiralna (Weylova) reprezentacija gama matrica – generatori boostova i rotacija; Diracova algebra; γ_5 u kiralnoj reprezentaciji, projektori heliciteta $P_{L,R}$, svojstva γ_5 matrice;

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \times \mathbf{1}_n; \quad (19)$$

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]; \quad (20)$$

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}) \\ \bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma}) \end{matrix}; \quad (21)$$

$$\text{D. alg.} : 1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu} = i\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha \gamma^5 &= \frac{i}{6} \epsilon_{\alpha\mu\nu\rho} \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]}, \\ \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]} &= -i\epsilon^{\mu\nu\sigma\alpha} \gamma_\alpha \gamma^5 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^{\sigma]} = -\frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma, \quad (24)$$

$$i\gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^{\sigma]} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^5; \quad (25)$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad , \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \quad , \quad (26)$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad ; \quad (27)$$

Gama matrice i epsilon tenzor u 4-dim prostoru Minkowskog: tragovi γ -matrica, kontrakcije γ -matrica, kontrakcije ϵ -tenzora

$$tr(\mathbf{1}) = 4, \quad (28)$$

$$tr(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0, \quad (29)$$

$$tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \quad (30)$$

$$tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}), \quad (31)$$

$$tr(\gamma^5) = 0, \quad (32)$$

$$tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0, \quad (33)$$

$$tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (34)$$

$$tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \dots) = tr(\dots \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu); \quad (35)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4, \quad (36)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu, \quad (37)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}, \quad (38)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu; \quad (39)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24, \quad (40)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} = -6\delta^\mu_\nu, \quad (41)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho), \quad (42)$$

$$\epsilon^{\alpha\mu_1\mu_2\mu_3} \epsilon_{\alpha\nu_1\nu_2\nu_3} = - \begin{vmatrix} \delta^{\mu_1}_{\nu_1} & \delta^{\mu_1}_{\nu_2} & \delta^{\mu_1}_{\nu_3} \\ \delta^{\mu_2}_{\nu_1} & \delta^{\mu_2}_{\nu_2} & \delta^{\mu_2}_{\nu_3} \\ \delta^{\mu_3}_{\nu_1} & \delta^{\mu_3}_{\nu_2} & \delta^{\mu_3}_{\nu_3} \end{vmatrix}, \quad (43)$$

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \epsilon_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = - \begin{vmatrix} \delta^{\mu_1}_{\nu_1} & \delta^{\mu_1}_{\nu_2} & \delta^{\mu_1}_{\nu_3} & \delta^{\mu_1}_{\nu_4} \\ \delta^{\mu_2}_{\nu_1} & \delta^{\mu_2}_{\nu_2} & \delta^{\mu_2}_{\nu_3} & \delta^{\mu_2}_{\nu_4} \\ \delta^{\mu_3}_{\nu_1} & \delta^{\mu_3}_{\nu_2} & \delta^{\mu_3}_{\nu_3} & \delta^{\mu_3}_{\nu_4} \\ \delta^{\mu_4}_{\nu_1} & \delta^{\mu_4}_{\nu_2} & \delta^{\mu_4}_{\nu_3} & \delta^{\mu_4}_{\nu_4} \end{vmatrix}, \quad (44)$$

Diracovi spinori:

Diracove jednadžbe u p -prostoru; normalizirani Diracovi spinori (ξ i η su 2-komp. spinori normalizirani na jedinicu);

$$0 = (\not{p} - m)u^s(p) = \bar{u}^s(p)(\not{p} - m) \quad (45)$$

$$= (\not{p} + m)v^s(p) = \bar{v}^s(p)(\not{p} + m); \quad (46)$$

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix}, \quad v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix}. \quad (47)$$

1 Klein-Gordonovo polje

1.1 "Nužnost" teorije polja

- **Kvantna teorija polja** (QFT) je primjena QM na dinamičke sisteme polja, dok se kvantna mehanika (QM) bavi kvantizacijom dinamičkih sistema čestica. QFT je nužna za razumjevanje fizike elementarnih čestica

- **Razlozi zašto moramo studirati/znati kvantizaciju polja:**

1. Problemi sa 1-čestičnim relativističkim jednadžbama: nekonzistentnosti: negativno-energetska stanja, problem sa Bornovom interpretacijom gustoće vjerojatnosti, (vježbe),
2. Tvorba čestica (dozvoljena sa $E = mc^2$) – čak i ispod energije na kojoj mogu nastati čestice javljaju se kratkotrajna virtualna stanja $\Delta E \Delta t \geq \hbar$
3. Problem kauzalnosti – njega ćemo razmotriti detaljnije

- **Problem kauzalnosti**

1. Amplituda za propagaciju čestice iz točke \vec{x}_0 u točku \vec{x} glasi

$$U(t) = \langle \vec{x} | e^{-iHt} | \vec{x}_0 \rangle . \quad (48)$$

2. U nerelativističkoj (NR) QM je $E = \vec{p}^2/2m$. Stoga ($\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$)

$$\begin{aligned} U(t) &= \langle \vec{x} | e^{-i(\vec{p}^2/2m)t} | \vec{x}_0 \rangle \\ &= \int d^3p \langle \vec{x} | e^{-i(\vec{p}^2/2m)t} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}_0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{p}^2/2m)t} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)} \\ &= \left(\frac{m}{2\pi i t} \right)^{\frac{3}{2}} e^{im(\vec{x} - \vec{x}_0)^2/2t} . \end{aligned} \quad (49)$$

DZ : Pokažite da vrijedi gornji izraz.

- izraz (49) je različit od nule za svaki x i t – kauzalnost je narušena
- pogledajmo da li ako umjesto NR izraza za energiju stavimo relativistički,

$$E = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad (50)$$

da li to pomaže (uzimamo samo pozitivno energetske rješenje Einsteinove jednadžbe).

3. Izraz za $U(t)$ u rel. QM glasi

$$\begin{aligned} U(t) &= \langle \vec{x} | e^{-it\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} | \vec{x}_0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-it\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}_0|} \int_0^{\infty} dp p^2 \sin(p|\vec{x} - \vec{x}_0|) e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} . \end{aligned} \quad (51)$$

Primjenom metode stacionarne faze (SPM: vidi Dodatak 1) (1444) i (1445) za relativističku masivnu slobodnu česticu nalazimo rješenje za p koji zadovoljava SPM uvjet,

$$\phi = px - t(p^2 + m^2)^{1/2} \approx 0 \quad (52)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial E} \approx \frac{E}{p}x - t \approx 0 \quad (53)$$

$$\Rightarrow p = \frac{ixm}{\sqrt{x^2 - t^2}}, \quad E = \frac{itm}{\sqrt{x^2 - t^2}} \quad (54)$$

$$\Rightarrow i\phi = -m\sqrt{x^2 - t^2}. \quad (55)$$

Uporabom (1451) za amplitudu propagacije iz točke \vec{x} u točku \vec{x}_0 dobija se

$$U(t) \sim e^{-m\sqrt{x-(t-t_0)^2}}, \quad x = |\vec{x} - \vec{x}_0|. \quad (56)$$

Dakle uvođenjem relativističke energije jednočestičnog stanja nije riješen problem kauzalnosti. Ipak, udaljavanjem od svjetlosnog konusa amplituda eksponencijalno trne.

4. U QFT problem kauzalnosti je riješen na sljedeći način. QFT je mnogočestična teorija. Za svaku česticu postoji pripadna antičestica iste mase i suprotnih aditivnih naboja. Širenje čestice se ne može razlikovati od širenja antičestice u upravo suprotnom smjeru u prostoru i vremenu. Za **prostornolike intervale** zbroj $U(t)$ amplituda za česticu i antičesticu se **poništavaju**. To osigurava očuvanje kauzalnosti.

Neki problemi koje rješava QFT:

- može tretirati višečestična stanja,
- može tretirati prijelaze između stanja sa različitim brojem čestica,
- rješava problem kauzalnosti uvođenjem antičestica,
- rješava problem veze spina i statistike,
- daje metodu za računanje udarnih presjeka i poluživota čestica.

1.2 Osnove klasične teorije polja

A. Teorija polja preko Lagrangijana

- Osnovna veličina u klasičnoj mehanici je **akcija** (ili **djelovanje**)

$$S = \int L(t)dt . \quad (57)$$

- U **lokalnoj teoriji polja (TP)** Lagrangijan se može prikazati preko **gustoće Lagrangijana** \mathcal{L} koji je funkcija polja ϕ i prvih derivacija polja $\partial_\mu\phi$ (Od sada nadalje ćemo raditi samo sa gustoćama Lagrangijana – njih ćemo skraćeno zvati Lagrangijanima.),

$$S = \int L(t)dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)d^4x . \quad (58)$$

- **Princip minimalne akcije i jednažbe gibanja**

– Princip minimalne akcije : sistem se razvija/evoluiru duž staze za koju je S ekstremalna:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \right\} . \end{aligned} \quad (59)$$

– Uz restrikciju da $\delta\phi$ **iščezavaju na prostornolikoj granici**, površinski član iščezava. Kako integral mora iščezavati za bilo koji izbor $\delta\phi$, podintegralna funkcija mora biti jednaka nuli, što vodi na **Euler-Lagrangeove jednažbe gibanja**,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 . \quad (60)$$

– Lagrangijanska TP je podesna za relativističku dinamiku jer su i \mathcal{L} i svi izrazi koji se izvode iz njega eksplicitno relativistički invarijantni odnosno relativistički kovarijantni. Poopćenje na sistem sa više polja je očigledno.

B. Teorija polja preko Hamiltonijana

- Hamiltonijanska formulacija TP je pogodna za kvantizaciju

- Hamiltonijanska formulacija za **sistem s jednom česticom** :

– kanonski impuls za koordinatu q je $p = \partial L / \partial \dot{q}$ ($\dot{q} = \partial q / \partial t$) – Hamiltonijan $H = p\dot{q} - L$

- Hamiltonijanska formulacija za **sistem s više čestica** :

– kanonski impuls za svaku koordinatu q_i je $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ ($\dot{q}_i = \partial q_i / \partial t$) – Hamiltonijan $H = \sum p_i \dot{q}_i - L$

- Hamiltonijanska formulacija za **kontinuirani sistem stupnjeva slobode** : zamišlja se da je koordinata \vec{x} diskretna i da svaki \vec{x} predstavlja nezavisan stupanj slobode
- **kanonski impuls** $p(\vec{x})$ i **gustoća kanonskog impulsa** $\pi(\vec{x})$

$$p(\vec{x}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(\vec{x})} \sim \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(\vec{x})} \sum_{\vec{y}} \mathcal{L}(\phi(\vec{y}), \dot{\phi}(\vec{y})) \Delta V_i = \pi(\vec{x}) \Delta V_i, \quad (61)$$

$$\pi(\vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\vec{x})}. \quad (62)$$

(Volumen smo razdijelili na male dijelove iznosa ΔV_i . Volumen ΔV_i je označen sa nekom točkom unutar njega – u prvoj aproksimaciji nije bitno kojom. Zato sumiramo po točkama a ne integriramo po njima. Polja unutar svakog volumena ΔV_i su približno konstantna.)

- **Hamiltonijan** u diskretiziranoj formulaciji

$$H = \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}) \dot{\phi}(\vec{x}) - L, \quad (63)$$

i pripadni izraz pri prijelazu na **kontinuirane varijable**,

$$H = \int d^3x [\pi(\vec{x}) \dot{\phi}(\vec{x}) - \mathcal{L}] \equiv \int d^3x \mathcal{H}. \quad (64)$$

Primjer : Sistem s jednim realnim skalarnim poljem

- **Lagrangijan** :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \end{aligned} \quad (65)$$

m je parametar, za koji će poslije biti interpretiran kao masa.

- **jednadžba gibanja** (tzv. (slobodna) Klein-Gordonova jednadžba (KGE)),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi = 0, \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0 \quad (66)$$

(u ovom kontekstu to je klasična jednadžba).

- **Hamiltonijan** :

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \stackrel{(62),(65)}{=} \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \quad (67)$$

C. Noetherin teorem

- Noetherin teorem (NT) povezuje **simetrije klasične teorije polja i zakone sačuvanja: Za svaku kontinuiranu simetrijsku transformaciju polja postoji jedna sačuvana struja (sačuvan naboj).**

- **Kontinuirane transformacije**

NT je povezan sa **kontinuiranim transformacijama polja** kao što je ϕ , čiji infinitezimalni oblik glasi

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi(x) . \quad (68)$$

Tu je α infinitezimalni parametar, a $\Delta \phi(x)$ deformacija sistema polja.

- **Simetrijska transformacija :**

Transformacija (68) se naziva **simetrijskom transformacijom** ako ona **ne mijenja jednadžbe gibanja**. To je **osigurano ako je akcija invarijantna na transformaciju (68) do na površinske članove** (vidi treći član u jedn. (59)), zato jer oni ne mijenjaju jednadžbe gibanja. Mogućnost postojanja proizvoljnih površinskih članova u akciji dozvoljava sljedeću **transformaciju Lagrangijana**,

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x) = \mathcal{L}(x) + \alpha \Delta \mathcal{L}(x) \quad (69)$$

gdje je $\mathcal{J}^\mu(x)$ neka struja.

- **Zakoni sačuvanja :**

Usporedbom varijacije Lagrangijana $\Delta \mathcal{L}(x)$ (69) sa varijacijom dobivenom varijacijom polja dobija se

$$\begin{aligned} \alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x) &= \alpha \Delta \mathcal{L}(x) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\alpha \Delta \phi) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\alpha \Delta \phi) \right) \\ &= \alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi \right) + \alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \Delta \phi . \end{aligned} \quad (70)$$

Uz pretpostavku da za sistem vrijede **Euler-Lagrangeove jednadžbe gibanja** dobiva se **sačuvana struja**,

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0, \quad j^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - \mathcal{J}^\mu . \quad (71)$$

– ako simetrija uključuje **više od jednog polja** $j^\mu(x)$ se mora zamijeniti sa sumom takvih članova

– **svakoj kontinuiranoj simetriji odgovara jedna takva sačuvana struja.**

– zakon sačuvanja (71) je **lokalan**

– zakoni sačuvanja (71) mogu se izraziti preko **sačuvanih naboja**,

$$Q \equiv \int_{3D \text{ prostor}} j^0 d^3x . \quad (72)$$

Primjer 1 : Bezmaseno skalarno polje, $\phi \rightarrow \phi + \alpha$

- Lagrangijan:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 . \quad (73)$$

- Lagrangijan je očigledno invarijantan na transformaciju $\phi \rightarrow \phi + \alpha$

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}^\mu = 0 . \quad (74)$$

- Transformacija polja je

$$\phi \rightarrow \phi + \alpha \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = 1 . \quad (75)$$

- Stoga je struja prema (71) jednaka

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi . \quad (76)$$

- Euler-Lagrangeove jednadžbe i provjera sačuvanja struje:

$$\partial_\mu \underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right)}_{\partial^\mu\phi} = 0 . \quad (77)$$

Primjer 2 : Kompleksno skalarno polje, fazna transformacija, $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$

- Lagrangijan:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2 . \quad (78)$$

- Transformacija na koju je Lagrangijan invarijantan, \mathcal{J}^μ :

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi, \quad \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}^\mu = 0 . \quad (79)$$

- Infinitesimalne transformacije polja:

$$\phi \xrightarrow{inf} \phi + i\alpha\phi, \quad \phi^* \xrightarrow{inf} \phi^* - i\alpha\phi^*, \quad (80)$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = i\phi, \quad \Delta\phi^* = -i\phi^* . \quad (81)$$

- Sačuvana struja:

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \times (i\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} \times (-i\phi^*) \\ &= i[(\partial_\mu\phi^*)\phi - (\partial_\mu\phi)\phi^*] . \end{aligned} \quad (82)$$

- Euler-Lagrangeove jednadžbe i provjera sačuvanja struje:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^* = 0 \quad (83)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu j^\mu = i[(\partial_\mu \partial^\mu \phi^*)\phi - (\partial_\mu \partial^\mu \phi)\phi^*] = 0. \quad (84)$$

- Interpretacija struje (82) (vidi poslije) : elektromagnetska gustoća struje, a pripadni naboj je naboj pripadnog skalarnog polja.

Primjer 3 : realno skalarno polje, translacije

- Transformacija koordinata:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - a^\mu. \quad (85)$$

- Pridružena transformacija skalarnog polja, $\Delta\phi$

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x+a) \quad \Rightarrow \quad \phi(x) \xrightarrow{inf} \phi(x) + a^\mu \partial_\mu \phi(x) \quad (86)$$

$$\Rightarrow (\Delta\phi)_\mu = \partial_\mu \phi(x). \quad (87)$$

- **Lagrangijan** je također skalar (ponaša se kao realno skalarno polje), pa **mora imati istu konačnu i infinitezimalnu transformaciju kao realno skalarno polje** (ovdje navodimo infinitezimalnu transformaciju)

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + a^\nu \partial_\mu (\delta^\mu_\nu \mathcal{L}). \quad (88)$$

- Odatle slijedi da postoje četiri struje \mathcal{J}^μ ,

$$(\mathcal{J}^\mu)_\nu = \delta^\mu_\nu \mathcal{L}. \quad (89)$$

- Sačuvane struje T^μ_ν slijede iz (71) uvrštavanjem izraza za $(\Delta\phi)_\mu$, (87),

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta^\mu_\nu. \quad (90)$$

- **Interpretacija** : T^μ_ν je tzv. **tenzor energije i impulsa**. Četiri pridružene sačuvane veličine su **Hamiltonijan**, koji je pridružen translaciji u vremenu (a^0),

$$H = \int T^{00} d^3x = \int \mathcal{H} d^3x = \int d^3x \left(\frac{1}{2} |\pi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{m^2}{2} |\phi|^2 \right), \quad (91)$$

i **operatori impulsa** koji su pridruženi prostornim translacijama (a^i),

$$P^i = \int d^3x T^{0i} = \int \pi \partial^i \phi d^3x = - \int \dot{\phi} \nabla^i \phi d^3x. \quad (92)$$

Primjer 4 : Realno skalarno polje, Lorentzove transformacije

- Infinitesimalna Lorentz transformacija koordinata:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu . \quad (93)$$

- Pridružena transformacija skalarnog polja; $\Delta^{\mu\nu}\phi(x)$:

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi(x + \omega x) = \phi(x) + (\omega x)^\mu \partial_\mu \phi(x) \\ &= \phi(x) - \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \phi(x) \end{aligned} \quad (94)$$

$$\stackrel{(68)}{\Rightarrow} \Delta^{\mu\nu} \phi(x) = -(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \phi(x) . \quad (95)$$

- Transformacija Lagrangijana (ponaša se kao realno skalarno polje):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &\rightarrow \mathcal{L}(x) - \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \mathcal{L}(x) \\ &= \mathcal{L}(x) - \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (\partial^\nu x^\mu - \partial^\mu x^\nu) \mathcal{L}(x) \\ &= \mathcal{L}(x) - \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \underbrace{\partial_\alpha (g^{\alpha\nu} x^\mu - g^{\alpha\mu} x^\nu)}_{\partial_\alpha (\mathcal{J}^\alpha)^{\mu\nu}} \mathcal{L}(x) \end{aligned} \quad (96)$$

$$\stackrel{(69)}{\Rightarrow} (\mathcal{J}^\alpha)^{\mu\nu} = (g^{\alpha\nu} x^\mu - g^{\alpha\mu} x^\nu) \mathcal{L}(x) . \quad (97)$$

- Sačuvane struje, $Q^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} Q^{\mu\nu} &\stackrel{(71),(62)}{=} - \int d^3x \left[\pi(x) (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \right. \\ &\quad \left. - (x^\mu g^{\nu 0} - x^\nu g^{\mu 0}) \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x))^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2(x) \right) \right], \end{aligned} \quad (98)$$

odakle

$$\begin{aligned} Q^{ij} &= - \int d^3x \pi(x) (x^i \partial^j - x^j \partial^i) \phi(x), \\ Q^{0i} &\stackrel{(62),(91)}{=} - \int d^3x \left(x^0 \pi(x) \partial^i \phi(x) - x^i \mathcal{H}(x) \right) . \end{aligned} \quad (99)$$

1.3 Kvantizacija Klein-Gordonovog polja

Postupak :

- Kreće se od klasične teorije polja.
- Reinterpretiraju se klasična polja, zamjenjujući ih operatorima koje zadovoljavaju kanonske kvantizacijske relacije.
- Teorija se "rješava" nalaženjem svojstvenih vrijednosti i svojstvenih stanja Hamiltonijana, rabeći analogiju sa kvantizacijom harmoničkog oscilatora.

Kvantizacija KG polja

Kvantizacija diskretnog sistema čestica

- Kvantizacija se provodi preko sljedećih komutacijskih relacija:

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij}; \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 . \quad (100)$$

Kvantizacija skalarnog polja u Schrödingerovoj slici

- **Kvantizacija skalarnog polja vrši se po analogiji sa kvantizacijom mnogočestičnog sistema.** To se radi u dva koraka. Prvi je da se prostor podijeli u male kockice koje se numeriraju prirodnim brojevima. Kvantizacija se tada provodi kao za diskretni sistem čestica. Komutacijske relacije koordinata i impulsa se dijele sa volumenom koji sadrži kanonski impuls ($p(\vec{x}_i) = \pi(\vec{x}_i)\Delta V_i$). Zatim se napravi limes u kojem volumen kockica ΔV_i teži k nuli. Formalno to vodi na sljedeće zamjene s obzirom na kvantizaciju diskretnog sistema čestica,

$$\begin{aligned} i &\rightarrow \vec{x}, \\ q &\rightarrow \phi, \\ p &\rightarrow \pi, \\ \delta_{ij} &\rightarrow \delta(\vec{x} - \vec{y}) . \end{aligned} \quad (101)$$

Primjetimo da ulogu diskretnog indeksa i preuzimaju kontinuirani indeksi - prostorne koordinate skalarnog polja \vec{x} ; ulogu koordinate q (tj. koordinata q_i) preuzima polje ϕ (odnosno njegove vrijednosti $\phi(\vec{x})$); ulogu kanonskog impulsa ($p_i = \partial L/\partial q_i$) p (tj. p_i) preuzima kanonska gustoća impulsa π (tj. $\pi(\vec{x})$) (vidi (61) i (62)).

- Time se **za polja u Schrödingerovoj reprezentaciji** dobivaju sljedeće **kanonske komutacijske relacije**

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}); \\ [\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] &= [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0 . \end{aligned} \quad (102)$$

- Gornje relacije vrijede u Schrödingerovoj slici. U **Heisenbergovoj slici** su operatori ϕ i π funkcije vremena. Tada se treba staviti dodatni zahtjev da su **vremena pridružena**

ϕ i π operatorima ista (to isto vrijedi i za operatore q_i i p_i), npr.

$$[\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}); \quad (103)$$

Nalaženje spektra Hamiltonijana

Identificiranje skalarnog polja sa beskonačnim skupom harmoničkih oscilatora

Za nalaženje spektra Hamiltonijana pogodnija je Heisenbergova slika u kojoj su polja ovisna i o vremenu.

- **KG polje i HO** : Raspisom kvantiziranog skalarnog polja u Heisenbergovoj slici preko **Fourierovih komponenti**,

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{p}, t), \quad (104)$$

i primjenom **KG jednadžbe** na to polje dobijamo jednadžbu za Fourierove komponente,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\vec{p}|^2 + m^2) \right] \phi(\vec{p}, t) = 0, \quad (105)$$

kao funkciju energije

$$\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (106)$$

- Jednadžba (105) se **podudara sa jednadžbom za harmonički oscilator frekvencije (106)**. To ukazuje na to da **operator skalarnog polja** možemo shvatiti kao **beskonačan skup harmoničkih oscilatora**. Za potvrdu toga treba naći i eksplicitnu formu Hamiltonijana i njegov spektar.

Spektar jednostavnog harmoničkog oscilatora

- **Nalaženje spektra jednostavnog harmoničkog oscilatora**

$$H_{SHO} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2\phi^2, \quad (107)$$

je poznato iz kvantne mehanike (Born, Heisenberg i Jordan et al. 1926). Svojstvene vrijednosti Hamiltonijana nalaze se izražavanjem koordinate ϕ i pridruženog impulsa p preko operatora podizanja i spuštanja,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger); \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger). \quad (108)$$

- **Kanonska komutacijska relacija** za ϕ i p , $[\phi, p] = i$ ekvivalentna je komutacijskoj relaciji

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (109)$$

DZ. Dokaži da su komutacijske relacije $[\phi, p] = i$ ekvivalentne komutacijskim relacijama (109).

- **Hamiltonijan** (107) uporabom (108) pa (109) postaje jednak

$$H = \frac{\omega}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) = \omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) . \quad (110)$$

- **Hamiltonijan** ima sljedeće **komutacijske relacije sa operatorima** a^\dagger i a ,

$$[H_{SHO}, a^\dagger] = \omega a^\dagger, \quad [H_{SHO}, a] = -\omega a, \quad (111)$$

koje pokazuju da bilo kojem stanju $|\alpha\rangle$ operatori a^\dagger i a **podizü odnosno spuštaju energiju** za iznos ω .

DZ. Pokaži da iz (107), definicija (108) i komutacijskih relacija (109) slijedi izraz za Hamiltonijan (110).

- Nadalje, kako je operator $a^\dagger a$ pozitivno definitan ($\langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle \geq 0$ za svako stanje $|\alpha\rangle$) **najniža energija** koju Hamiltonijan (110) može imati je $\omega/2$. Hamiltonijan i ima tu svojstvenu vrijednost, jer ako ne bi postojala, ne bi završavao niz stanja silaznih energija koje se razlikuju za ω . Time bi bila narušena i pozitivnost energije HO i pozitivna-definitnost operatora $a^\dagger a$.

DZ. Uz pretpostavku da Hamiltonijan ima oblik (110), pokaži ako u spektru Hamiltonijana ne postoji energija $\omega/2$ da Hamiltonijan nužno ima negativne energije i da ne postoji stanje najniže energije.

- Stanje najniže energije $|0\rangle$ (tzv. **vakuusko stanje** ili vakuum) zadovoljava relaciju

$$a|0\rangle = 0, \quad (112)$$

i ima već spomenutu svojstvenu energiju $\omega/2$.

- Sva **druga svojstvena stanja HO** mogu se dobiti uzastopnim djelovanjem operatora a^\dagger na HO,

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle . \quad (113)$$

$\sqrt{n!}$ je faktor normalizacije. Svojstvene vrijednosti stanja (113) s obzirom na (110) su $(n + \frac{1}{2})\omega$. Ta stanja čine potpuni skup stanja HO a pripadne svojstvene vrijednosti čine potpuni spektar HO. Time je dijagonalizacija Hamiltonijana HO ostvarena.

DZ. Dokaži da su stanja (113) ispravno normalizirana.

- Nadalje, **interpretirajući** stanja $|n\rangle$ kao stanja sa n čestica, operatori a i a^\dagger se mogu interpretirati kao **operatori poništenja odnosno stvaranja čestica**.

Spektar Hamiltonijana realnog KG polja

a. Izrazi za ϕ i π preko operatora stvaranja i poništenja

Za sada znamo da je KG polje ekvivalentno beskonačnom skupu nezavisnih HO koji odgovaraju Fourierovim modovima/komponentama skalarnog polja.

- **Skalarno polje i pripadna kanonska gustoća impulsa se raspisuje preko operatora $a_{\vec{p}}^\dagger$ i $a_{\vec{p}}$ u analogiji sa (108),**

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} (a_{\vec{p}} + a_{-\vec{p}}^\dagger); \end{aligned} \quad (114)$$

$$\begin{aligned}\pi(\vec{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} (a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} (a_{\vec{p}} - a_{-\vec{p}}^\dagger). \end{aligned} \quad (115)$$

Polja u jednadžbama (114) i (115) nemaju ovisnosti o vremenu, drugim riječima dana su u Schrödingerovoj reprezentaciji (isto kao i operatori ϕ i p u jednadžbi (108)).

- Iz izraza (114) i (115) te kanonskih komutacijskih relacija (102) slijede **komutacijske relacije za operatore stvaranja i poništenja** (vidi Dodatak 2)

$$\begin{aligned}[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \\ [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] &= [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{p}'}^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (116)$$

DZ. Provjerite da li relacije (116), (114) i (115) daju kanonske komutacijske relacije (102).

b. Hamiltonijan preko operatora stvaranja i poništenja

- Uvrštavanjem izraza za operatore (114) i (115) u izraz za klasično realno skalarno polje (67) dobija se **operator Hamiltonijana realnog kvantiziranog skalarnog polja preko operatora stvaranja i poništenja**,

$$\begin{aligned}H &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \omega_{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger) \end{aligned} \quad (117)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \omega_{\vec{p}} \underbrace{[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger]}_{\delta(\vec{0})} \right). \quad (118)$$

Izraz (117) (a također i izraz (118)) ponovo pokazuje da se realno KG polje može shvatiti kao beskonačan skup nezavisnih HO.

- Upotrebom komutacijskih relacija (116) vidi se da je zadnji član u (118) proporcionalan $\delta(0)$, dakle beskonačni c -broj. On odgovara sumi svih **energija osnovnog stanja** $\omega_{\vec{p}}$ (suma ide po svim modovima \vec{p}).

- Srećom (osim ako je gravitacija u pitanju) **energija se može mjeriti samo relativno prema nekoj vrijednosti**. Obično se za tu referentnu vrijednost uzima energija osnovnog stanja. Zbog toga se **energija osnovnog stanja zanemaruje** u svim računima u teoriji polja.

c. Spektar energija, svojstvena stanja Hamiltonijana

- Iz izraza za Hamiltonijan (118) i komutacijskih relacija (116) slijedi

$$[H, a_{\vec{p}}^\dagger] = \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger, \quad [H, a_{\vec{p}}] = -\omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}. \quad (119)$$

DZ. Dokaži relacije (119).

- **Spektar stanja Hamiltonijana i pripadne svojstvene vrijednosti** sada se odmah mogu napisati rabeći rezultate dobivene za obični HO. **Svaki mod \vec{p} odgovara jednom HO**. A svakom HO je pridružen spektar stanja $\omega_{\vec{p}}(\frac{1}{2} + n_{\vec{p}})$ i pridružena svojstvena stanja $|n_{\vec{p}}\rangle$.

- **Vakuumsko stanje** se definira kao produktno stanje vakuumskih stanja svih modova,

$$|0\rangle = \prod_{\vec{p}} |0\rangle_{\vec{p}}, \quad (120)$$

i za njega se uzima da ima energiju nula (tj. energija se gleda relativno prema tom stanju). Njegovo osnovno svojstvo jest da ga poništava svaki operator poništenja,

$$a_{\vec{p}} |0\rangle = 0. \quad (121)$$

- **Sva druga stanja** dobivaju se uzastopnim djelovanjem operatora stvaranja, $a_{\vec{p}}^\dagger$, na vakuumsko stanje, npr. stanje

$$a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger \dots |0\rangle \quad (122)$$

je stanje energije $\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{q}} + \dots$ (Napomena: normalizacija stanja još nije određena – vidi poslije). Stanja (122) čine potpun skup a pripadne energije potpuni spektar Hamiltonijana (realnog) skalarnog polja (118). Napomenimo još, da budući da je spektar stanja kontinuiran, vrlo rijetko se mogu ostvariti stanja sa dvije iste energije.

d. Operator impulsa, interpretacija svojstvenih stanja Hamiltonijana

- Uporabom izraza za **impuls klasičnog realnog skalarnog polja** (92) i za operatore (114) i (115) dobija se izraz za **impuls kvantiziranog skalarnog polja**,

$$\vec{P} = \int d^3x \pi(\vec{x})(-\nabla)\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}. \quad (123)$$

DZ: Dokažite izraz (123) za impuls kvantiziranog skalarnog polja.

- Svojstvena stanja Hamiltonijana (122) su također **svojstvena stanja operatora impulsa** (123),

$$\vec{P}(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger \dots |0\rangle) = (\vec{p} + \vec{q} + \dots)(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger \dots |0\rangle). \quad (124)$$

- Iz toga slijedi da se operator $a_{\vec{p}}^\dagger$ može shvatiti kao **operator stvaranja čestice energije** $E_{\vec{p}} = \omega_{\vec{p}} = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ **i impulsa** \vec{p} . Energija je *uvijek* veća ili jednaka nuli.

Bose-Einsteinova statistika

- Zahvaljujući komutativnosti operatora a_p stanja zadovoljavaju **Bose-Einsteinovu statistiku**. Npr. $a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger |0\rangle = a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$.

Normalizacija stanja

a. Normalizacija vakuumskog stanja

- Vakuumsko stanje se normalizira na jedinicu,

$$\langle 0|0\rangle = 1 \dots \quad (125)$$

Ta je normalizacija Lorentz invarijantna zato jer je vakuum po pretpostavci invarijantan na Poincaréove transformacije.

b. Normalizacija jednočestičnih stanja

Lorentz invarijantna 3-mjera i 3-delta funkcija

- Ako bismo jednočestična stanja definirali kao $|\vec{p}\rangle = a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$, njihova normalizacija,

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}|\vec{q}\rangle &= \langle 0|a_{\vec{p}}a_{\vec{q}}^\dagger|0\rangle = \langle 0|[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger]|0\rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \end{aligned} \quad (126)$$

nije Lorentz invarijantna. Naime iz Lorentz invarijantnog izraza

$$\begin{aligned} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) &= \int d^4p \left(\frac{\delta(p^0 - E_{\vec{p}})}{2E_{\vec{p}}} + \frac{\delta(p^0 + E_{\vec{p}})}{|-2E_{\vec{p}}|} \right) \theta(p^0) \\ &= \int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}}, \end{aligned} \quad (127)$$

nalazimo da je mjera

$$\frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}} \quad (128)$$

Lorentz invarijantna. Nadalje, definiciju delta funkcije možemo izraziti preko te Lorentz invarijantne mjere

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{def}{=} \int d^3p \delta(\vec{p} - \vec{q}) \\ &= \int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}} \times 2E_{\vec{p}} \delta(\vec{p} - \vec{q}) . \end{aligned} \quad (129)$$

Iz toga slijedi da je

$$2E_{\vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (130)$$

Lorentz invarijantno, pa $\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$ a time i normalizacija (126) ne može biti Lorentz invarijantna.

Lorentz invarijantna normalizacija

- Lorentz invarijantnost (130) prirodno sugerira **definiciju jednočestičnog stanja sa Lorentz invarijantnom normalizacijom**,

$$\begin{aligned} |\vec{p}\rangle &= \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle, \\ \langle \vec{q} | \vec{p} \rangle &= (2\pi)^3 2E_{\vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) . \end{aligned} \quad (131)$$

Komentar: U gornjem izvodu rabili smo Lorentz invarijantni izraz (127). U tom izrazu su očigledno invarijantni mjera d^4p i delta funkcija $\delta(p^2 - m^2)$. Međutim na prvi pogled $\theta(p^0)$ nije nužno Lorentz invarijantna. Ona je Lorentz invarijantna zbog prisutnosti $\delta(p^2 - m^2)$ funkcije, koja stavlja p^0 na masenu ljusku čestice mase $m > 0$. Zbog tog uvjeta **predznak p^0 je također invarijanta svih Lorentzovih transformacija osim vremenske inverzije**.

DZ. Pokažite da za 4-impuls koji je na ljusci mase kontinuirane Lorentzove transformacije ne mogu mijenjati predznak p^0 (vidi npr. Weinberg I poglavlje 2.3).

c. Normalizacija višečestičnih stanja

- Kod **višečestičnih stanja** moramo uzeti u obzir i **Bose-Einsteinovu statistiku**. Npr. za dvočestično stanje normalizacija glasi

$$\langle \vec{q}_1 \vec{q}_2 | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle = \langle \vec{q}_1 | \vec{p}_1 \rangle \langle \vec{q}_2 | \vec{p}_2 \rangle + \langle \vec{q}_1 | \vec{p}_2 \rangle \langle \vec{q}_2 | \vec{p}_1 \rangle, \quad (132)$$

gdje su $\langle \vec{q}_i | \vec{p}_j \rangle$ normalizacije odgovarajućih jednočestičnih stanja. Primjetite da se normalizacija sadrži normalizacije jednočestičnih stanja u svim mogućim relativnim permutacijama $\langle \vec{p}_i |$ i $|\vec{q}_j \rangle$ stanja.

DZ. Napišite izraz za normalizaciju 3-čestičnog stanja.

Transformacija stanja u Hilbertovom prostoru i transformacija operatora stvaranja na Lorentzove transformacije

- Za dani operator A hermitski pridružen operator definira se relacijom (vidi Dodatak 9 (1680)),

$$\langle \alpha | A | \beta \rangle \equiv \langle \alpha | A \beta \rangle = \langle A^\dagger \alpha | \beta \rangle, \quad (133)$$

gdje su $|\alpha\rangle$ i $|\beta\rangle$ proizvoljna stanja Hilbertovog prostora.

a. Transformacije stanja u Hilbertovom prostoru

- U Hilbertovom prostoru stanja su povezana operatorima simetrija, tj. operatorima koji ne mijenjaju prijelazne vjerojatnosti. Lorentzove transformacije su u Hilbertovom prostoru također prikazane takvim operatorima. Npr. stanje $|\vec{p}\rangle$ i stanje Lorentz transformiranog 4-impulsa Λp , $|\Lambda \vec{p}\rangle$ su povezana operatorom koji ovisi o parametrima Lorentzove transformacije

$$U(\Lambda)|\vec{p}\rangle = |\Lambda \vec{p}\rangle. \quad (134)$$

- Wigner je pokazao da **operatori simetrija koji djeluju u Hilbertovom prostoru stanja mogu biti samo unitarni i linearni**,

$$\begin{aligned} \langle U\alpha | U\beta \rangle &= \langle \alpha | U^\dagger U \beta \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle, \\ U(a_1 |\alpha_1\rangle + a_2 |\alpha_2\rangle) &= a_1 U |\alpha_1\rangle + a_2 U |\alpha_2\rangle, \quad (a_1, a_2 \in \mathbf{C}), \end{aligned} \quad (135)$$

ili **antiunitarni i antilinearni**,

$$\begin{aligned} \langle U\alpha | U\beta \rangle &= \langle U^\dagger U \beta | \alpha \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle, \\ U(a_1 |\alpha_1\rangle + a_2 |\alpha_2\rangle) &= a_1^* U |\alpha_1\rangle + a_2^* U |\alpha_2\rangle. \end{aligned} \quad (136)$$

- **Ortokrone** ($\Lambda^0_0 > 0$) i **svojstvene** ($\det \Lambda > 0$) **Lorentzove transformacije** ($\{\Lambda\}$) su neprekidno povezane sa jediničnim operatorom koji je unitaran i linearan. Stoga su spomenute Lorentzove transformacije

$$U(\Lambda)|\vec{p}\rangle = |\Lambda \vec{p}\rangle \quad (137)$$

također **unitarne i linearne**. Time je pokazana unitarnost operatora $U(\Lambda)$ iz jednadžbe (134).

Napomena 1 : Transformacija stanja (134) odnosno (137) vrijedi samo za stanja koja imaju spin jednak nuli (tzv. skalarne čestice). Transformaciju stanja sa spinom razmatrat ćemo poslije.

Napomena 2 : Sva stanja se definiraju preko stanja tzv. standardnog 4-impulsa

$$|k\rangle, \quad (138)$$

koje je invarijantno na tzv. **Wignerove rotacije** (vidi poslije). Za stanja masivnih čestica k je 4-impuls čestice u mirovanju, $k = (m, \vec{0})$.

Napomena 3 : Relacija (134) vrijedi samo ako se rabi Lorentz invarijantna normalizacija stanja (131). Ako bi se rabila npr, normalizacija

$$\langle \vec{q} | \vec{p} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) . \quad (139)$$

tada bi relacija (134) odnosno (137) glasila

$$U(\Lambda) |\vec{p}\rangle = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\vec{p}}}{E_{\vec{p}}}} |\Lambda\vec{p}\rangle . \quad (140)$$

b. Transformacije operatora stvaranja

- Uporabom jednadžbe (134) odnosno (137), definicije jednočestičnog stanja s Lorentz-invarijantnom normalizacijom (131) s Lorentz-invarijantnom normalizacijom te Lorentz invarijantnost vakuuma nalazimo Lorentzovu transformaciju operatora stvaranja,

$$U(\Lambda) a_{\vec{p}}^\dagger U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\vec{p}}}{E_{\vec{p}}}} a_{\Lambda\vec{p}}^\dagger . \quad (141)$$

- Uočite da operatori stvaranja *nisu Lorentz invarijantni*.

c. Relacija potpunosti za jednočestična stanja

Sa normalizacijom (131) **relacija potpunosti za jednočestična stanja** glasi

$$(\mathbf{1})_{1\text{-čestica}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |\vec{p}\rangle \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \langle \vec{p} | . \quad (142)$$

Interpretacija stanja $\phi(x)|0\rangle$

- Polazeći od izraza za realno KG polje preko operatora stvaranja i poništenja (114) dobija se

$$\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle, \quad (143)$$

tj. linearna superpozicija 1-čestičnih stanja određenog impulsa.

- Taj se izraz do na faktor $1/2E_{\vec{p}}$ podudara sa **NR izrazom za svojstveno stanje**

položaja $|\vec{x}\rangle$. Stoga će se $\phi(\vec{x})|0\rangle$ interpretirati kao *tvorba čestice na položaju* \vec{x} .
 - Dodatna potvrda te tvrdnje dobija se iz izraza

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi(\vec{x})|\vec{p}\rangle &= \langle 0|\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}'}}} \left(a_{\vec{p}'} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \right) \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle . \\ &= e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\end{aligned}\tag{144}$$

- Taj se izraz može interpretirati kao ***x*-reprezentacija jednočestičnog stanja** $|\vec{p}\rangle$, i jednak je odgovarajućem izrazu u NR kvantnoj mehanici,

$$\langle \vec{x}|\vec{p}\rangle \propto e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}},\tag{145}$$

za valnu funkciju stanja $|\vec{p}\rangle$.

1.4 KG polje u prostoru-vremenu

Teme:

- analiza prostorno-vremenske ovisnosti KG polja u Heisenbergovoj slici
- analiza kauzalnosti – razlog za postojanje antičestica
- propagator KG polja
- (- međudjelovanje sa klasičnim izvorom)

A. Prostorno-vremenska ovisnost KG polja

- KG polje u Heisenbergovoj slici

- Vremenska ovisnost polja u Heisenbergovoj slici se ostvaruje ovako

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi(\vec{x}, t) = e^{iHt} \phi(\vec{x}) e^{-iHt}, \\ \pi(x) &= \pi(\vec{x}, t) = e^{iHt} \pi(\vec{x}) e^{-iHt}.\end{aligned}\tag{146}$$

- Transformacija (146) čuva kanonska kvantizacijska pravila (103).

- Reprodukcijska KG jednadžbe

Uporabom Heisenbergove jednadžbe gibanja

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O} = [\mathcal{O}, H]\tag{147}$$

sa Hamiltonijanom (67),

$$\begin{aligned}H &\stackrel{(67)}{=} \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \phi (-\nabla^2 + m^2) \phi \right]\end{aligned}\tag{148}$$

i za polja ϕ i π

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) = i \pi(\vec{x}, t)\tag{149}$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \pi(\vec{x}, t) = -i (-\nabla^2 + m^2) \phi(\vec{x}, t)\tag{150}$$

slijedi

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = (\nabla^2 - m^2) \phi,\tag{151}$$

a to je KG jednadžba za (slobodno) realno skalarno polje.

DZ. Provedite dokaz jednadžbe (151).

- **Vremenska zavisnost KG polja preko vremenske zavisnosti operatora stvaranja i poništenja**

- Iz jednakosti (119)

$$[H, a_{\vec{p}}] \stackrel{(151)}{=} -E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}, \quad [H, a_{\vec{p}}^\dagger] \stackrel{(151)}{=} E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger, \quad (152)$$

i Hausdorffove formule,

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \dots \quad (153)$$

sljedeće identitete,

$$e^{iHt} a_{\vec{p}} e^{-iHt} = a_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t} \quad e^{iHt} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-iHt} = a_{\vec{p}}^\dagger e^{iE_{\vec{p}}t}. \quad (154)$$

DZ. Provjerite identitete (154).

- Iz jednadžbi (146), (154) i linearnosti djelovanja Hamiltonijana slijedi eksplicitna zavisnost Heisenbergovih operatora $\phi(x)$ i $\pi(x)$ operatora o vremenu

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_{\vec{p}}}, \quad (155)$$

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t). \quad (156)$$

- **Prikaz \vec{x} i t ovisnosti polja preko operatora impulsa i operatora energije**

- Analognim postupkom sa operatorom impulsa \vec{P} kao sa H može se povezati $\phi(\vec{x})$ sa $\phi(0)$,

$$e^{-i\vec{P} \cdot \vec{x}} a_{\vec{p}} e^{i\vec{P} \cdot \vec{x}} = a_{\vec{p}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \quad e^{-i\vec{P} \cdot \vec{x}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{i\vec{P} \cdot \vec{x}} = a_{\vec{p}}^\dagger e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}. \quad (157)$$

Odatle

$$\phi(x) = e^{iHt - \vec{P} \cdot \vec{x}} \phi(0) e^{-iHt + \vec{P} \cdot \vec{x}} = e^{iP \cdot x} \phi(0) e^{-iP \cdot x}, \quad (158)$$

gdje je $P^\mu = (H, \vec{P})$

- Primjetite da su e^{iHt} i $e^{-\vec{P} \cdot \vec{x}}$ operatori translacije u vremenu i prostoru. Iako djeluju u Hilbertovom prostoru one efektivno translatairaju koordinate polja,

$$e^{iP \cdot x} \phi(y) e^{-iP \cdot x} = \phi(y + x). \quad (159)$$

DZ. Dokažite jednadžbu (159).

- Dualnost čestične i valne interpretacije

- Izraz za skalarno polje ujedinjuje čestična i valna svojstva. Čestična su sadržana u operatorima stvaranja i poništenja koja djeluju u Hilbertovom prostoru. Valna su sadržana u rješenjima KG valne jednadžbe $e^{ip \cdot x}$ i $e^{-ip \cdot x}$. Time je problem dualnosti istovremene čestične i valne prirode veličina koje se mjere razriješen.

- Nadalje riješen je i problem negativnih energija: iako se u polju ϕ javljaju i pozitivne $e^{-ip^0 x^0}$ i negativne $e^{ip^0 x^0}$ faze ($p^0 > 0$), rješenja pozitivne energije se javljaju uvijek uz operatore poništenja, a rješenja negativne energije uz operatore stvaranja. U tom se smislu u teoriji javljaju samo pobuđenja pozitivne energije.

B. Kauzalnost

B.1. Kauzalnost za realno skalarno polje

- Amplituda širenja čestice iz točke y u točku x za realno skalarno polje

- Proučimo u Heisenbergovoj slici amplitudu širenja čestice iz točke y u točku x , $D(x-y) = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$. Uporabom svojstava vakuuma (121) i (122) te normalizacije 1-čestičnih stanja (131) dobijamo,

$$D(x-y) \equiv \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (160)$$

a. Prvo razmotrimo $D(x-y)$ za **vremenoliki** interval $(x-y)^2 > 0$. $D(x-y)$ ćemo izračunati u sustavu u kojem je $\vec{x} - \vec{y} = 0$. Definiramo $x^0 - y^0 = t$. Odatle (vidi Dodatak 1.B) ("M" označava račun programom Mathematica) ,

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_m^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \\ &\stackrel{M}{=} \frac{-imK_1(imt)}{4\pi^2 t} \xrightarrow{mt \gg 1} \frac{-im^{1/2}}{(2i)^{1/2} 4\pi^{3/2} t^{3/2}} e^{-imt} \sim e^{-imt}. \end{aligned} \quad (161)$$

U koraku "M" pretpostavljeno je da masa m ima mali imaginarni dio. Uočimo da $D(x-y)$ nije simetrična na zamjenu $x \leftrightarrow y$ odnosno $x^0 \leftrightarrow y^0$

b. Drugo razmatranje $D(x-y)$ provodimo za **prostornoliki** interval. $D(x-y)$ ćemo izračunati u sustavu u kojem je $x^0 - y^0 = 0$. Definiramo $\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$. Odatle (vidi Dodatak 1.C),

$$D(x-y) = \frac{-i}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{pe^{ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2 r} \int_m^\infty d\rho \frac{\rho e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2 - m^2}} \\
&\stackrel{M}{=} \frac{1}{4\pi^2 r} m K_1(mr) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2 r^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{m} e^{-mr} \sim e^{-mr}. \quad (162)
\end{aligned}$$

U drugom redu (162) provedena je integracija oko reza (vidi Dodatak 3.C) i uvedena varijabla $\rho = -ip$.

- Izraz za $D(x - y)$ je ovisan samo o r , stoga je simetričan za zamjenu $x \leftrightarrow y$ odnosno $\vec{x} \leftrightarrow \vec{y}$.

- Uočimo da ponovno amplituda širenja čestice iz točke y u točku x postoji izvan svjetlosnog stožca, iako eksponencijalno trne sa odaljenosti od svjetlosnog stožca, r . To po Peskin-Schroederu ukazuje da $D(x - y)$ nije fizikalna odnosno mjerljiva veličina.

- Komutator realnih skalarnih polja u različitim prostorno-vremenskim točkama

- Po Peskin-Schroederu dva polja u različitim prostorno-vremenskim točkama ako su te točke prostornolike udaljene moraju komutirati jer bi se inače informacija mogla prenositi iz jedne u drugu točku brže od svjetlosti. Komutativnost polja osigurava "kauzalnost" teorije.

- Po **Weinbergu** komutativnost skalarnih polja u prostornolike udaljenim točkama je posljedica **zahtjeva komutativnosti operatora gustoće Hamiltonijana u prostornolike udaljenim točkama**, a ta opet slijedi iz **zahtjeva Lorentz invarijantnosti teorije (polja)**.

- Proučimo stoga komutator dvaju realnih skalarnih polja,

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \\
&\quad \times [(a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}), (a_{\vec{q}} e^{-iq \cdot y} + a_{\vec{q}}^\dagger e^{iq \cdot y})] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) \\
&= D(x - y) - D(y - x). \quad (163)
\end{aligned}$$

- Komutator je jednak razlici amplituda $D(x - y)$ i $D(y - x)$ koje se razlikuju samo u predznaku argumenta. Za prostornolike intervale je $D(x - y)$ simetričan na zamjenu $x \leftrightarrow y$, dok za vremenolike intervale nije simetričan. To znači da komutator (163) iščezava van svjetlosnog konusa a različit je od nule unutar njega. Time je osiguran prijenos informacija za vremenolike udaljene točke i ujedno je zabranjen prijenos informacija brže od svjetlosti. Kauzalnost (odnosno Lorentz invarijantnost) je time sačuvana.

B.2. Kauzalnost za kompleksno skalarno polje - antičestice

- U slučaju kompleksnog skalarnog polja imamo tri komutatora polja u različitim prostorno-vremenskim točkama: $[\phi(x), \phi(y)]$, $[\phi^*(x), \phi^*(y)]$, $[\phi^*(x), \phi(y)]$. Iz komutacijskih relacija

za operatore stvaranja i poništenja (1465) vidi se da je samo zadnji komutator različit od nule,

$$\begin{aligned}
[\phi^*(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \\
&\quad \times [(a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} + b_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x}), (a_{\vec{q}} e^{-iq \cdot y} + b_{\vec{q}}^\dagger e^{iq \cdot y})] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) \\
&= D(x-y) - D(y-x) .
\end{aligned} \tag{164}$$

- Prvom od dvaju članova doprinose samo antičestični stupnjevi slobode i propagiraju antičestice iz točke y u točku x . Drugom doprinose samo čestični stupnjevi slobode i propagiraju čestice iz točke x u točku y . Ta dva se člana krata za prostornolike intervale samo ako su mase čestica i antičestica jednake. Iz toga slijedi uvjet za kauzalnost – uz čestice uvijek moraju postojati antičestice (čestice suprotnih aditivnih kvantnih brojeva) **iste mase**.

- Kod realnog skalarnog polja čestice su identične antičesticama (naboj realnog skalarnog polja jednak je nuli).

C. Propagator KG polja

C.1. Prikaz $[\phi(x), \phi(y)]\theta(x^0 - y^0)$ preko 4-dimenzijskog integrala

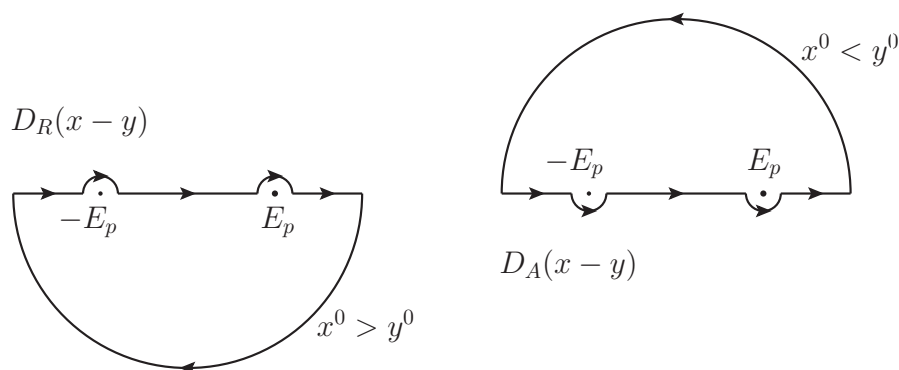


Figure 1: 1.1 Retardirana i avansirana Greenova funkcija

- $[\phi(x), \phi(y)]$ je c-broj, stoga

$$[\phi(x), \phi(y)] = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle . \tag{165}$$

- Pretpostavljajući da je $x^0 > y^0$ taj izraz možemo pisati

$$D_R(x-y) \equiv \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \theta(x^0 - y^0) \tag{166}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) \theta(x^0 - y^0) \\
&\stackrel{(16)}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ds}{2\pi i} \frac{e^{-is(x^0-y^0)}}{s+i\eta}. \quad (167)
\end{aligned}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{(p^0 - E_{\vec{p}} + i\eta)(p^0 + E_{\vec{p}} + i\eta)} \quad (168)$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + 2ip^0\eta} \quad (169)$$

- U (167) koristili smo definiciju theta funkcije (16). η je pozitivan infinitesimalan broj.
- U (168) smo u prvom (drugom) članu dobili eksponente $e^{i(-E_{\vec{p}}-s)(x^0-y^0)}$ ($e^{i(E_{\vec{p}}-s)(x^0-y^0)}$). Zatim smo uveli zamjene $p^0 = E_{\vec{p}} + s$ ($p^0 = -E_{\vec{p}} + s$) i sredili izraz. d^3p i dp^0 integracije su razdvojene na takav način da olakšaju diskusiju o integracijskoj konturi.
- U (169) smo iskoristili relaciju $E_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 + m^2$.
- Iz (168) se vidi da se integral po p^0 daje doprinos različit od nule za kontura koje se zatvara **beskonačnom polukružnicom u donjem dijelu poluravnine. Polovi $p^0 = E_{\vec{p}} - i\eta$ i $p^0 = -E_{\vec{p}} - i\eta$ su malo ispod realne osi.** To efektivno odgovara **integraciji po prvoj konturi na Sl 1.1** bez $i\eta$ članova u (168) odnosno $2ip^0\eta$ člana u (168) u naziviku - tako se dobija **rezultat naveden u Peskin-Schroederu.** Uočimo također da $i\eta$ članovi osiguravaju konačnost oscilatornih eksponenata.

- Ako umjesto $x^0 > y^0$ pretpostavimo $x^0 < y^0$ efektivno u (167) s mijenja predznak, a u (168) i (169) efektivno cijeli podintegralni izraz mijenja predznak i pored toga η **mijenja predznak.** Integral ima doprinos samo ako se kontura zatvara **beskonačnom kružnicom odozgo.** Ovaj integral odgovara integraciji po drugoj konturi na Sl 1.1. Dakle,

$$\begin{aligned}
-D_A(x-y) &= \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \theta(y^0 - x^0) \\
&= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 - 2ip^0\eta}. \quad (170)
\end{aligned}$$

Predznak -1 ispred $D_A(x-y)$ u (170) je potreban da bi bila ispunjena jednačba (171).

C.2 Greenova funkcija za KG operator

- Primjetimo da (169) zadovoljava jednačbu za KG Greenovu funkciju sa točkastim izvorom,

$$\begin{aligned}
&(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + 2ip^0\eta} \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} ie^{-ip \cdot (x-y)} \frac{-p^2 + m^2}{p^2 - m^2 + 2ip^0\eta} = -i\delta^{(4)}(x-y). \quad (171)
\end{aligned}$$

- Potvrdu te jednakosti dobijamo djelovanjem sa KG operatorom na polazni izraz,

$$\begin{aligned}
& (\partial^2 + m^2)D_R(x - y) \\
&= (\partial^2\theta(x^0 - y^0))\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
&\quad + 2(\partial_\mu\theta(x^0 - y^0))(\partial^\mu\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle) \\
&\quad + \theta(x^0 - y^0)(\partial^2 + m^2)\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
&= -\delta(x^0 - y^0)\langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
&\quad + 2\delta(x^0 - y^0)\langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
&= -i\delta^{(4)}(x - y) .
\end{aligned} \tag{172}$$

- U prvoj jednakosti smo primjenili KG operator na $D_R(x - y)$ i primjenili Leibnitzovo pravilo deviviranja.

- U drugoj jednakosti smo rabili svojstvo δ funkcije $f(x)\frac{d}{dx}\delta(x) = -\frac{df(x)}{dx}\delta(x)$, činjenicu da se djelovanjem KG operatora na komutator (163) dobija nula i izraz za kanonski impuls realno skalarnog polja (62).

- U trećoj smo upotrijebili kanonska komutacijska pravila (103) i sredili izraz.

- Time smo potvrdili da je $D_R(x - y)$ Greenova funkcija KG operatora.

- Potpuno ista diskusija vrijedi za funkciju $D_A(x - y)$, tzv. avansiranu Greenovu funkciju KG operatora. Primjetite suprotan predznak u definiciji $D_A(x - y)$ (170) od onog u (166)

C.3. Rješenja slobodne KG jednadžbe za Greenovu funkciju; propagator

- Četiri načina obilaženja polova kod KG Greenove funkcije

- Izračunajmo $D_R(x - y)$ na drugi način. Greenovu funkciju $D_R(x - y)$ možemo napisati kao 4-D Fourierov integral,

$$D_R(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{D}_R(p) . \tag{173}$$

- Rabeći (172) i integralnu reprezentaciju 4-D delta-funkcije (18) dobijamo algebarsku jednadžbu za Fourierov transformat $D_R(x - y)$,

$$(-p^2 + m^2)\tilde{D}_R(p) = -i . \tag{174}$$

- Uvrštavanjem izraza za $\tilde{D}_R(p)$ u (173) dobijamo

$$D_R(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2} . \tag{175}$$

- To "rješenje" je očigledno nepotpuno. U skladu sa gornjom diskusijom za potpunu specifikaciju $D_R(x - y)$ treba još zadati način obilaženja polova $p^0 = E_{\vec{p}}$ i $p^0 = -E_{\vec{p}}$. Polovi se mogu zaobići na četiri moguća načina:

- a. zaobilazjenje oba pola odozgo – daje $D_R(x - y)$,
- b. zaobilazjenje oba pola odozdo – daje $D_A(x - y)$,
- c. zaobilazjenje $p^0 = -E_{\vec{p}}$ odozdo i $p^0 = E_{\vec{p}}$ odozgo – vidi Sl. 1.2,
- d. zaobilazjenje $p^0 = -E_{\vec{p}}$ odozgo i $p^0 = E_{\vec{p}}$ odozdo – vidi Sl. 1.2 .

- Feynmanov propagator

- Slučaj c. je tzv. **Feynmanova preskripcija** obilazjenja polova i ona vodi na tzv. **Feynmanov propagator**,

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i}{(p^0 - E_{\vec{p}} + i\eta)(p^0 + E_{\vec{p}} - i\eta)} \quad (176)$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i}{(p^2 - m^2 + i\eta)} \quad (177)$$

$$\stackrel{(176)}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{(-i(E_{\vec{p}} - i\eta)(x^0 - y^0) + i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}))}}{2(E_{\vec{p}} - i\eta)} \theta(x^0 - y^0) + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{(-i(E_{\vec{p}} - i\eta)(y^0 - x^0) + i\vec{p} \cdot (\vec{y} - \vec{x}))}}{2(E_{\vec{p}} - i\eta)} \theta(y^0 - x^0) \quad (178)$$

$$= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle \quad (179)$$

$$\equiv \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (180)$$

$$\stackrel{(177)}{=} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{D}_F(p) . \quad (181)$$

- (176) je Feynmanova preskripcija obilazjenja polova.

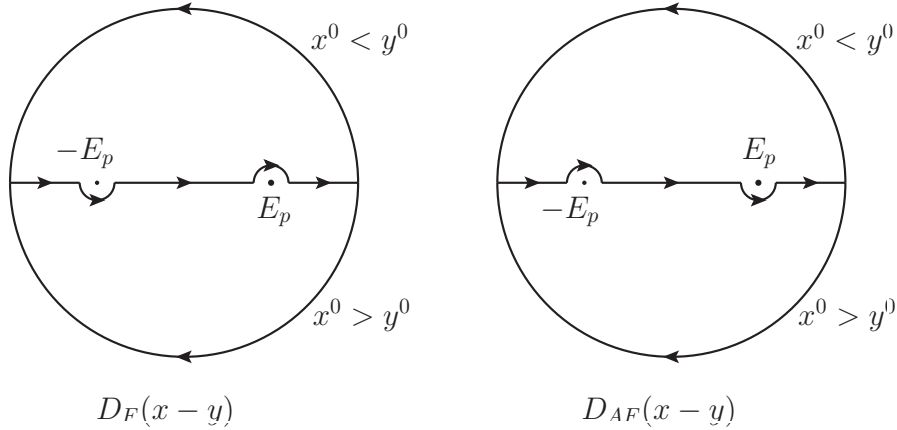


Figure 2: 1.2 Feynmanov i Dysonov propagator

- (177) je integralni oblik Feynmanovog propagatora KG polja (čestice). On se iz (177) dobiva sređivanjem izraza, upotrebom Einsteinove relacije energije, impulsa i mase i zamjenom $2E_{\vec{p}}\eta \rightarrow \eta$. Ta je zamjena moguća zato jer je $E_{\vec{p}}$ pozitivno i zato jer je η

infinitezimalna pozitivna veličina – njen eksplicitan iznos nije bitan.

- (178) se dobiva iz (176) integracijom po dp^0 . Prvi član odgovara polu $p^0 = E_{\vec{p}} - i\eta$ i odgovara integracijskoj konturi koja se zatvara u doljnoj poluravnini. Ta integracijska kontura dozvoljava samo vremena $x^0 > y^0$. Drugi član odgovara polu $p^0 = -E_{\vec{p}} + i\eta$ i odgovara integracijskoj konturi koja se zatvara u gornjoj poluravnini, koja pak dozvoljava samo vremena $x^0 < y^0$. U biti se u (178) infinitezimalni broj η može zanemariti – on je sadržan u θ funkcijama.

- (179) se dobiva iz (178) spomenutim zanemarivanjem infinitezimala η i primjenom izraza za vakuumsku očekivanu vrijednost produkta dvaju skalarnih polja, $D(x - y)$ (160).

- (180) je prikaz Feynmanovog propagatora preko T produkta dvaju skalarnih polja,

$$T(\phi(x)\phi(y)) = \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x). \quad (182)$$

- (181) definira Feynmanov propagator KG čestice u impulsnom prostoru $\tilde{D}_F(p)$.

DZ. Primjenom KG operatora $\partial^2 + m^2$ na (180) odnosno (179) pokažite da je $D_F(x - y)$ također Greenova funkcija KG operatora.

DZ. Polazeći od (180) odnosno (179) kao definicije KG operatora pokažite da se on može prikazati kao (177). Time ćete zaobići infinitezimal η koji se javlja u (178).

- Jednadžbe (177) i (180) su najbitnije jednadžbe u ovom poglavlju. One definiraju Feynmanov propagator za KG polje (česticu) u koordinatnom i impulsnom prostoru. Feynmanov propagator je dio Feynmanovih pravila koja su konačan cilj ovog kolegija.

- Primjetite da se kod Feynmanovog propagatora prvo stvara a onda poništava, i isto vrijedi i za antičesticu, prvo se stvara a onda poništava. to znači da Feynmanov propagator ima svojstvo kauzalnosti.

- Dysonov propagator

- Slučaj d. daje tzv. Dysonov propagator. Provodeći analogne korake kao za Feynmanov propagator nalazimo

$$D_D(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i}{(p^0 - E_{\vec{p}} - i\eta)(p^0 + E_{\vec{p}} + i\eta)} \quad (183)$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i}{(p^2 - m^2 - i\eta)} \quad (184)$$

$$\stackrel{176}{=} - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(E_{\vec{p}}+i\eta)(x^0-y^0)+i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})}}{2(E_{\vec{p}} + i\eta)} \theta(y^0 - x^0)$$

$$- \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(E_{\vec{p}}+i\eta)(y^0-x^0)+i\vec{p} \cdot (\vec{y}-\vec{x})}}{2(E_{\vec{p}} + i\eta)} \theta(x^0 - y^0) \quad (185)$$

$$= -\theta(y^0 - x^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle - \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle \quad (186)$$

$$\stackrel{(177)}{=} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{D}_D(p) . \quad (187)$$

Primjetite da je Dysonov propagator anti-kauzalan - čestice i antičestice se prvo poništavaju a onda stvaraju.

- Zajednički opis sva četiri skalarna propagatora

Sva četiri propagatora koja zadovoljavaju nehomogenu KG jednadžbu za točkasti izvor (171)

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) D_X(x-y) = -\delta(x-y), \quad X = R, A, F, D \quad (188)$$

(R=retardiran, A=avansiran, F=Feynmanov, D=Dysonov) mogu kompaktno zapisati uvodeći dvije faze $s_A, s_B = \pm 1$ (R : $s_A = s_B = 1$, A : $s_A = s_B = -1$, F : $s_A = -s_B = 1$, D : $-s_A = s_B = 1$)

$$\begin{aligned} D_X(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{(p^0 - E_p + i s_A \eta)(p^0 + E_p + i s_A \eta)} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [s_A \theta(s_A(x^0 - y^0)) \frac{\exp[-i E_p(x^0 - y^0) + i \vec{p}(\vec{x} - \vec{y})]}{2E_p} \\ &\quad - s_B \theta(s_B(x^0 - y^0)) \frac{\exp[i E_p(x^0 - y^0) - i \vec{p}(\vec{x} - \vec{y})]}{2E_p}] \\ &\stackrel{R}{=} \langle 0 | \theta(x^0 - y^0) (\phi(x) \phi^*(y) - \phi^*(y) \phi(x)) | 0 \rangle = D_R(x-y) \\ &\stackrel{A}{=} \langle 0 | -\theta(y^0 - x^0) (\phi(x) \phi^*(y) - \phi^*(y) \phi(x)) | 0 \rangle = D_A(x-y) \\ &\stackrel{F}{=} \langle 0 | \theta(x^0 - y^0) \phi(x) \phi^*(y) + \theta(y^0 - x^0) \phi^*(y) \phi(x) | 0 \rangle = D_F(x-y) \\ &\stackrel{D}{=} \langle 0 | -\theta(y^0 - x^0) \phi(x) \phi^*(y) - \theta(x^0 - y^0) \phi^*(y) \phi(x) | 0 \rangle = D_D(x-y) \end{aligned} \quad (189)$$

Tu su $D(x-y) = \langle 0 | \phi(x) \phi^*(y) | 0 \rangle$ Greenove funkcije koje zadovoljavaju slobodnu KG jednadžbu bez izvora,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) D(x-y) = 0 \quad (190)$$

.

Zašto gledamo T uređene produkta polja i komutatore polja

- U prva dva poglavlja ove skripte dan je pregled kvantizacije slobodnih bozonskih i fermionskih polja. U trećem poglavlju opisano je međudjelovanje kvantiziranih polja. U tom poglavlju ćemo ćemo vidjeti da S operator – operator kojim se opisuju procesi

raspršenja u teoriji polja – sadrži samo produkte vremenskih uređenih gustoća Hamiltonijana međudjelovanja.

$$T(\mathcal{H}(x_1)\mathcal{H}(x_1)\dots\mathcal{H}(x_n)), \quad n \in \mathbf{N} . \quad (191)$$

Ti vremenski uređeni produkti su izvor vakuumskih očekivanih vrijednosti vremenski uređenih produkata parova polja, tzv. propagatora,

$$\langle 0|T(\phi_i(x_i)\phi_j(x_j))|0\rangle . \quad (192)$$

Gustoća Hamiltonijana je redovito polinom u poljima. Renormalizabilnost teorije u Dysonovom smislu dozvoljava samo polinome do četvrtog reda u 4 prostorno-vremenske dimenzije.

- Nadalje, pokazuje se da je za Lorentz invarijantnost S -operatora dovoljno (nužni uvjet je vrlo sličan ali je nešto slabiji) da za prostornolike intervale ($(x_i - x_j)^2 < 0$) gustoće Hamiltonijana međudjelovanja komutiraju,

$$[\mathcal{H}(x_i), \mathcal{H}(x_j)] = 0 \quad \text{za} \quad (x_i - x_j)^2 < 0 . \quad (193)$$

Posljedica toga jest da polja sadržana u gustoćama Hamiltonijana moraju ili komutirati ili antikomutirati za prostornolike intervale ($(x_i - x_j)^2 < 0$). Iz svojstava komutatora Hamiltonijana pokazuje se da bozonska polja moraju nužno komutirati, a fermionaka antikomutirati da bi bile ispunjene relacije (193).

To su razlozi zašto je u teoriji polja nužno razmatrati i (anti)komutatore polja vakuumske očekivane vrijednosti vremenski uređenih produkata polja.

1.5 Međudjelovanje čestice s vanjskim poljem

Sada već imamo dovoljno znanja da bismo opisali jedan tip međudjelovanja, međudjelovanje čestice s vanjskim poljem.

Neka je dano Klein gordonovo polje koje međudjeluje s vanjskim klasičnim poljem $j(x)$. Međudjelovanje je opisano jednadžbom

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = j(x), \quad (194)$$

gdje je $j(x)$ poznata funkcija prostora i vremena, koja je različita od nule za konačan period vremena. Ako krenemo od vakuumskog stanja, pitanje je kakva stanja ćemo dobiti nakon perioda međudjelovanja s $j(x)$.

Jednadžba gibanja slijedi iz Lagrangijana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + j(x)\phi(x) . \quad (195)$$

Kako je $j(x)$ postoji samo za konačan period vremena bolje je problem rješavati direktno iz jednadžbe gibanja. Prije nego što se $j(x)$ uključi, polje $\phi(x)$ ima oblik

$$\phi_0(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}) . \quad (196)$$

Ako ne bi bilo izvora, $\phi(x)$ bi zadržao taj oblik. Kada je izvor prisutan, rješenje jednadžbe gibanja se može konstruirati rabeći retardiranu Greenovu funkciju,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_0(x) + i \int d^4y D_R(x-y) j(y) \\ &= \phi_0(x) + i \int d^4y \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \theta(x^0 - y^0) \times (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) j(y) . \end{aligned} \quad (197)$$

Ako dovoljno dugo čekamo tako da su svi izvori j u prošlosti, theta funkcija poprima vrijednost 1 u cijelom području integracije. Tada $\phi(x)$ sadrži samo Fourierove transformate izvora j ,

$$\tilde{j}(p) = \int d^4y e^{ipy} j(y), \quad (198)$$

izračunatih za 4-impulse p na ljusci mase, $p^2 = m^2$. Grupiranjem pozitivno energetskih doprinosa sa $a_{\vec{p}}$ i negativno energetskih doprinosa sa $a_{\vec{p}}^\dagger$ dobijamo

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left\{ \left(a_{\vec{p}} + \frac{i}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \tilde{j}(p) \right) e^{-ipx} + h.c. \right\} . \quad (199)$$

Sada se može izračunati (odnosno pogoditi izraz za Hamiltonijan nakon djelovanja izvora $j(x)$): u izrazu za Hamiltonijan slobodnog polja treba samo zamijeniti $a_{\vec{p}}$ sa $a_{\vec{p}} + \frac{i}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \tilde{j}(p)$:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \tilde{j}(p)^* \right) \left(a_{\vec{p}} + \frac{i}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \tilde{j}(p) \right) \quad (200)$$

Nakon isključenja izvora j energija sistema je

$$\langle 0|H|0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} |\tilde{j}(p)|^2, \quad (201)$$

gdje je $|0\rangle$ vakuumsko stanje slobodne teorije. Ti se rezultati mogu interpretirati preko čestica identificirajući $|\tilde{j}(p)|^2/2E_{\vec{p}}$ sa vjerojatnošću tvorbe čestice u modu p . Tada je ukupan broj čestica koji se stvara jednak

$$\int dN = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} |\tilde{j}(p)|^2 . \quad (202)$$

Primjetite da samo Fourierove komponente koje zadovoljavaju uvijet $p^2 = m^2$ doprinose tvorbi čestica.

Analogni problem je tvorba fotona akceleriranim elektronom (zakočno zračenje).

2 Diracovo polje

Teme:

- Lorentzove transformacije (koordinata) tvore grupu
- Lorentzove transformacija polja
- Reprerentacije Lorentzove grupe
- Diracova jednađba, opis Diracove čestice
- Slobodna rješenja Diracove jednađbe
- Kvantizirano Diracovo polje (Kvantizacija, Kvantizirano polje, Propagator)
- Diskretne simetrije Diracove teorije

- Osnovna postavka koju prate Peskin i Schroeder jest da jednađbe koje opisuju relativistički sistem moraju zadovoljavati Lorentz invarijantne jednađbe gibanja. Do sada smo razmatrali samo skalarne čestice i polja. Nismo razmatrali ponašanje polja pri Lorentzovim transformacijama. To je nužno za nalaženje polja koja ispunjavaju uvjet Lorentz invarijantnosti.

- Nužno je napomenuti da su teme koje se razmatraju u ovom poglavlju povezane i ponekad je teško odvojiti jednu temu od druge. To posebno vrijedi za prve tri teme.

2.1 Lorentzove transformacije koordinata tvore grupu

- Lorentzove transformacije

- Dvije uzastopne Lorentzove transformacije očigledno opet tvore Lorentzovu transformaciju (**grupoidnost**)

$$\begin{aligned}x^\mu &\rightarrow x_1^\mu = (\Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu \\ &\rightarrow x_2^\mu = (\Lambda_2)^\mu{}_\nu x_1^\nu = (\Lambda_2)^\mu{}_\rho (\Lambda_1)^\rho{}_\nu x^\nu = (\Lambda_2 \Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu .\end{aligned}\quad (203)$$

- Postoji **jedinična** Lorentzova **transformacija**, $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \delta^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu .\quad (204)$$

- Za svaku Lorentzovu transformaciju postoji **inverz**

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu = (\Lambda^T)^\mu{}_\nu,\quad (205)$$

što slijedi iz Lorentz invarijantnosti skalarnog produkta 4-vektora,

$$\begin{aligned} x^\mu x_\mu &\rightarrow x'^\mu x'_\mu = \Lambda^\mu_\nu \Lambda_\mu^\rho x^\nu x_\rho \\ &\Rightarrow \Lambda^\mu_\nu \Lambda_\mu^\rho = \delta_\nu^\rho \end{aligned} \quad (206)$$

$$\stackrel{\Lambda^{-1} = \Lambda^T}{\Rightarrow} (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \Lambda_\mu^\rho = \delta_\nu^\rho \quad (207)$$

$$\Rightarrow \Lambda^\mu_\nu \Lambda^\alpha_\beta g_{\mu\alpha} = g_{\nu\beta} \quad (208)$$

$$\Rightarrow \Lambda^\beta_\alpha \Lambda^\rho_\mu g^{\alpha\mu} = g^{\beta\rho}, \quad (209)$$

(u (208) upotrijebili smo $\Lambda_\mu^\rho = g_{\mu\alpha} \Lambda^{\alpha\rho}$ i pomnožili smo (206) s $g_{\rho\beta}$; u (209) upotrijebili smo $\Lambda_\nu^\mu = g^{\mu\alpha} \Lambda_{\nu\alpha}$ i pomnožili (207) s $g^{\beta\nu}$)

- Stoga Lorentzove transformacije tvore grupu.

- Iz jednakosti (206) dodatno slijede moguće vrijednosti $\det \Lambda$,

$$\det \Lambda = \pm 1. \quad (210)$$

- Broj parametara Lorentzove grupe nalazi se iz infinitezimalne transformacije

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) x^\nu, \quad (211)$$

i Lorentz invarijantnosti skalarnog produkta 4-vektora (206),

$$\begin{aligned} x^\mu y_\mu &\rightarrow x'^\mu y'_\mu \\ &\Rightarrow 0 = x_\mu \omega^\mu_\nu y^\nu + \omega^\mu_\nu x^\nu y_\mu = x^\mu y^\nu (\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu}) \\ &\Rightarrow 0 = \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (212)$$

Stoga je $\omega_{\mu\nu}$ antisimetrična 4×4 matrica, i sadrži 6 nezavisnih parametara.

- Formalno grupno množenje možemo zapisati preko umnožaka matrica,

$$\begin{aligned} (\Lambda_1)(\Lambda_2) &= (\Lambda_1 \Lambda_2), \\ (\Lambda^{-1}) &= (\Lambda^T). \end{aligned} \quad (213)$$

- Poincaréove transformacije

- Koordinate se mogu transformirati i **translacijama**

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu. \quad (214)$$

- Očigledno je da postoji **inverzna translacija** $x - a$ i "**jedinična**" translacija $x + 0$, pa i translacije za sebe tvore grupu.

- Kombinacija translacija i Lorentzovih transformacija tvori također grupu, tzv. **proširenu Lorentzovu ili Poincaréovu grupu**. Poincaréove transformacije su

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (215)$$

Umnožak Poincaréovih transformacija (Λ_2, a_2) i (Λ_1, a_1) definiran je sa

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow x_1^\mu = (\Lambda_1)^\mu_\nu x^\nu + a_1^\mu \\ &\rightarrow x_2^\mu = (\Lambda_2)^\mu_\nu x_1^\nu + a_2^\mu = (\Lambda_2)^\mu_\nu (\Lambda_1)^\nu_\rho x^\rho + (\Lambda_2)^\mu_\nu a_1^\nu + a_2^\mu . \end{aligned} \quad (216)$$

- **DZ.** Dokaži da Poincaréove transformacije zadovoljavaju sljedeće parametarske relacije,

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2), \quad (217)$$

$$(1, 0)(\Lambda, a) = (\Lambda, a)(1, 0) = (\Lambda, a), \quad (218)$$

$$(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) . \quad (219)$$

tj. da tvore grupu. Grupa je 10-parametarska (6 parametara od Lorentzovih transformacija i 4 od translacija). Nadalje Poincaréova grupa je semidirektni produkt grupe translacija i grupe Lorentzovih transformacija. Da bismo to pokazali, definirajmo semidirektni produkt grupa N i H : $G = N \rtimes H$ je semidirektni produkt grupa N i H ako je N normalna podgrupa G . Drugim riječima $gNg^{-1} = N$ za svaki $g \in G$. Provjerimo sada da li je grupa translacija normalna podgrupa Poincaréovih transformacija:

$$(\Lambda, a')(1, a)(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a') = (1, \Lambda a), \quad (220)$$

dakle translacija, dakle $(\Lambda, a')T(\Lambda, a')^{-1} = T$, za svaki $(\Lambda, a') \in P$ gdje je $T = \{(1, a)\}$ grupa translacija, a $P = (\Lambda, a)$ grupa Poincaréovih transformacija. Nadalje, kombinacija

$$(\Lambda', a)(\Lambda, 0)(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a') = (\Lambda'\Lambda\Lambda'^{-1}, a - \Lambda'\Lambda\Lambda'^{-1}a) \quad (221)$$

sadrži translaciju, dakle nije Lorentzova transformacija $(\Lambda, 0)$. Dakle, Lorentzove transformacije nisu normalna podgrupa Poincaréove grupe. Stoga je grupa translacija T normalna podgrupa Poincaréovih transformacija P , ali grupa Lorentzovih transformacija L nije normalna podgrupa Poincaréovih transformacija P , pa vrijedi $P = T \rtimes L$: grupa Poincaréovih transformacija P je seminirektan produkt grupe translacija T i grupe Lorentzovih transformacija L .

- **Podgrupe Poincaréove grupe $\{(\Lambda, a)\}$:**

1. $\{(\Lambda, 0)\}$: **homogena Lorentzova grupa :**

$$* (\bar{\Lambda}, 0)(\Lambda, 0) = (\bar{\Lambda}\Lambda, 0),$$

$$* (1, 0) \in \{(\Lambda, 0)\},$$

$$* (\Lambda^{-1}, 0) \text{ je inverz. } \quad \text{Q.E.D.}$$

2. $\{(\Lambda, a), \det \Lambda = 1\}$: **svojstvena Poincaréova grupa :**

$$* \det \bar{\Lambda}\Lambda = \underbrace{\det \bar{\Lambda}}_{=1} \underbrace{\det \Lambda}_{=1} = 1,$$

$$* \det 1 = 1,$$

$$* \det \Lambda^{-1} = \underbrace{(\det \Lambda)^{-1}}_{=1} = 1. \quad \text{Q.E.D.}$$

Posebno $\{(\Lambda, 0), \det \Lambda = 1\}$ je tzv. **svojtvena Lorentzova grupa**.

3. $\{(\Lambda, a), \Lambda^0_0 \geq 1\}$: **ortokrone Poincaréove transf.**

* grupoidnost

$$(208)_{\nu=0, \beta=0} \equiv (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^i_0)^2 = 1, \quad (222)$$

$$(209)^{\beta=0, \rho=0} \equiv (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^0_i)^2 = 1, \quad (223)$$

$$(222), (223) \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 = 1 + (\Lambda^i_0)^2 = 1 + (\Lambda^0_i)^2, \quad (224)$$

$$(217) \Rightarrow (\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 = \bar{\Lambda}^0_0 \Lambda^0_0 + \sum_i \bar{\Lambda}^0_i \Lambda^i_0$$

$$\geq \underbrace{\bar{\Lambda}^0_0}_{\cosh \bar{\omega}} \underbrace{\Lambda^0_0}_{\cosh \omega} - \underbrace{\left((\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1\right)^{1/2}}_{\sinh \bar{\omega}} \underbrace{\left((\Lambda^0_0)^2 - 1\right)^{1/2}}_{\sinh \omega} \geq 1. \quad \text{Q.E.D.} \quad (225)$$

U prvoj od (225) nejednakosti upotrebljena je nejednakost trokuta (Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky nejednakost),

$$\left| \sum_i \bar{\Lambda}^0_i \Lambda^i_0 \right| \leq \left[\left(\sum_i (\bar{\Lambda}^0_i)^2 \right) \left(\sum_i (\Lambda^0_i)^2 \right) \right]^{1/2} \stackrel{(222,223)}{=} \left((\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1 \right)^{1/2} \left((\Lambda^0_0)^2 - 1 \right)^{1/2} \quad (226)$$

Identifikacija članova sa $\cosh \omega$ i $\sinh \omega$ je očigledna.

$$* (1, 0) : \quad \Lambda^0_0 = 1 \geq 1,$$

$$* (\Lambda, a)^{-1} : \quad (\Lambda, a)(\Lambda, a)^{-1} = (1, 0) \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})^0_0 \geq 1. \quad \text{Q.E.D. (grupnost)}$$

Prostorna inverzija i vremenski obrat

$$\{(\Lambda, a)\} \equiv L = L_{11} \cup (L_{11} \otimes \mathcal{P}) \cup (L_{11} \otimes \mathcal{T}) \cup (L_{11} \otimes \mathcal{PT}), \quad (227)$$

$$L_{11} \equiv \{(\Lambda, a), \det \Lambda = 1, \Lambda^0_0 \geq 1\}, \quad (228)$$

$$\mathcal{P} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (229)$$

$$\mathcal{T} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (230)$$

Grupne relacije se prenose na transformacije nad zrakama $\{\mathcal{R}\}$ i nad stanjima u Hilbertovom prostoru $\{\Psi\}$

DZ. Provjerite grupnost ortokronih Lorentzovih transformacija.

Table 1: Grupne relacije na $x \in \mathcal{R}$ i Hilbertovom prostoru

$\{x\}$	$\{\mathcal{R}\}$	$\{\Psi \in \mathcal{R}\}$
$x'' = (\bar{\Lambda}\Lambda)x + (\bar{\Lambda}a + \bar{a})$	$T(\bar{\Lambda}, \bar{a})T(\Lambda, a)$	$U(\bar{\Lambda}, \bar{a})U(\Lambda, a)$
$(\bar{\Lambda}, \bar{a})(\Lambda, a) = (\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a})$	$= T(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a})$	$= U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a})$
$(1, 0)$	$T(1, 0)$	$U(1, 0) = 1$
$(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$	$T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$	$U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$
$\{(\Lambda, 0)\}$	$\{T(\Lambda, 0)\}$	$\{U(\Lambda, 0)\}$
$\{(\Lambda, a), \det \Lambda = 1\}$	$\{T(\Lambda, a), \det \Lambda = 1\}$	$\{U(\Lambda, a), \det \Lambda = 1\}$
$\{(\Lambda, a), \Lambda_0^0 \geq 1\}$	$\{T(\Lambda, a), \Lambda_0^0 \geq 1\}$	$\{U(\Lambda, a), \Lambda_0^0 \geq 1\}$
$(\mathcal{P}, 0)$	$T(\mathcal{P}, 0)$	$U(\mathcal{P}, 0) \equiv P$
$(\mathcal{T}, 0)$	$T(\mathcal{T}, 0)$	$U(\mathcal{T}, 0) \equiv T$

2.2 Lorentzove transformacije polja

- Lorentz kovarijantnost jednadžbi

- Za dano polje ϕ ili sistem polja ϕ_i koji zadovoljava jednadžbu

$$\mathcal{D}_{ij}\phi_j = 0, \quad (231)$$

gdje je \mathcal{D}_{ij} diferencijalni operator koji i miješa polja (indeksi "i") kaže se da je Lorentz kovarijantan ako jednadžba ima isti oblik nakon Lorentzove transformacije polja i koordinata ($x \rightarrow x' = \Lambda x$, $\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x')$), ili samo polja ($\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x)$):

$$\begin{aligned} A. \quad & \mathcal{D}_{ij}(x, \partial)\phi_j(x) = 0 \rightarrow \mathcal{D}_{ij}(x', \partial')\phi'_j(x') = 0, \\ B. \quad & \mathcal{D}_{ij}(x, \partial)\phi_j(x) = 0 \rightarrow \mathcal{D}_{ij}(x, \partial)\phi'_j(x) = 0, \end{aligned} \quad (232)$$

Pristup B. odgovara Lorentzovoj transformaciji polja u Hilbertovom prostoru, kada Lorentzova transformacija transformira samo operatore stvaranja i poništenja od kojih je kvantizirano polje izgrađeno,

$$a_{\vec{p}}^s \rightarrow U(\Lambda)a_{\vec{p}}^s U^{-1}(\Lambda). \quad (233)$$

$U(\Lambda)$ je unitarni operator koji pripada reprezentaciji Lorentzovih transformacija u Hilbertovom prostoru. Pri toj transformaciji se koordinata x ne mijenja. Samo se polje Lorentz transformira.

- **Lagrangijanski formalizam**

- Lagrangijan je po definiciji Lorentzov skalar. Akcija je Lorentz invarijantna tj. vrijedi $\delta S = 0$ za varijacije na Lorentzove transformacije. Iz toga slijedi da su jednadžbe gibanja definirane u Lagrangijanskom formalizmu Lorentz kovarijantne.

□ **Lorentzova transformacija KG polja i Lorentz invarijantnost (slobodne) KG jednadžbe**

- **Definicija Lorentzove transformacije skalarnog polja** – skalarno polje se definira kao jednokomponentno polje koje se pri općoj Lorentzovoj transformaciji,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (234)$$

transformira na sljedeći način (vidi (232) A. i B.):

$$\begin{aligned} A. \quad & \phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x), \\ B. \quad & \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x). \end{aligned} \quad (235)$$

- **Lorentzova transformacija KG Lagrangijana.** Lagrangijan je po definiciji skalar na Lorentzove transformacije. Provjerimo da li se Lagrangijan realnog skalarnog polja (65),

$$(65) \equiv \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2,$$

uz definiciju skalarnog polja (235) ponaša kao skalar. Prema A.

$$x \rightarrow x' = \Lambda x, \quad \partial \rightarrow \partial' = \Lambda \partial, \quad (236)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x), \quad (237)$$

↓

$$\frac{1}{2}m^2 \phi^2(x) \rightarrow \frac{1}{2}m^2 \phi'^2(x') = \frac{1}{2}m^2 \phi(x)^2 \quad (238)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^2(x))^2 & \rightarrow \frac{1}{2}(\partial'_\mu \phi'^2(x'))^2 \\ & = \frac{1}{2}\Lambda_\mu^\alpha \partial_\alpha \phi(x) \Lambda^\mu_\beta \partial^\beta \phi(x) \\ & = \frac{1}{2}\partial_\alpha \phi(x) \partial^\alpha \phi(x) \end{aligned} \quad (239)$$

↓

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x). \quad (240)$$

U (239) rabili smo

$$\Lambda_\mu^\alpha \Lambda^\mu_\beta = \delta^\alpha_\beta, \quad (241)$$

koja slijedi iz Lorentz invarijantnosti skalarnog produkta dvaju četverovektora, npr. $x_\mu x^\mu \equiv x^2 \equiv x \cdot x$ (Lorentz invarijantnost tog skalarnog produkta glasi $x^2 = x'^2$).

DZ. Dokaži (241) iz Lorentz invarijantnosti x^2 .

DZ. Dokaži Lorentz invarijantnost Lagrangijana realnog KG polja rabeći transformaciju B. Drugim riječima morate dobiti

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x) . \quad (242)$$

Primjetite da dok u polaznom Lagrangijanu imate derivacije $\partial_\mu^x \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ i polja $\phi(x)$, u Lagrangijanu $\mathcal{L}'(x)$ imate iste derivacije ali su polja $\phi'(x)$, a u Lagrangijanu $\mathcal{L}(\Lambda^{-1}x)$ imate polja $\phi(\Lambda^{-1}(x))$ i derivacije $\partial_\mu^{\Lambda^{-1}x} \equiv \frac{\partial}{\partial(\Lambda^{-1}x)^\mu} = (\Lambda^{-1}\partial^x)_\mu$.

- Lorentz kovarijantnost (slobodne) KG jednadžbe

DZ. Rabeći za KG polje A. verziju transformacije jednadžbi gibanja (232) pokaži da je KG jednadžba Lorentz kovarijantna.

- Pokažimo Lorentz kovarijantnost KG jednadžbe rabeći B. verziju transformacije jednadžbe gibanja,

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_\mu^x \partial^{x\mu} + m^2)\phi(x), \\ \xrightarrow{B.} 0 &= (\partial_\mu^x \partial^{x\mu} + m^2)\phi'(x), \\ 0 &\stackrel{(235),(234)}{=} (\partial_\mu^{\Lambda^{-1}x} \partial^{\Lambda^{-1}x\mu} + m^2)\phi(\Lambda^{-1}x) . \end{aligned} \quad (243)$$

U zadnjem retku (243) smo istovremeno upotrijebili izraz za B. transformirano KG polje (235) i iskoristili Lorentz invarijantnost skalarnog produkta derivacija $\partial_\mu \partial^\mu$. Rezultat u zadnjem retku potvrđuje Lorentz kovarijantnost KG jednadžbe.

□ Lorentzova transformacija vektorskog polja

-Transformacija vektorskog polja

- Vektorsko polje je sljedeće po kompliciranosti na Lorentzove transformacije. Vektorsko polje ima 4 komponente koje su označene Lorentzovim indeksima μ (npr. $j^\mu(x)$, $A^\mu(x)$ itd.). Evo kako se kako se definira transformacija vektorskog polja $V^\mu(x)$,

$$\begin{aligned} A. \quad V^\mu(x) &\rightarrow V'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(x), \\ B. \quad V^\mu(x) &\rightarrow V'^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(\Lambda^{-1}x) . \end{aligned} \quad (244)$$

- Primjetite da kada se transformira i polje i koordinata da polje transformira ista Lorentzova transformacija koja transformira i koordinatu (slučaj A.). Ako se transformira samo

polje (odgovara transformaciji u Hilbertovom prostoru) tada se i koordinata transformira kao kod skalarnog polja – inverznom Lorentzovom transformacijom (slučaj B.).

Lorentz invarijantni Lagrangijani s vektorskim poljima

- Lorentz invarijantni Lagrangijani sa poljima (244) izgrađuju se od članova kojima su svi Lorentzovi indeksi kontrahirani, npr. Lagrangijan elektromagnetskog polja

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Maxwell} &= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\end{aligned}\tag{245}$$

ili Lagrangijan za masivno vektorsko polje,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M &= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2}m^2 V_\mu V^\mu, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu.\end{aligned}\tag{246}$$

- **Napomena:** Transformacija bezmasenih vektorskih polja ima svojih posebnosti. Može se pokazati da ona nisu prava vektorska polja, tj. da ne zadovoljavaju točno transformacijska pravila (244), već da se pri Lorentzovoj transformaciji javlja još jedan dodatni član koji odgovara (je proporcionalan) derivaciji skalarnog polja ($R(x) = \lambda\phi(x)$),

$$\begin{aligned}A. \quad V^\mu(x) &\rightarrow V'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu(V^\nu(x) + \partial^\mu R(x)), \\ B. \quad V^\mu(x) &\rightarrow V'^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(\Lambda^{-1}x) + \partial^\mu R(\Lambda^{-1}x).\end{aligned}\tag{247}$$

Drugim riječima pri Lorentzovoj transformaciji se mijenja i baždarenje (gauge) bezmasenog polja. Ipak, Lagrangijan (245) ostaje invarijantan pri Lorentzovoj transformaciji.

DZ. Pokažite da su gornji Lagrangijani Lorentz invarijantni. Posebno to provjerite za bezmaseno vektorsko polje koje zadovoljava Lorentzovu transformaciju (247).

Primjeri jednadžbi s vektorskim poljima

- Iz tih Lagrangijana slijede Euler-Lagrangeove jednadžbe. Iz (245) se dobivaju dvije od četiri Maxwellove jednadžbe (koje se inače javljaju uz naboj i struju, ali ovdje se radi o jednadžbama u slobodnom prostoru u kojem je gustoća naboja i gustoća struje jednaka nuli)

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad \text{ili} \quad \partial^2 A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0,\tag{248}$$

a iz (246) slijedi

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = m^2 V_\nu.\tag{249}$$

- Te su jednadžbe Lorentz invarijantne.

- **DZ.** Izvedite jednađbe (248) i (249).

- **DZ.** Pokažite eksplicite da su jednađbe (248) i (246) Lorentz invarijantne.

□ Opća Lorentz-transformacija polja

- Opća Lorentzova transformacija polja

- S primjerom vektorskog polja smo u principu ilustrirali kako se mogu konstruirati Lorentz invarijantne jednađbe tenzorskih polja – polja koje imaju samo Lorentzove indekse (nula indeksa - skalarno polje, jedan indeks - vektorsko polje, dva indeksa - tenzorsko polje drugog reda itd.). Međutim pored takvih polja postoje i druga. Pitanje je kako ih naći, a to pitanje je povezano s nalaženjem svih mogućih Lorentzovih transformacija polja.

- Može se pokazati da se Lorentzova transformacija bilo kojeg multipleta polja Φ_a s n polja može opisati linearnom transformacijom:

$$\begin{aligned} A. \quad \Phi_a(x) &\rightarrow \Phi'_a(x') = M_{ab}(\Lambda)\Phi_b(x), \\ B. \quad \Phi_a(x) &\rightarrow \Phi'_a(x) = M_{ab}(\Lambda)\Phi_b(\Lambda^{-1}x) \end{aligned} \quad (250)$$

(Opet B. slučaj odgovara transformaciji polja u Hilbertovom prostoru.).

- Grupnost Lorentzovih transformacija

- Na primjeru koordinata pokazali smo da Lorentzove transformacije tvore grupu. "Koordinatne" Lorentzove transformacije su samo jedna od mogućih reprezentacija Lorentzove grupe. Lorentzove transformacije polja su također moguće reprezentacije Lorentzove grupe. Svaka reprezentacija Lorentzove grupe mora zadovoljavati aksiome grupe,

$$\begin{aligned} A. \quad \Phi_a(x) &\rightarrow M(\Lambda')_{ab}M(\Lambda'')_{bc}\Phi_c(x), = M(\Lambda'\Lambda'')_{ac}\Phi_c(x) \\ B. \quad \Phi_a(x) &\rightarrow M(\Lambda')_{ab}M(\Lambda'')_{bc}\Phi_c((\Lambda'')^{-1}(\Lambda')^{-1}x) \\ &= M(\Lambda'\Lambda'')_{ac}\Phi_c((\Lambda'\Lambda'')^{-1}x) . \end{aligned} \quad (251)$$

- Primjetite da svaka nova transformacija polja napada indeks polja - dakle najunutarniji indeks. Zato su transformacije naizgled u suprotnom poretku. Nasuprot tome, transformacija koordinate napada naj-vanjski indeks - indeks koji je postignut zadnjom Lorentzovom transformacijom. Zbog toga je prirodno da koordinate idu sa Λ^{-1} da bi se postiglo isto grupno množenje parametarskih matrica Λ i za koordinate i za polja.

- Nalaženje matrica M koje zadovoljavaju (251) ekvivalentno je zahtjevu nalaženja mogućih reprezentacija Lorentzove grupe.

2.3 Algebra i reprezentacije Lorentzove grupe

- Algebru Lorentzove grupe ćemo naći preko analogije algebre sa rotacijskom grupom.

□ **Algebra 3-D rotacijske grupe $SO(3)$**

- $SO(3)$ grupa spada u tzv. **Lieve grupe** (vidi Dodatak 5.). (Unitarne) transformacije pridružene grupnim elementima tih grupa se mogu označiti sa skupom kontinuiranih parametara α_i . **Množenje** transformacija,

$$U(g(\alpha))U(g(\beta)) = U(g(\gamma(\alpha, \beta))), \quad (252)$$

ima svojstvo da su parametri γ koji se dobijaju množenjem **analitičke funkcije** parametara α i β . Grupni elementi u blizini jedinice mogu se prikazati preko tzv. **generatora** (t_a) i infinitezimalnih parametara α_i ,

$$U(g(\alpha)) \rightarrow \mathbf{1} + i\alpha_a t_a . \quad (253)$$

Broj nezavisnih komutirajućih linearnih kombinacija generatora zove se **rang grupe**.

- Dijelovi $SO(3)$ i $SU(2)$ grupa povezanih s jedinicom su **ekvivalentne**. To znači da su im **algebre iste**, pa možemo studirati algebru $SU(2)$ grupe.

- $SU(2)$ grupa ima **reprezentacije** dimenzionalnosti za sve n gdje je $n \in \mathbf{N}$. Dimenzionalnost je povezana sa spinskim kvantnim brojem relacijom $n = 2s + 1$.

- Najvažnija je **fundamentalna reprezentacija** dimenzije 2 i spina $s = 1/2$. U njoj su grupni elementi prikazani unitarnim matricama

$$U = e^{-i\theta^i \sigma^i / 2} . \quad (254)$$

- Ponašanje **unitarnih transformacija** grupnih elemenata u blizini jedinice (vidi (1520)) definira **komutacijske relacije Lieve grupe**. Za $SO(3)$ odnosno $SU(2)$ infinitezimalne transformacije su

$$1 + i\theta^i J^i, \quad (255)$$

(J_i su generatori $SO(3)$ odnosno $SU(2)$ transformacija, tzv. operatori kutne količine gibanja), a **komutacijske relacije** glase

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k, \quad (256)$$

gdje je ϵ^{ijk} potpuno antisimetričan tenzor.

- "**eksponencijacijom**" transformacija grupnih elemenata u blizini jedinice (255) dobijaju se **konačne transformacije** koje su kontinuirano povezane s jedinicom,

$$e^{i\theta^i J^i} . \quad (257)$$

One predstavljaju **konačne rotacije** u 3-D prostoru.

- U **fundamentalnoj reprezentaciji** $s = 1/2$, J^i operatori se mogu prikazati σ^i matricama (vidi (1612) i (1613)),

$$J^i \rightarrow \frac{\sigma^i}{2} . \quad (258)$$

Odatle eksponencijacijom (vidi (257)) slijedi izraz za prikaz bilo kojeg konačnog grupnog elementa u fundamentalnoj reprezentaciji (254).

DZ. Dokažite (258) rabeći izraze za operatore J^i koje znate iz kvantne mehanike za opću reprezentaciju $|jm\rangle$,

$$(J_1^{(j)} \pm iJ_2^{(j)})_{m'm} = (J_{23}^{(j)} \pm iJ_{31}^{(j)})_{m'm} = \delta_{m'm \pm 1} \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}, \quad (259)$$

$$(J_3^{(j)})_{m'm} = (J_{12}^{(j)})_{m'm} = m\delta_{m'm}, \quad (260)$$

gdje $m = -j, \dots, j$.

- Osim **matričnih reprezentacija** J^i operatora postoji i njihov **diferencijalni prikaz**, također dobro poznat iz QM,

$$\vec{J} = \vec{x} \times \vec{p} = \vec{x} \times (-i\nabla), \quad (261)$$

zapisan u **vektorskom obliku**, odnosno **tenzorski**

$$J^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (-i)(x^j \nabla^k - x^k \nabla^j) = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} J^{jk}, \quad (262)$$

gdje je

$$J^{ij} = (-i)(x^i \nabla^j - x^j \nabla^i) = i(x^i \partial^j - x^j \partial^i) \quad (263)$$

antisimetričan tenzor. Ova reprezentacija je podesna za prijelaz na Lorentzove transformacije koje rotacije sadrže kao svoju podgrupu.

DZ. a. Nađite komutacijske relacije za operatore J^{ij} ($[J^{ij}, J^{kl}]$).

b. Rabeći taj rezultat provjerite da li operatori J^i zadovoljavaju komutacijske relacije $SO(3)$ grupe (256).

□ Generatori Lorentzovih transformacija

- Diferencijalni prikaz generatora Lorentzovih transformacija

- Generatori Lorentzovih transformacija dobijaju se prirodno generalizacijom antisimetričnih operatora generatora rotacija J^{ij} na 4 prostor,

$$J^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu). \quad (264)$$

- Ti operatori zadovoljavaju sljedeće komutacijske relacije,

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}), \quad (265)$$

tzv. Lorentzovu algebru.

DZ. Dokaži da operatori $J^{\mu\nu}$ zadovoljavaju komutacijske relacije (265).

- Svaka druga reprezentacija Lorentzove algebre mora zadovoljavati iste komutacijske relacije, uključivši i matricne itd. reprezentacije.

- Diferencijalni prikaz generatora Poincaréove algebre

- Prije nego nastavimo sa drugim reprezentacijama Lorentzove algebre, razmotrimo **Poincaréovu algebru**, koja obuhvaća generatore Lorentzove algebre kao i generatore translacija u prostoru i vremenu. **Generatori translacija u prostoru i vremenu** su operator energije i impulsa čiji diferencijalni oblik slijedi iz **QM supstitucije**,

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \rightarrow (i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla) = i\partial^\mu \equiv P^\mu . \quad (266)$$

DZ. Pokažite da operator

$$e^{-ia_\mu P^\mu} \quad (267)$$

transformira 4-koordinatu x^μ u transliranu koordinatu $x^\mu + a^\mu$. $e^{-ia_\mu P^\mu}$ je stoga **operator konačne translacije koordinata**.

Primjetite da transformacija (267) odgovara **aktivnoj transformaciji koordinata** – ne mijenja se položaj sustava promatranja za a^μ (**pasivna transformacija**) već se mijenja koordinata za a^μ u jednom sustavu – efekti pasivne i aktivne transformacije su suprotni. Nadalje napomenimo da će **u svakoj reprezentaciji** generatora translacija operator konačne translacije imati **isti oblik**.

- **Poincaréovu algebru** čine svi mogući komutatori generatora $J^{\mu\nu}$ i P^μ .

$$\begin{aligned} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}), \\ [J^{\mu\nu}, P^\rho] &= i(-g^{\mu\rho}P^\nu + g^{\nu\rho}P^\mu), \\ [P^\mu, P^\nu] &= 0 . \end{aligned} \quad (268)$$

DZ. Dokaži Poincaréovu algebru rabeći diferencijalni oblik generatora Poincaréovih transformacija $J^{\mu\nu}$ i P^μ .

- Kao i kod Lorentzovih transformacija Poincaréova algebra (268) mora biti zadovoljena za bilo koju reprezentaciju generatora Poincaréova grupe.

- Matrična (tenzorska) reprezentacija Lorentzovih generatora

- Infinitezimalna Lorentzova transformacija bilo kojeg vektora V^μ , može se prikazati preko skupa matrica $\mathcal{J}^{\mu\nu}$

$$V^\alpha \rightarrow V'^\alpha = (g^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\beta)V^\beta$$

$$\begin{aligned}
&= (g^\alpha_\beta - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha_\beta)V^\beta \\
&\equiv V^\alpha + \delta V^\alpha,
\end{aligned} \tag{269}$$

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i(g^\mu_\alpha g^\nu_\beta - g^\mu_\beta g^\nu_\alpha). \tag{270}$$

Matrice $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ zadovoljavaju komutacijske relacije (265).

DZ. Dokaži da matrice $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ zadovoljavaju Lorentzovu algebru.

- Izborom antisimetrične matrice parametara definira se Lorentzova transformacija. Tako npr. izbor $\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$ daje infinitezimalnu rotaciju oko z osi

$$\delta V^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mu_\nu V^\nu, \tag{271}$$

dok izbor $\omega_{01} = -\omega_{10} = \eta$ daje infinitezimalni potisak (boost) u x smjeru

$$\delta V^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mu_\nu V^\nu. \tag{272}$$

I opet je riječ o aktivnoj transformaciji koordinata koja zakreće 4-vektor u prostoru odnosno potiskuje ga u prostoru, a ne o pasivnoj transformaciji koja dolazi zbog promjene smjerova osi koordinatnog sustava. Efekt je upravo suprotan od onog koji se dobiva pasivnom transformacijom koordinata (koja se rabi u Weinbergu).

DZ. Dokaži da izbor $\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$ vodi na izraz (271) za δV^μ . Nađi također izraz za konačnu transformaciju eksponencirajući infinitezimalnu transformaciju i usporedi je sa izrazom za konačnu rotaciju u 3-D prostoru. Čemu odgovara parametar θ ?

DZ. Dokaži da izbor $\omega_{01} = -\omega_{10} = \eta$ daje za δV^μ izraz (272). Nađi također izraz za konačnu transformaciju. Djelujući s njom na 4-vektor položaja x , pokaži da ona odgovara standardnom izrazu za potisak (boost) u x smjeru koji ste radili na općoj fizici. Pri tome identificirajte $\text{ch}\eta = \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\text{sh}\eta = \beta\gamma$, $\beta = v/c$.

η je parametar koji se zove **rapiditet**. Produkt dvaju boostova u istom smjeru koji odgovaraju rapiditetima η_1 i η_2 jednak je boostu koji odgovara rapiditetu $\eta_1 + \eta_2$, drugim riječima taj parametar je aditivan za boostove u istom smjeru.

DZ. Pokažite da se dvije uzastopne boost transformacije u istom smjeru koje odgovaraju rapiditetima η_1 i η_2 mogu prikazati kao jedna čiji je rapiditet jednak zbroju rapiditeta $\eta_1 + \eta_2$.

- **Operatorska reprezentacija Poincaréovih generatora u Hilbertovom prostoru**

Izvod Poincaréove algebre u Hilbertovom prostoru dan je u Dodatku 7. Uz identifikaciju operatora (1555), (1556), (1557) i $H = P^0$, iz zahtjeva da komutacijske relacije zadovoljavaju jednakosti (1558)-(1564) i iz zahtjeva da faza transliranog jednočestičnog stanja ima oblik $e^{iEt - \vec{p}\vec{x}}$ slijedi da je opći oblik operatora Poincaréova grupe u Hilbertovom prostoru

$$e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + ia_{\mu}P^{\mu}} . \quad (273)$$

DZ. Pročitajte Dodatak 7 i prođite kroz izvode.

Vratimo se reprezentacijama koje smo analizirali gore.

- **Opća konačna Lorentzova transformacija** slijedi eksponencijacijom (270) u bilo kojoj matričnoj reprezentaciji $J^{\mu\nu}$ operatora,

$$e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}} . \quad (274)$$

- **Napomena :** Generatori Lorentzovih transformacija ne djeluju na isti način. Djelovanje diferencijalnog oblika generatora na 4-vektor odgovara množenju 4-vektora sa matričnim oblikom generatora s desna. Da biste to detaljnije shvatili riješite sljedeći zadatak:

DZ. a. Pokažite da vrijedi sljedeća relacija

$$J^{\mu\nu}x^{\alpha} = -(\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta}x^{\beta} = x^{\beta}(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\beta}^{\alpha} . \quad (275)$$

Tu je $J^{\mu\nu}$ diferencijalni oblik generatora Lorentzovih transformacija (LT) a $(\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta}$ pripadni generator u matričnoj reprezentaciji.

b. Pokažite da vrijedi sljedeća relacija

$$\begin{aligned} J^{\mu\nu}J^{\rho\sigma}x^{\alpha} &= (-\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\alpha}_{\beta}(J^{\mu\nu}x^{\beta}) \\ &= (-\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\alpha}_{\beta}(-\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\beta}_{\gamma}x^{\gamma} \\ &= x^{\gamma}(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\gamma}^{\beta}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})_{\beta}^{\alpha} . \end{aligned} \quad (276)$$

Zbog tog relativno "transponiranog" djelovanja dvaju reprezentacija na četverovektore uprkos relativnom predznaku u (275) obje reprezentacije zadovoljavaju istu tj. Lorentzovu algebru.

c. Rabeći rezultate (275) i (276) pokažite da vrijedi

$$e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}}x^{\mu} = (e^{+\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathcal{J}^{\alpha\beta}})^{\mu}_{\nu}x^{\nu} = x^{\nu}(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathcal{J}^{\alpha\beta}})_{\nu}^{\mu} . \quad (277)$$

Primjetite da je bitna razlika između diferencijalnog operatora i matričnog operatora da diferencijalni operator uvijek djeluje na najunutarniji indeks – konkretno uvijek osnovnu

veličinu x , dok matični operator djeluje uvijek na najvanjskiji indeks – odnosno na transformiranu veličinu (x' , x'' itd.).

- Kako je transformacija (274) definirana za matične reprezentacije i kao množenje s lijeva, prema (277) njoj odgovara transformacija suprotnog predznaka u diferencijalnoj reprezentaciji,

$$e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}} . \quad (278)$$

- **Opća konačna Poincaréova transformacija** dobija se kombiniranjem tih dvaju izraza ili eksponencijacijom infinitezimalne Poincaréove transformacije (napisane preko diferencijalnih operatora), $1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - ia_{\mu}P^{\mu}$,

$$e^{+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - ia_{\mu}P^{\mu}} . \quad (279)$$

Naglasimo da je riječ o **aktivnoj transformaciji koja mijenja i polja i koordinate**, a ne o **pasivnoj (takva se koristi se u Weinbergu – vidi (273) i (1535) koja mijenja sustave i pri tome gleda promjenu (opisa) danih koordinata i polja)**. Opća pasivna Poincaréova transformacija je inverz aktivnoj Poincaréovoj transformaciji,

$$e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + ia_{\mu}P^{\mu}} . \quad (280)$$

- **Spinorna reprezentacija Lorentzove algebre**

- **Spinornu reprezentaciju Lorentzove algebre** uveo je prvo matematičar Cartan 1913. U fiziku ju je neovisno uveo Dirac 1928. Ovdje slijedimo **Cartanov pristup**. **Trik** je u uvođenju $n \times n$ matrica koje zadovoljavaju tzv. **Cliffordovu algebru**,

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \times \mathbf{1}_{n \times n}, \quad (281)$$

gdje je $\{, \}$ oznaka za antikomutator ($\{A, B\} = AB + BA$). (Ubuduće jediničnu matricu nećemo pisati osim ako to neće biti potrebno).

- S tako definiranim matricama γ^{μ} mogu se odmah napisati matrice koje zadovoljavaju Lorentzovu algebru,

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] . \quad (282)$$

DZ. Dokažite da za bilo koje matrice koje zadovoljavaju Cliffordovu algebru, (281) matrice $S^{\mu\nu}$ definirane u (282) zadovoljavaju Lorentzovu algebru. Naputak: dokažite prvo relaciju

$$[S^{\mu\nu}, \gamma^{\alpha}] = i(\gamma^{\mu}g^{\nu\alpha} - \gamma^{\nu}g^{\mu\alpha}). \quad (283)$$

- Relacije (281) i (282) vrijede i za Minkowski i za euklidsku metriku. Npr. u 3-D euklidskom prostoru možemo staviti

$$\gamma^j \equiv i\sigma^j, \quad (284)$$

gdje su σ^j Paulijeve matrice, odakle slijedi

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = -2\delta^{ij}. \quad (285)$$

Matrice koje reprezentiraju Lorentzovu algebru su

$$S^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\sigma^k. \quad (286)$$

DZ. Za matrice (284) dokaži relacije (285) i (286).

□ Diracove matrice, Diracova algebra

- Diracove matrice

- Jednadžba (284) definira reprezentaciju γ^μ matrica u 3-D prostoru

- Razmotrimo sada neka **opća svojstva** γ^μ **matrica**:

a. **Trag** γ^μ **matrica jednak je nuli.**

Zbog (281) i cikličnosti traga imamo (nema sumacije po μ , $\mu \neq \nu$)

$$\begin{aligned} g^{\mu\mu} \text{Tr} \gamma^\nu &\stackrel{(281)}{=} \text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\mu \gamma^\nu \stackrel{(281)}{=} -\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu \stackrel{\text{cikl}}{=} -\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\mu \gamma^\nu = 0. \\ &\Rightarrow \text{Tr} \gamma^\nu = 0 \end{aligned} \quad (287)$$

b. **Svojevredne vrijednosti** γ^0 matrice su ± 1 a svojevredne vrijednosti γ^i matrica su $\pm i$.
Zbog (281),

$$\gamma^0 \gamma^0 = \mathbf{1}, \quad (288)$$

$$\gamma^i \gamma^i = -\mathbf{1}. \quad (289)$$

Dijagonalizacijom γ^0 odnosno pojedine od γ^i matrica slijedi gornja tvrdnja.

c. **Dimenzionalnost** γ^μ **matrica je parna.**

Ova tvrdnja slijedi iz a. i b.

- γ^μ matrice u 4-D prostoru, Diracov spinor

- Zbog svojstava a. i c. γ^μ matrice u 4-D **ne mogu biti dvodimenzijske**. Naime, ima ih četiri (koliko je μ indeksa) a u 2-D prostoru ne postoje 4 nezavisne matrice bez traga. Stoga je najniža dimenzija γ^μ matrica 4.

- Ima beskonačno mnogo reprezentacija γ^μ matrica, ali se može pokazati da su one sve međusobno **unitarno ekvivalentne**, tj. za svake dvije reprezentacije γ_A^μ i γ_B^μ postoji unitarna transformacija U_{AB} koja ih povezuje,

$$\gamma_A^\mu = U_{AB}\gamma_B^\mu U_{AB}^\dagger. \quad (290)$$

- prvu reprezentaciju γ^μ matrica je prvi našao Dirac, i one prikazane preko 2×2 submatrica glase

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (291)$$

koje su podesna za opis nerelativističkih problema.

- Ovdje ćemo rabiti tzv. **Weyl-ovu ili kiralnu reprezentaciju** Diracovih matrica,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (292)$$

koja je podesna za ultrarelativističke probleme.

DZ. Pokažite da matrice (292) zadovoljavaju Cliffordovu algebru (281).

- Uobičajeno je uvesti 2×2 matrice

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma}). \quad (293)$$

Preko njih se Diracove matrice (292) mogu kompaktno zapisati

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (294)$$

DZ. Rabeći (292) pokažite da za σ^μ i $\bar{\sigma}^\mu$ matrice vrijedi

$$\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}. \quad (295)$$

- **Generatori Lorentzovih transformacija u kiralnoj reprezentaciji** - boostova i rotacija - su

$$S^{0i} = \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} \quad (296)$$

$$S^{ij} = \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\Sigma^k. \quad (297)$$

- Primjetimo da su generatori rotacije S^{ij} hermitični, dok generatori boosta S^{0i} nisu. Stoga opća Lorentzova transformacija (274)

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} \quad (298)$$

nije unitarna. Obrazloženje za to je sljedeće. Transformacija (298) nije transformacija koja djeluje na stanja u Hilbertovom prostoru, već transformacija koja djeluje na indekse 4-komponentnog polja (4-komponentno zato jer su $S^{\mu\nu}$ tj. γ^μ 4×4 matrice), tzv. **Diracovog polja** (ono je ujedno i **Diracov spinor**),

$$\begin{aligned} A. \quad \psi(x) &\rightarrow \psi'(x') = \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(x), \\ B. \quad \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x). \end{aligned} \quad (299)$$

(B. Odgovara transformaciji operatora stvaranja i poništenja u Hilbertovom prostoru, koje se efektivno prenosi na indekse polja.)

Nadalje, zbog boostova **prostor parametara** koji opisuje Lorentzove transformacije nije konačan (rapiditet η može poprimiti bilo koju realnu vrijednost) dakle **nije kompaktan**. **Nekompaktne Lieve grupe nemaju konačnodimenzijskih unitarnih reprezentacija**. Međutim reprezentacija generatora (298) je dimenzije 4, dakle konačnodimenzijska. Zbog toga ona ne može biti unitarna.

- Nadalje, zbog neunitarnosti (298) transformacija Diracovih matrica neće biti unitarna transformacija matrica, $\gamma^\mu \rightarrow \Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}}$ već transformacija sličnosti,

$$\gamma^\mu \rightarrow \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}}. \quad (300)$$

DZ. Pokaži da je inverz Lorentzove transformacije $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ jednak

$$(\Lambda_{\frac{1}{2}})^{-1} = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}. \quad (301)$$

Napomena: Objasnimo što mislimo pod transformacijom γ^μ matrica. Naime γ^μ matrice su konstantne matrice. One se ne transformiraju. Transformiraju se polja. γ^μ matrice se ne javljaju same, već u "sendviču" između polja. Kada se matrice Lorentzove transformacije polja pridjele γ^μ matricama dobija se transformacija γ^μ matrica. U tom smislu ovdje govorimo o Lorentzovim transformacijama γ^μ matrica.

- **Lorentzova transformacija Diracove matrice**

- Komutator Diracove matrica s generatorima Lorentzovih transformacija glasi

$$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \quad (302)$$

DZ. Dokaži jednakost(302).

- Relaciji (302) je ekvivalentna infinitezimalna Lorentzova transformacija Diracove matrice (300),

$$\begin{aligned} & (1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma})\gamma^\mu(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}) \\ &= (1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu\gamma^\nu = \gamma^\mu + \omega^\mu_\nu\gamma^\nu. \end{aligned} \quad (303)$$

- To pokazuje da se na Lorentzove transformacije (300) Diracove matrice transformiraju kao vektori,

$$\gamma^\mu \rightarrow \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu. \quad (304)$$

- Diracova algebra

- Diracove matrice su 4×4 matrice i ima ih četiri. Nezavisnih 4×4 matrica ima 16. Do sada smo još sreli jediničnu matricu i 6 $S^{\mu\nu}$ matrica. Nedostaje još 5 matrica.

- Potpun skup matrica koje se mogu izgraditi od matrica koje zadovoljavaju Cliffordovu algebru (281) uz jedničnu matricu tvore sve antisimetrične kombinacije γ^μ matrica,

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}, \\ & \gamma^\mu, \\ & \gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \equiv \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]} = -i\sigma^{\mu\nu}, \\ & \gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]} \equiv \frac{1}{6}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu), \\ & \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^{\sigma]}, \end{aligned} \quad (305)$$

(Uočite da u gornjim izrazima $[\]$ nije samo antisimetrizator indeksa, već uključuje i djeljenje sa $n!$ gdje je n broj indeksa.)

- Ukupno ih je koliko je antisimetričnih kombinacija, 16 (vidi 1529)). Sve su nezavisne jer imaju različita transformacijska svojstva na Lorentzove transformacije i zbog toga što $\gamma^{\mu\nu\rho\sigma}$ antikomutira sa svim γ^μ matricama, što znači da nije proporcionalna jediničnoj matrici.

DZ. Rabeći (281) pokažite da $\gamma^{\mu\nu\rho\sigma}$ matrica antikomutira sa svim γ^μ matricama.

- Uvođenjem matrice γ^5 i uporabom (281) i (11),

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{24}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \quad (306)$$

i totalne antisimetrije $\gamma^{\mu\nu\rho\sigma}$ dobijamo

$$\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = -i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5. \quad (307)$$

Slično dobijamo

$$\gamma^{\mu\nu\rho} = -i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma\gamma^5. \quad (308)$$

DZ. Provjerite (308) za nekoliko odabira indeksa μ, ν, ρ .

- γ^5 ima sljedeća svojstva neovisna o reprezentaciji γ^μ matrica

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (309)$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbf{1}, \quad (310)$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (311)$$

$$[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0. \quad (312)$$

Svojstvo (311) je posljedica (306) relacije

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \quad (313)$$

(koju je lako dokazati u kiralnoj reprezentaciji), te unitarne ekvivalencije matrica iz raznih reprezentacija.

Komutativnost γ^5 s generatorima Lorentzove transformacije slijedi iz (309).

DZ. Dokaži relacije (309), (310) i (311),

- Eksplicitni izraz za γ^5 u kiralnoj reprezentaciji je

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (314)$$

- Lorentzove transformacije (vidi (304)) matrica Diracove algebre su

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\mathbf{1}\Lambda_{\frac{1}{2}} = \mathbf{1}, \quad (315)$$

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad (316)$$

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\sigma^{\mu\nu}\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\sigma^{\alpha\beta}, \quad (317)$$

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\gamma^5\Lambda_{\frac{1}{2}} = \det\Lambda\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^5, \quad (318)$$

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^5\Lambda_{\frac{1}{2}} = \det\Lambda\gamma^5, \quad (319)$$

i prema njima su gornje matrice redom nazivaju **skalarna, vektorska, tenzorska, pseudovektorna i pseudoskalarna**. Razlika npr. skalara i pseudoskalara se javlja npr. kod paritetne transformacije kod koje je $\det\Lambda = -1$.

DZ. Provjeri relacije (315), (316), (317), (318), (319).

2.4 Diracova jednađba, opis Diracove estice

- U ovom poglavlju ćemo se pozabaviti konstrukcijom diferencijalne jednađbe koja opisuje polje sa Lorentzovom transformacijom (299) te svojstvima te jednađbe.

□ Diracova jednađba

- Jednađba mora biti Lorentz invarijantna.
 - Jedan način da to postignemo jest da pretpostavimo da za Diracovo polje $\psi(x)$ vrijedi (slobodna) KG jednađba,

$$(\partial^2 + m^2)\psi(x) = 0. \quad (320)$$

KG operator je Lorentzov skalar koji ne miješa indekse 4-komponentnog polja $\psi(x)$, pa je zbog toga jednađba (320) Lorentz invarijantna. Ona djeluje na svaku od 4 komponente polja $\psi(x)$ neovisno. Informacija o spinu, koja se očituje u povezanosti komponenti ne dolazi do izrađaja.

DZ. Pokaži da je jednađba (320) Lorentz invarijantna.

- Drugi način jest da pokušamo konstruirati relativistički invarijantnu jednađbu koja će povezivati spinorne indekse. Evo jedne takve formalno Lorentz invarijantne jednađbe,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (321)$$

tzv. Diracove jednađbe (DJ). m je Lorentzov skalar i on mora biti sadrđan u jednađbi jer jednađba (321) mora reproducirati KG jednađbu, koja sadrđi masu. Zbog (304) linearni operator $\gamma^\mu \partial_\mu$ je formalno Lorentz invarijantan na istovremene Lorentzove transformacije koordinata i γ^μ matrica.

- Pokađimo Lorentz invarijantnost (321) rabeći transformaciju (299) B. koja transformira samo polje,

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu^x - m)\psi(x) = 0 &\rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu^x - m)\psi'(x) = 0 \\ &\equiv (i\gamma^\mu \partial_\mu^x - m)\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x) = 0 \\ &\equiv (i\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}}\partial_\mu^x - m)\psi(\Lambda^{-1}x) = 0 \\ &\equiv (i\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \partial_\mu^x - m)\psi(\Lambda^{-1}x) = 0 \\ &\equiv (i\gamma^\mu \partial_\mu^{\Lambda^{-1}x} - m)\psi(\Lambda^{-1}x) = 0. \end{aligned} \quad (322)$$

U izvodu je eksplicite naznačeno po kojoj se varijabli derivira - ∂_μ^x npr. derivira po x^μ , dok $\partial_\mu^{\Lambda^{-1}x}$ derivira po $(\Lambda^{-1}x)^\mu$. Izvod eksplicite dokazuje Lorentz invarijantnost (preciznije kovarijantnost) Diracove jednađbe (321).

DZ. Dokažite Lorentz invarijantnost DJ rabeći transformaciju (299) A. To je najzgodnije napraviti tako da umjesto da transformirate jednadžbu i koordinate izrazite $\psi(x)$ preko $\psi'(x')$ i pokušate polaznu jednadžbu izraziti preko x' koordinata i polja $\psi'(x')$.

- Množenjem (321) operatorom $(-i\gamma^\mu\partial_\mu^x - m)$ iz DJ se dobiva KGJ.

DZ. Pokaži da iz DJ slijedi KGJ. (Naputak: pokaži da je $(a^\mu\gamma_\mu)^2 = a^2$).

□ Lagrangijan Diracovog polja, Diracov konjugat

- Lagrangijan je Lorentzov skalar. Stoga se mora posumirati po svim indeksima koji se Lorentz transformiraju. Zbog toga se Diracova polja moraju javljati u parovima koji imaju suprotne Lorentzove transformacije (isto kao što se kod tenzorskih polja uvijek javljaju u paru indeksi μ i ν).

- Zbog nehermitičnosti Lorentz generatora boosta Lorentzova transformacija $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ nije unitarna pa kombinacija $\psi^\dagger(x)\psi(x)$ nije Lorentz invarijantna.

- Inverzna Lorentzova transformacija postiže se kombinacijom hermitske konjugacije i množenja sa γ^0 matricama (primjenjujemo (313)),

$$\begin{aligned}\gamma^0\Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger\gamma^0 &= e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\gamma^0(S^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0} \\ &= e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}.\end{aligned}\quad (323)$$

DZ. Dokažite da je

$$S^{\mu\nu} = \gamma^0(S^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0. \quad (324)$$

Provjerite relaciju (323)

- Iz (323) i (288) slijedi da se polje

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0 \quad (325)$$

transformira inverzno polju $\psi(x)$. $\bar{\psi}(x)$ je tzv. **Diracov konjugat** polja $\psi(x)$.

DZ. Dokaži da se $\bar{\psi}(x)$ transformira inverzno polju $\psi(x)$,

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \quad (326)$$

- Iz Lorentzove transformacija polja $\psi(x)$ (299) i $\bar{\psi}(x)$ (326) te jednakosti (315)-(319) slijede transformacije struja (rabimo transformaciju (299) B. koju rabe Peskin i Schroeder)

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\psi(\Lambda^{-1}x), \quad (327)$$

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^\nu\psi(\Lambda^{-1}x), \quad (328)$$

$$\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x) \rightarrow \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\sigma^{\alpha\beta}\psi(\Lambda^{-1}x), \quad (329)$$

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x) \rightarrow \det(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^\nu\gamma^5\psi(\Lambda^{-1}x), \quad (330)$$

$$\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x) \rightarrow \det(\Lambda)\bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^5\psi(\Lambda^{-1}x). \quad (331)$$

koje se zbog tih transformacija zovu skalarna, vektorska, tenzorska, aksijalno-vektorska i pseudoskalarna.

- Lagrangijan Diracovog polja sadrži skalarnu struju uz masu i vektorsku uz derivaciju po koordinatama,

$$\mathcal{L}_{Dirac}(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x). \quad (332)$$

DZ. Provjerite da li Lagrangijan (332) daje ispravnu jednađbu za Diracovo polje $\psi(x)$. Pri tome uzmite da su polja $\psi(x)$ i $\bar{\psi}(x)$ međusobno nezavisna i rabite izraz za Euler-Lagrangeove jednađbe (60).

DZ. Pokažite da Lagrangijan (332) vodi na jednađbu

$$-i\partial_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu - m\bar{\psi}(x) = 0. \quad (333)$$

□ Weylovi spinori

- Weylovi spinori

- Generatori Lorentzovih transformacija u kiralnoj reprezentaciji (296) i (297) su blok-dijagonalni, odakle slijedi da je reprezentacija Lorentzovih transformacija (298) **reducibilna**.

(**Napomena** : to vrijedi za Lorentzove transformacije koje su kontinuirano povezane s jedinicom, tzv. svojstvene ($\det \Lambda = 1$) ortokrone ($\Lambda^0_0 > 0$) Lorentzove transformacije. Međutim jedna od dvaju diskretnih Lorentzovih transformacija, paritet, ima $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ proporcionalnu γ^0 matrici, koja je off-dijagonalna i stoga reprezentacija svih Lorentzovih transformacija ipak nije reducibilna. Druga diskretna Lorentzova transformacija, vremenska inverzija ima blok-dijagonalni oblik $\Lambda_{\frac{1}{2}}$.)

- Zbog te blok-dijagonalnosti (svojstvenih ortokronih) Lorentzovih transformacija $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ Diracova valna funkcija se može razdvojiti na dva dvokomponentna dijela, ψ_L i ψ_R ,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (334)$$

od kojih se svaki nezavisno transformira na (svojstvene ortokrone) Lorentzove transformacije. Konkretno infinitezimalne transformacije su (vidi (298), (296) i (297))

$$\psi_L \rightarrow \left(1 - \frac{i}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma} - \frac{1}{2}\vec{\beta}\vec{\sigma}\right)\psi_L, \quad (335)$$

$$\psi_R \rightarrow \left(1 - \frac{i}{2}\vec{\theta}\vec{\sigma} + \frac{1}{2}\vec{\beta}\vec{\sigma}\right)\psi_R, \quad (336)$$

gdje je $\theta^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\omega_{jk}$ i $\beta^i = \omega^{0i}$. ψ_L i ψ_R su tzv. **lijevi** odnosno **desni Weylov spinor**.

DZ. Nađite izraze za konačnu transformaciju ψ_L i ψ_R u eksponencijanom obliku, i izvršite te izraze.

- Transformacije (335) i (336) su međusobno povezane kompleksnom konjugacijom – rabeći identitet

$$\sigma^2\vec{\sigma}^*\sigma^2 = -\vec{\sigma}, \quad (337)$$

nalazi se se $\sigma^2\psi_L^*$ i ψ_R jednako transformiraju.

DZ. Dokažite identitet (337). Rabeći (337) pokažite da se $\sigma^2\psi_L^*$ i ψ_R jednako transformiraju.

- Kiralnost

- Naziv lijevi i desni (Weylov spinor) je u vezi s kiralnošću odnosno svojstvenom vrijednošću na djelovanje γ^5 matrice,

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (338)$$

odakle

$$\begin{aligned} \frac{1-\gamma^5}{2} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{1+\gamma^5}{2} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (339)$$

$\frac{1-\gamma^5}{2}$ i $\frac{1+\gamma^5}{2}$ su projektori lijeve odnosno desne kiralnosti.

DZ. Dokaži da $\frac{1-\gamma^5}{2}$ i $\frac{1+\gamma^5}{2}$ tvore potpun skup projektora. Drugim riječima da je zbroj svih projektora jednak jedinici, da je kvadrat projektora jednak projektoru i da je produkt projektora sa bilo kojim različitim projektorom jednak nuli.

- Weylove jednadžbe

- Iz Diracove jednadžbe raspisane preko Weylovih spinora,

$$\begin{aligned} 0 &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \\ &= \begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 + \vec{\sigma}\nabla) \\ i(\partial_0 - \vec{\sigma}\nabla) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -m & i\sigma^\mu\partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (340)$$

vidi se da se u njoj miješaju lijeve i desne komponente. Međutim ako se stavi $m = 0$ jednačbe za ψ_L i ψ_R postaju neovisne,

$$\begin{aligned} 0 &= i(\partial_0 - \vec{\sigma}\nabla)\psi_L = i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L, \\ 0 &= i(\partial_0 + \vec{\sigma}\nabla)\psi_R = i\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R. \end{aligned} \quad (341)$$

To su tzv. **Weylove jednačbe**. One su važne za opis neutrina koji su praktički bezmaseni.

(**Napomena:** 1998 je definitivno potvrđeno u eksperimentima s neutrinjskim oscilacijama da neutriini ne mogu imati masu jednaku nuli.)

□ Sačuvane struje

Razmatramo sačuvane struje teorije opisane slobodnim Diracovim Lagrangijanom (332) na sljedeće transformacije:

- globalne fazne ($U(1)$) transformacije: $\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha}\psi(x)$ α je konstanta (x^μ se ne mijenja),
- translacije (inf.): $x^\mu \rightarrow x^\mu - \epsilon^\mu$, $\psi(x) \rightarrow \psi(x + \epsilon)$,
- Lorentzove transformacije (inf.): $x^\mu \rightarrow x^\mu - (\omega x)^\mu$, $\psi(x) \rightarrow (1 - \delta\Lambda_{1/2})\psi(x + \omega x)$,
- kiralne $U(1)$ transformacije: $\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha\gamma^5}\psi(x)$, α je konstanta (x^μ se ne mijenja).

1. Fazna ($U(1)$) transformacija

- Transformacije polja:

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha}\psi(x) \quad \Rightarrow \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{i\alpha}\bar{\psi}(x). \quad (342)$$

- Lagrangijan (332) je očigledno invarijantan na te transformacije ($\alpha = konst$),

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) \quad \Rightarrow \quad \Delta\mathcal{L}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}^\mu(x) \stackrel{(69)}{=} 0. \quad (343)$$

- Infinitesimalne transformacije polja, $\Delta\psi(x)$, $\Delta\bar{\psi}(x)$ (vidi (68)):

$$\psi(x) \xrightarrow{inf} \psi(x) - i\alpha\psi(x) \quad \Rightarrow \quad \Delta\psi(x) = -i\psi(x), \quad (344)$$

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow{inf} \bar{\psi}(x) + i\alpha\bar{\psi}(x) \quad \Rightarrow \quad \Delta\bar{\psi}(x) = i\bar{\psi}(x). \quad (345)$$

- Sačuvana struja (vidi (71), (344) i (343)):

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\partial_\mu\psi(x)}\Delta\psi(x) + \Delta\bar{\psi}(x)\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\bar{\psi}(x)}}_{=0} - \underbrace{\mathcal{J}^\mu(x)}_{=0} \\ &= \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \end{aligned} \quad (346)$$

Usporedite (343) sa (79), (344) i (345) sa (81) i (82) sa (346)

- Sačuvani naboj:

$$Q = \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) = \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) . \quad (347)$$

Uočite da je za klasična kompleksna polja naboj Q pozitivan. To je posljedica toga što je Diracova jednačba prvog reda u derivaciji po vremenu. Pozitivnost nulte komponente sačuvane struje koja se zapravo interpretirala po Bornovoj interpretaciji kao gustoća vjerojatnosti nalaženja čestice je bio jedan od glavnih, ako ne i glavni razlog zašto je Dirac našao Diracovu jednačbu jer je bio nezadovoljan sa KG jednačbom, koja nema to svojstvo. Kao što ćemo vidjeti poslije ta Diracova motivacija je bila potpuno pogrešna. U teoriji polja nulta komponenta gustoće struje $\psi^\dagger(x)\psi(x)$ je gustoća naboja i također nije pozitivno definitna.

2. Translacije

- Infinitesimalne transformacije polja (Napomena: transformacija koordinata je $x^\mu \rightarrow x^\mu - \epsilon^\mu$):

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi(x + \epsilon) = \psi(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \psi(x) \\ &\Rightarrow \Delta_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x), \end{aligned} \quad (348)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x + \epsilon) = \bar{\psi}(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \bar{\psi}(x) \\ &\Rightarrow \Delta_\mu \bar{\psi}(x) = \partial_\mu \bar{\psi}(x) . \end{aligned} \quad (349)$$

- Infinitesimalna transformacija Lagrangijana: Lagrangijan se transformira kao realno skalarno polje – vidi (79):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &\rightarrow \mathcal{L}(x + \epsilon) = \mathcal{L}(x) + \epsilon_\mu \partial^\mu \mathcal{L}(x) \\ &\Rightarrow \epsilon^\nu \underbrace{\partial_\mu (g^\mu_\nu \mathcal{L}(x))}_{(\mathcal{J}^\mu)_\nu(x)} \\ &\Rightarrow (\mathcal{J}^\mu)_\nu(x) = g^\mu_\nu \mathcal{L}(x) . \end{aligned} \quad (350)$$

- Sačuvane struje $(j^\mu)_\nu \equiv T^\mu_\nu$:

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \partial_\mu \psi(x)} \Delta_\nu \psi(x) + \Delta_\nu \bar{\psi}(x) \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}(x)}}_{=0} - (\mathcal{J}^\mu)_\nu(x) \\ &= \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\nu - g^\mu_\nu i\gamma^\alpha \partial_\alpha + mg^\mu_\nu) \psi(x) . \end{aligned} \quad (351)$$

- Sačuvani naboji:

$$H \equiv P^0 = \int d^3x T^{00}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3x \bar{\psi}(x) (-i\vec{\gamma}\nabla + m)\psi(x) \\
&= \int d^3x \psi^\dagger(x) [-i\gamma^0\vec{\gamma}\nabla + m\gamma^0]\psi(x), \tag{352}
\end{aligned}$$

$$P^i = \int d^3x T^{0i}(x) = \int d^3x \psi^\dagger(x) [-i\nabla^i]\psi(x). \tag{353}$$

Uočite da je u uglatoj zagradi u (352) diferencijani operator Hamiltonijana koji se javlja u jednočestičnoj teoriji Diracove čestice. U uglatoj zagradi u (353) je diferencijani operator QM impulsa koji se uvodi npr minimalnom supstitucijom. Hamiltonijan i impuls su očekivane vrijednosti spomenutih QM diferencijanih operatora za danu Diracovu valnu funkciju $\psi(x)$.

Ovakav način izračunavanja Hamiltonijana i impulsa, preciznije operatora Hamiltonijana i impulsa vrijedi i za kvantnu teoriju polja. Jedina razlika će biti da će se "klasična" Diracova polja zamijeniti sa kvantiziranim poljima – koja sadrže operatore stvaranja i poništenja.

3. Lorentzove transformacije

- Infinitesimalne transformacije polja (Napomena: infinitesimalne transformacije koordinata su $x^\mu \rightarrow x^\mu - (\omega x)^\mu$) - (u izvodu rabimo (68), (299), (298), (297), (264))

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\rightarrow \underbrace{\left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)}_{\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}} \underbrace{\psi(x - \omega x)}_{\Lambda x} \\
&= \psi(x) + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} \underbrace{(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)}_{-iJ_{\mu\nu}} \psi(x) - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} S_{\mu\nu}\psi(x) \\
&\Rightarrow \Delta_{\mu\nu}\psi(x) = -i(J_{\mu\nu} + S_{\mu\nu})\psi(x), \tag{354}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x - \omega x) \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) \\
&= \bar{\psi}(x) + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} \underbrace{(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)}_{-iJ_{\mu\nu}} \bar{\psi}(x) + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\psi}(x)S^{\mu\nu} \\
&\Rightarrow \Delta_{\mu\nu}\bar{\psi}(x) = -iJ_{\mu\nu}\bar{\psi}(x) + i\bar{\psi}(x)S_{\mu\nu}. \tag{355}
\end{aligned}$$

- Infinitesimalne transformacije Lagrangijana (transformira se kao skalarno polje)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x) &\rightarrow \mathcal{L}(x - \omega x) = \mathcal{L}(x) + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha)\mathcal{L}(x) \\
&= \mathcal{L}(x) + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\partial_\mu \underbrace{(g^{\mu\beta}x^\alpha - g^{\mu\alpha}x^\beta)}_{(\mathcal{J}^\mu)^{\alpha\beta}} \mathcal{L}(x) \\
&\Rightarrow (\mathcal{J}^\mu)^{\alpha\beta} = (g^{\mu\beta}x^\alpha - g^{\mu\alpha}x^\beta)\mathcal{L}(x). \tag{356}
\end{aligned}$$

- Sačuvane struje $(j^\mu)^{\alpha\beta} \equiv \mathcal{M}^{\mu\alpha\beta}$ ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}} = 0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\mu\alpha\beta} &= -\bar{\psi}(x) i\gamma^\mu (iJ^{\alpha\beta} + iS^{\alpha\beta}) \psi(x) \\ &\quad - (g^{\mu\beta} x^\alpha - g^{\mu\alpha} x^\beta) (\bar{\psi}(x) (i\gamma^\lambda \partial_\lambda - m) \psi(x)) \end{aligned} \quad (357)$$

- "Sačuvani" naboji

$$Q^{\alpha\beta} = \int d^3x (\psi^\dagger(x) (J^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}) \psi(x) - (g^{0\beta} x^\alpha - g^{0\alpha} x^\beta) \bar{\psi}(x) (i\gamma^\lambda \partial_\lambda - m) \psi(x)) \quad (358)$$

Operatori momenta impulsa dani su sa

$$Q^{ij} = \int d^3x \psi^\dagger(x) \left(-i(x^\alpha \partial^\beta - x^\beta \partial^\alpha) - \frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \right) \psi(x). \quad (359)$$

Operatori boosta, su također sačuvani. Oni imaju imaju eksplicitnu zavisnost o prostornim koordinatama

$$Q^{0i} = \int d^3x (\psi^\dagger(x) (J^{0i} + S^{0i}) \psi(x) + x^i \bar{\psi}(x) (i\gamma^\lambda \partial_\lambda - m) \psi(x)) \quad (360)$$

4. Kiralna $U(1)$ transformacija

- Kiralna $U(1)$ transformacija ima u usporedbi sa faznom transformacijom u eksponentu dodatni γ^5 faktor:

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha\gamma^5} \psi(x), \quad (361)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha\gamma^5}. \quad (362)$$

- Transformacija Lagrangijana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) \\ &\rightarrow \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m e^{-2i\alpha\gamma^5}) \psi(x). \end{aligned} \quad (363)$$

Stoga je Lagrangijan invarijantan na kiralnu transformaciju samo ako je polje $\psi(x)$ bezmaseno.

-Infinitesimalna kiralna transformacija daje (vidi (68))

$$\begin{aligned} \Delta\psi(x) &= -i\gamma^5 \psi(x), \\ \Delta\bar{\psi}(x) &= -i\bar{\psi}(x) \gamma^5. \end{aligned} \quad (364)$$

- Sačuvana struja za bezmasenu Diracovu česticu slijedi iz Lagrangijana,

$$j^\mu = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x). \quad (365)$$

- Primjena: primjenjuje se kod lakih kvarkova u d i s , koji su skoro bezmaseni u usporedbom sa masama mezona koji su od njih izgrađeni.
- Primjetite da ako teorija zadovoljava neku grupu simetrija G i ako su fermioni bezmaseni, tada je ona je invarijantna na grupu $G \times G_A$ gdje je G_A pridružena grupa kiralnih simetrija. Npr. ako teorija ima $SU(2)$ simetriju, teorija s bezmasenim fermionima imat će $SU(2) \times SU(2)_A$ simetriju.

2.5 Slobodna rješenja Diracove jednađbe

Diracovi spinori koji su slobodna rješenja KG jednađbe

- U ovom poglavlju ćemo se pozabaviti rješenjima Diracove jednađbe koja imaju oblik ravnog vala, tj. koja su rješenja slobodne KG jednađbe (66).
- Postoje dva rješenja

$$\begin{aligned}\psi(x) &= u(p)e^{-ip \cdot x}, \\ \psi(x) &= v(p)e^{ip \cdot x},\end{aligned}\tag{366}$$

što se tiče faze. Prvo odgovara pozitivno-energetskom rješenju, a drugo negativno-energetskom rješenju za energiju i impuls (vidi (50))

$$E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.\tag{367}$$

Diracove jednađbe u impulsnom prostoru

- Uvrštavanjem u Diracovu jednađbu dobijamo pripadne Diracove jednađbe u impulsnom prostoru

$$0 = (\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = \begin{pmatrix} -m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_u(p) \\ \chi_u(p) \end{pmatrix},\tag{368}$$

$$0 = (-\gamma^\mu p_\mu - m)v(p) = \begin{pmatrix} -m & -\sigma^\mu p_\mu \\ -\bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_v(p) \\ \chi_v(p) \end{pmatrix},\tag{369}$$

gdje smo 4-komponentne spinore prikazali preko dva dvokomponentna spinora.

- Algebarske jednađbe (368) i (369) se mogu riješiti direktno, ali ih je jednostavnije riješiti u sustavu mirovanja i boostirati ta rješenja u opći referentni sustav.

Rješenja DJ u sustavu mirovanja

- U sustavu mirovanja je $p = p_0 = (m, 0)$ i jednađbe imaju oblik

$$0 = \begin{pmatrix} -m & m \\ m & -m \end{pmatrix} u(p_0),\tag{370}$$

$$0 = \begin{pmatrix} -m & -m \\ -m & -m \end{pmatrix} v(p_0),\tag{371}$$

s rješenjima

$$u(p_0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix},\tag{372}$$

$$v(p_0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi \end{pmatrix}.\tag{373}$$

Tu je ξ opći spinor. Iako je faktor \sqrt{m} stvar konvencije on omogućuje da se spinori ξ normaliziraju kao QM Paulijevi spinori, tj. na jedinicu, $\xi^\dagger \xi = 1$.

Broj stupnjeva slobode za rješenja DJ

- Nakon primjene Diracove jednadžbe samo je jedan od dva spinora u (368) i (369) nezavisan. Drugim riječima, pozitivno (negativno) energetska rješenja DJ imaju maksimalno dva stupnja slobode – dakle ukupno 4 stupnja slobode za pozitivno i negativno energetska rješenja. Poslije ćemo vidjeti da za masivna rješenja DJ koja nose naboj spinori ξ stvarno odgovaraju spinskim stupnjevima slobode.

- Ako su čestice bezmasene pozitivno (negativno) energetska rješenja imaju samo jedan stupanj slobode koji odgovara helicitetu. Dakle ukupno dva stupnja slobode.

- Ako čestice ne nose naboj (Majorana spinori) tada pozitivno (negativno) energetska rješenja DJ imaju dva stupnja slobode, ali su pozitivno energetska rješenja u identična negativno energetskim v . Dakle ukupno 2 stupnja slobode.

Boostiranje rješenja (372) i (373)

- Boost u općem smjeru u vektorskoj reprezentaciji

- Boost za vektore u z -smjeru je ($\eta = \omega_{03}$; rabimo (269) i (270))

$$\begin{aligned} L(p\hat{z})^\mu{}_\nu &= (e^{\omega(p\hat{z})})^\mu{}_\nu = (e^{-i\eta\mathcal{J}^{03}})^\mu{}_\nu \\ &= \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & 0 & \sinh \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \eta & 0 & 0 & \cosh \eta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (374)$$

$$\equiv \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (375)$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta \hat{z}^T \\ \sinh \eta \hat{z} & \mathbf{1} + (\cosh \eta - 1) \hat{z} \otimes \hat{z}^T \end{pmatrix}, \quad (376)$$

gdje su $\beta = v/c$ i $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ parametri s kojima ste u općoj fizici opisivali Lorentzove transformacije. U (376) smo z -boost zapisali u obliku koji je podesean za nalaženje boosta u općem smjeru. U toj je formuli \hat{z} smjer 3-impulsa, odnosno smjer vektora boost parametara $(0, 0, \eta)^T$; \hat{z}^T je njemu transponirani vektor.

- Iz (374) slijedi izraz za impuls preko rapiditeta η (vidi tekst ispod (272)),

$$\begin{aligned} p &= (E, 0, 0, p) = (E, p\hat{z}); \\ E &= m \cosh \eta, \quad p = m \sinh \eta. \end{aligned} \quad (377)$$

- Boost u \hat{p} smjeru možemo dobiti na dva načina.

a. Odabirom parametara $\omega_{0i} = \eta \hat{p}_i$, $\omega_{ij} = 0$ i direktnim računom e^ω .

b. Djelovanjem na boost u \hat{z} smjeru rotacijskim matricama koje rotiraju $\hat{z} \rightarrow \hat{p}$.
- Razmotrimo ovaj drugi način. Neka je $\overline{R}(\vec{p})$ rotacijska matrica koja rotira $\hat{z} \rightarrow \hat{p}$ i $\overline{R}(\vec{p})$ pripadna rotacija u 3-D prostoru

$$\overline{R}(\hat{p}) \hat{z} = \hat{p}, \quad \hat{z}^T \overline{R}^T(\hat{p}) = \hat{p}^T, \quad (378)$$

$$R(\hat{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{R}(\hat{p}) \end{pmatrix}. \quad (379)$$

Odatle za boost u \hat{p} smjeru koji daje iznos 3-impulsa \hat{p} dobijamo (koristimo ortogonalnost matrice $\overline{R}(\hat{p})$ tj. jednakost $\overline{R}^T(\hat{p}) = \overline{R}^{-1}(\hat{p})$)

$$\begin{aligned} L(\vec{p}) &= R(\hat{p})L(p\hat{z})R^{-1}(\hat{p}) \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta \hat{p}^T \\ \sinh \eta \hat{p} & \mathbf{1} + (\cosh \eta - 1) \hat{p} \otimes \hat{p}^T \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (380)$$

Primjetimo da se za masivne čestice boost u općem smjeru uvijek može prikazati preko boosta u \hat{z} smjeru i rotacije koja rotira $\hat{z} \rightarrow \hat{p}$.

- p^μ dobijamo iz $p_0 = (m, 0)$ boostiranjem sa $L(\vec{p})$,

$$L(\vec{p})^\mu{}_\nu (p_0)^\nu = mL(\vec{p})^\mu{}_0 = (m \cosh \eta, \hat{p} m \sinh \eta). \quad (381)$$

DZ. Izračunajte boost matricu za opći smjer, $L(\vec{p})$ direktno iz izraza za $e^{\omega(\vec{p})}$ gdje je $\{(\omega(\vec{p}))_{0i}\} = \eta \hat{p}$, $(\omega(\vec{p}))_{ij} = 0$.

- Opći boost u spinornoj reprezentaciji

- Općem boostu u vektorskoj reprezentaciji $L(\vec{p})$ odgovara opći spinorni boost (vidi (296), (298), (299) i (304))

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}(L(\vec{p})) = e^{-i\eta \hat{p}_i S^{0i}} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta}{2} \hat{p} \vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\eta}{2} \hat{p} \vec{\sigma}} \end{pmatrix} \quad (382)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{e^{-\eta \hat{p} \vec{\sigma}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{e^{\eta \hat{p} \vec{\sigma}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\sigma^\mu p_\mu}{m}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\bar{\sigma}^\mu p_\mu}{m}} \end{pmatrix}. \quad (383)$$

U prvoj jednakosti (383) pod korijenom matrice se podrazumijeva matrica koja se dobiva dijagonalizacijom matrice, pa uzimanjem *pozitivnih* korijena svojstvenih vrijednosti matrice. U drugoj relaciji (383) primjenjena je jednakost

$$e^{-\eta \hat{p} \vec{\sigma}} = \cosh \eta - \hat{p} \vec{\sigma} \sinh \eta = \frac{\sigma^\mu p_\mu}{m}, \quad (384)$$

i analogna jednakost za $e^{\eta\hat{p}\vec{\sigma}}$. Vrijedi također

$$\sqrt{\sigma \cdot p} = \frac{p \cdot \sigma + m}{\sqrt{2(E + m)}}. \quad (385)$$

DZ. Nađite za $e^{\eta\hat{p}\vec{\sigma}}$ izraz preko p^μ .

DZ. Dokažite relaciju 385.

- Primjenom boosta (383) na spinore u sustavu mirovanja (372) i (373) dobijamo spinore 4-impulsa (381),

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma \cdot p} \xi \\ \sqrt{\bar{\sigma} \cdot p} \xi \end{pmatrix}, \quad (386)$$

$$v(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma \cdot p} \xi \\ -\sqrt{\bar{\sigma} \cdot p} \xi \end{pmatrix}. \quad (387)$$

- **Korisna relacija**

- U računima sa spinorima (386) i (387) često se rabi relacija

$$(\sigma \cdot p)(\bar{\sigma} \cdot p) = p^2 = m^2. \quad (388)$$

DZ. Provjerite da li spinori (386) i (387) zadovoljavaju Diracove jednadžbe u impulsnom prostoru uvrštavanjem (386) u (368) odnosno (387) u (369).

Diracovi spinori određenog heliciteta

- Do sada smo pokazali kako možemo definirati stanja određenog 4-impulsa. Međutim potpun skup komutirajućih operatora Poincaréove grupe, uz p^μ sadrži i operator koji definira spin ili helicitet stanja.

- QM operator Hamiltonijana, $-i\gamma^0\vec{\gamma}\nabla + m\gamma^0$ (vidi (352)) i QM operator impulsa $-i\nabla^i$ (vidi (353)) u impulsnom prostoru,

$$\hat{H} \equiv -i\gamma^0\vec{\gamma}\nabla + m\gamma^0 \rightarrow \gamma^0\vec{\gamma}\vec{p} + m\gamma^0, \quad (389)$$

$$\hat{P} \equiv -i\nabla \rightarrow \vec{p}, \quad (390)$$

komutiraju sa tzv. operatorom heliciteta,

$$h \equiv \hat{p}\vec{S} \equiv \frac{1}{2}\hat{p} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (391)$$

DZ. Pokažite sljedeće dvije relacije

$$2S^i \stackrel{def}{=} \Sigma^i = \frac{i}{2} \epsilon^{ijk} [\gamma^j, \gamma^k] \quad (392)$$

$$= \gamma^5 \gamma^0 \gamma^i \stackrel{def}{=} \gamma^5 \vec{\alpha} . \quad (393)$$

Prva relacija, (392), povezuje "spinsku matricu" sa γ^μ matricama a druga, (393), je povezuje sa matricama $\alpha^i \equiv \gamma^0 \gamma^i$ koje se javljaju u QM Hamiltonijanu (389).

DZ. Pokažite da operator heliciteta h komutira sa QM operatorima Hamiltonijana i impulsa.

- Spinori (386) i (387) su svojstvena stanja heliciteta ako Paulijevi spinori ξ zadovoljavaju relaciju

$$\vec{\sigma} \hat{p} \xi = \pm \xi . \quad (394)$$

DZ. a. Pokažite da su spinori (386) i (387) svojstvena stanja heliciteta ako 2-spinori ξ zadovoljavaju relaciju (394).

Naputak: Raspišite izraz za boost u kojem se javlja $\eta/2$, (382). Nađite izraze za Diracove spinore (386) i (387) rabeći taj oblik boosta. Primjenite na tako dobivene Diracove spinore operator h (391) i zahtjevajte da je tako dobiven izraz proporcionalan polaznim spinorima.

b. Nađite eksplicitni oblik rješenja svojstvene jednadžbe (394).

DZ. a. Pokažite da za boost u \hat{z} smjeru valne funkcije $u(p)$ i $v(p)$ imaju oblik

$$\begin{aligned} u(p) &= \begin{pmatrix} [e^{\eta/2}(\frac{1-\sigma^3}{2}) + e^{-\eta/2}(\frac{1+\sigma^3}{2})] \sqrt{m} \xi \\ [e^{\eta/2}(\frac{1+\sigma^3}{2}) + e^{-\eta/2}(\frac{1-\sigma^3}{2})] \sqrt{m} \xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [\sqrt{E+p^3}(\frac{1-\sigma^3}{2}) + \sqrt{E-p^3}(\frac{1+\sigma^3}{2})] \xi \\ [\sqrt{E+p^3}(\frac{1+\sigma^3}{2}) + \sqrt{E-p^3}(\frac{1-\sigma^3}{2})] \xi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (395)$$

$$\begin{aligned} v(p) &= \begin{pmatrix} [e^{\eta/2}(\frac{1-\sigma^3}{2}) + e^{-\eta/2}(\frac{1+\sigma^3}{2})] \sqrt{m} \xi \\ -[e^{\eta/2}(\frac{1+\sigma^3}{2}) + e^{-\eta/2}(\frac{1-\sigma^3}{2})] \sqrt{m} \xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [\sqrt{E+p^3}(\frac{1-\sigma^3}{2}) + \sqrt{E-p^3}(\frac{1+\sigma^3}{2})] \xi \\ -[\sqrt{E+p^3}(\frac{1+\sigma^3}{2}) + \sqrt{E-p^3}(\frac{1-\sigma^3}{2})] \xi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (396)$$

b. Rabeći izraze (395) i (396) nađite izraze za $u(p)$ i $v(p)$ za sljedeće izbore ξ : $\xi = (1, 0)^T$, $\xi = (0, 1)^T$.

c. Rabeći izraze dobivene u b. podzadatku nađite izraze za (395) i (396) u limesu kada je energija mnogo manja od mase. Uočite da tako dobiveni spinori imaju samo jedan stupanj slobode za danu vrijednost p .

- Za masivne čestice helicitet ovisi o inercijalnom sustavu iz kojeg se čestica gleda. Najjednostavnije je to vidjeti boostirajući duž smjera \hat{p} u negativnom smjeru. Operator h je definiran s obzirom na smjer 3-impulsa čestice, dok je impuls čestice definiran i smjerom 3-impulsa i rapiditetom koji definira iznos 3-impulsa. Ako se čestice boostira u negativnom \vec{p} smjeru boostom čiji je rapiditet veći od rapiditeta koji definira 4-impuls čestice, smjer 3-impulsa čestice će se promijeniti. Formalno operator h je invarijantan na sve boostove duž \vec{p} osi. Zbog toga helicitet u gornjoj proceduri mijenja predznak.

DZ. a. Pokaži da bilo kakvo boostiranje duž \hat{p} osi ne mijenja h . b. Pokaži da za masivne čestice boostiranjem valnih funkcija (386) i (387) u negativnom \hat{p} smjeru s rapiditetom većim od $\eta = \text{Arch}(E/m) = \text{Log}((E+p)/m)$ dobijamo spinore sa suprotnim smjerom 3-impulsa.

- Za bezmasene spinore se helicitet ne mijenja jer ne postoji boost koji bi preokrenuo smjer 3-impulsa bezmasene čestice.

- Vidjet ćemo poslije da se dodatni spinski stupanj slobode masivnih čestica prirodno opisuje spinom, a kod bezmasenih helicitetom.

Normalizacija spinora, relacije ortonormiranosti

- **Normalizacija spinora u**

- Uobičajeno je normalizaciju spinora definirati na Lorentz invarijantan način. Kako $\psi^\dagger\psi$ nije Lorentz invarijantno, zgodno je da nije ni $u^\dagger u$ (vidi (386)),

$$\begin{aligned} u^\dagger(p)u(p) &= (\xi^\dagger\sqrt{\sigma\cdot p}, \xi^\dagger\sqrt{\sigma\cdot p}) \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma\cdot p}\xi \\ \sqrt{\sigma\cdot p}\xi \end{pmatrix} \\ &= 2E_{\vec{p}}\xi^\dagger\xi. \end{aligned} \quad (397)$$

Slično kako je $\bar{\psi}\psi$ Lorentz invarijantno, zgodno je ako je i $\bar{u}u$ ($\bar{u} = u^\dagger\gamma^0$, koristimo (292) i (388)),

$$\bar{u}u = 2m\xi^\dagger\xi. \quad (398)$$

DZ. Provjerite relacije (397) i (398).

Da bi se to postiglo uobičajeno je normalizirati dvokomponentne spinore ξ kao Paulijeve spinore,

$$\xi^\dagger\xi = 1. \quad (399)$$

- Nadalje, uobičajeno je izabirati bazu ortonormiranih ξ spinora ξ^1 i ξ^2 ($(\xi^i)^\dagger\xi^j = \delta_{ij}$), kao npr.

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (400)$$

- Tako dobijamo spinore

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma \cdot p} \xi^s \\ \sqrt{\bar{\sigma} \cdot p} \xi^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \quad (401)$$

koji zadovoljavaju sljedeće normalizacijske uvjete i uvjete ortonormiranosti

$$\bar{u}^r(p)u^s(p) = 2m\delta^{rs}, \quad u^{r\dagger}(p)u^s(p) = 2E_{\vec{p}}\delta^{rs}. \quad (402)$$

- **Normalizacija spinora v**

- Na potpuno analogan način se normaliziraju spinori v , (387). Spinori v se izražavaju preko ortonormiranih Paulijevih spinora η^s ($(\eta^s)^\dagger \eta^r = \delta^{sr}$),

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2. \quad (403)$$

- Normalizacija tih stanja je

$$\bar{v}^r(p)v^s(p) = -2m\delta^{rs}, \quad v^{r\dagger}(p)v^s(p) = 2E_{\vec{p}}\delta^{rs}. \quad (404)$$

DZ. Provjerite relacije (404)

- **Relacije ortogonalnosti u i v**

- Vrijede sljedeće dvije relacije ortogonalnosti u i v spinora

$$\bar{u}^r(p)v^s(p) = \bar{v}^r(p)u^s(p) = 0, \quad (405)$$

$$u^{r\dagger}(\vec{p})v^s(-\vec{p}) = v^{r\dagger}(-\vec{p})u^s(\vec{p}) = 0. \quad (406)$$

Tu je $v(-\vec{p}) \equiv v(E, -\vec{p})$. Primjetite dok ortonormiranost vrijedi za \bar{u} i v spinore odnosno \bar{v} i u spinore istog 4-impulsa p , za u^\dagger i v spinore odnosno v^\dagger i u spinore ortonormiranost vrijedi ako u i v spinori imaju suprotne 3-impulse.

Opće rješenje slobodne DJ

- Na kraju napomenimo da se svako rješenje slobodne DJ (321) može prikazati kao linearna superpozicija rješenja (401) i (403). U toj linearnoj superpoziciji u funkcije se javljaju uz pozitivno energetske faktore $e^{-ip \cdot x}$ a v funkcije uz negativno energetske faktore $e^{ip \cdot x}$.

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s (a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^* v^s(p) e^{ip \cdot x}). \quad (407)$$

Gornji izraz nije još kvantizirano polje već nekvantizirano. To se očituje u tome što su $a_{\vec{p}}^s$ i $b_{\vec{p}}^*$ obični kompleksni brojevi. Pri kvantizaciji $a_{\vec{p}}^s$ i $b_{\vec{p}}^*$ će postati operatori.

DZ. Dokažite da $\psi(x)$ definiran jednađbom (407) zadovoljava Diracovu jednađbu (321).

Spinske sume, relacija potpunosti

- U računu smetnje kvadrati amplituda u kojima učestvuju fermioni sadrže uvijek tenzorske produkte spinornih funkcija u ili v oblika,

$$u^s(p) \otimes \bar{u}^s(p), \quad v^s(p) \otimes \bar{v}^s(p) . \quad (408)$$

Ubuduće nećemo pisati tenzorski produkt \otimes i on će se podrazumijevati. Gornji produkti nose informaciju o polarizaciji fermionskih stanja i imaju kompliciranu spinsku i kutnu zavisnost pri prijelazu iz jednog u drugi referentni sustav. Eksperimentalno se uglavnom ne mjeri polarizacija početnih i konačnih fermionskih stanja, tako da se po spinu može posumirati. U kvadratima amplituda koje sadrže sume tenzorskih produkata (408) kutno-spinska zavisnost se gubi i lakše ih je izračunati. Nađimo spinske sume (408).

- **Spinska suma za tenzorski produkt u i \bar{u} funkcija** glasi

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^s(p) \bar{u}^s(p) &= \sum_s \left(\begin{array}{c} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{array} \right) (\xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}, \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma}) \\ &= \left(\begin{array}{cc} \sqrt{p \cdot \sigma} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \sigma} \sqrt{p \cdot \sigma} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \sigma} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc} m & p \cdot \sigma \\ p \cdot \bar{\sigma} & m \end{array} \right) \equiv \gamma \cdot p + m . \end{aligned} \quad (409)$$

U drugom redu (409) upotrebljena je jednakost

$$\sum_s \xi^s \xi^{s\dagger} = \mathbf{1} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) . \quad (410)$$

U trećem rabimo prvo (388) a zatim (294).

- Analogno se nalazi **spinska suma za tenzorski produkt v i \bar{v} funkcija**

$$\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \gamma \cdot p - m . \quad (411)$$

- Iz relacija (409) i (411) slijedi **relacija potpunosti za Diracove spinore 4-impulsa p ,**

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) - \sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = 2m . \quad (412)$$

Nju je jako zgodno koristiti u kombinaciji sa relacijama ortonormiranosti (402), (404) i (405)

DZ. Dokažite relaciju (411)

DZ. Dokažite da

$$\frac{\gamma \cdot p + m}{2m} \quad \text{i} \quad \frac{\gamma \cdot p - m}{2m} \quad (413)$$

tvore potpun skup projektora "pozitivno" i "negativno" energetske stanja.

2.6 Kvantizacija Diracovog polja

2.6.1 POVIJESNI OKVIRI (Uzeto iz Weinberg I)

a. **Paulijev princip isključenja** (Pauli 1925) je opažen eksperimentalno u atomskoj fizici tj. na atomskim elektronskim stanjima.

b. Jordan 1927 i Wigner 1928 su uočili da Paulijev princip isključenja omogućuje za vrijednosti **broja zauzeća istog kvantnog stanja samo vrijednosti $n_k = 0, 1$** . To je impliciralo da operatori a_k i a_k^\dagger koji se javljaju u Fourierovom transformatu polja ne zadovoljavaju komutacijske već **antikomutacijske relacije**,

$$a_k a_j^\dagger + a_j^\dagger a_k = \delta_{jk}, \quad a_k a_j + a_j a_k = 0, \quad a_k^\dagger a_j^\dagger + a_j^\dagger a_k^\dagger = 0. \quad (414)$$

DZ. Pokažite da iz antikomutacijskih relacija slijedi da je $(a_k^\dagger)^2 = 0$, tj. da se isto kvantno stanje može popuniti maksimalno jednom. Za dani k uvedite bazu preko brojeva zauzeća, $|0\rangle_k, |1\rangle_k$. Nađite operatore poništenja a_k i stvaranja a_k^\dagger u toj bazi.

c. **Diracova jednačba** je nađena 1928. Ona je imala pozitivno i **negativno energetska stanja**.

d. Problem negativno energetskih stanja je "riješio" Dirac 1930 rabeći Paulijev princip – **popunio je sva negativno energetska stanja (tj. uveo tzv. Diracovo more čestica)**. Time je uveo višestruku interpretaciju Diracove jednačbe i po prvi puta uveo **vakuum** (ovdje je to bilo Diracovo more), za koji je pretpostavio da se **ne vidi** — sve se mjerilo relativno prema tom vakuumu. Nedostatak elektrona (šupljine) u vakuumu tako postaju pozitivno nabijene čestice iste mase kao elektron (pozitroni).

e. Fock (1933) a zatim Furry i Oppenheimer (1934) su uočili da se **polje ne može graditi i od operatora stvaranja i operatora poništenja**, jer ti operatori imaju **suprotan naboj**. Stoga su ih probali izgraditi samo od operatora poništenja,

$$\psi(x) = \sum_k u_k(\vec{x}) e^{-i\omega_k t} a_k, \quad (415)$$

gdje je $\{u_k(\vec{x}) e^{-i\omega_k t}\}$ potpun skup rješenja slobodne Diracove jednačbe,

$$\mathcal{H}u_k = \hbar\omega_k u_k, \quad (416)$$

$$\mathcal{H} \equiv -i\hbar c \vec{\alpha} \nabla + \beta m c^2, \quad (417)$$

$$\int d^3x u_k^\dagger(x) u_l(x) = \delta_{kl}, \quad (418)$$

$\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}$, $\beta = \gamma^0$ (vidi (352)), a a_k su **Jordan-Wignerovi operatori poništenja** (414).

* **Hamiltonijan** su **konstruirali** prema idejama **druge kvantizacije** Heisenberga i

Paulija, po kojima je Hamiltonijan jednak "očekivanoj vrijednosti" operatora \mathcal{H} (Eq. (417)) s obzirom na "valnu funkciju" ψ (Eq. (415)),

$$H = \int d^3x \psi^\dagger \mathcal{H} \psi = \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k = \sum_k^+ \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k^- \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k, \quad (419)$$

gdje \sum^+ (\sum^-) označuju sume po pozitivnim (negativnim) frekvencijama.

DZ. Izvedite izraz za Hamiltonijan (419).

Problem s operatorom (419) je da **nije pozitivno definitan**.

* Furry i Oppenheimer su riješili taj problem **primjenjujući Diracovu ideju da pozitron odgovara nedostatku negativno-energetskog elektrona**,

$$a_k^{e^-} \sim (b_{\bar{k}}^{e^+})^\dagger, \quad (a_k^{e^-})^\dagger \sim b_{\bar{k}}^{e^+}, \quad (420)$$

i simetriju antikomutacijskih relacija operatora stvaranja i poništenja,

$$[a_k, a_{\ell}^\dagger]_+ = \delta_{k\ell} \rightarrow [b_{\bar{k}}^\dagger, b_{\bar{\ell}}]_+ = \delta_{\bar{k}\bar{\ell}} = \delta_{k\ell}, \quad (421)$$

gdje je \bar{k} skup QB sa istim po iznosu a suprotnim po predznaku aditivnim QB od skupa k .

- Izjednačavanjem operatora sa lijeve i desne strane relacija (420) dobili su

$$\psi(x) = \sum_k^+ u_k(x) a_k + \sum_k^- u_k(x) b_{\bar{k}}^\dagger, \quad (422)$$

$$u_k(x) = u_k(\vec{x}) e^{-i\omega_k t} \quad (423)$$

$$\Rightarrow H = \sum_k^+ \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k^- \hbar |\omega_k| b_{\bar{k}}^\dagger b_{\bar{k}} + E_0, \quad (424)$$

$$E_0 = - \sum_k^- \hbar |\omega_k|. \quad (425)$$

- **Redefinirali su vakuumsko stanje** (inače bi redefinicija operatora (420) bila formalnost)

$$\tilde{\psi}_0, \quad a_k \tilde{\psi}_0 = 0 \quad (426)$$

$$\rightarrow \psi_0, \quad a_k \psi_0 = 0, \quad \omega_k > 0 \quad (427)$$

$$b_k \psi_0 = 0, \quad \omega_k < 0.$$

\Rightarrow **energija vakuuma** ψ_0 je E_0 (uoči da je **negativna**).

\Rightarrow Ako se energija mjeri prema energiji vakuuma, **fizikalni operator energije** je $\mathbf{H} - \mathbf{E}_0$ koji je pozitivno definitan.

\Rightarrow **Problem negativnih enegija je time riješen u TP za e^-** .

2.6.2 PESKIN-SCHROEDEROV PRISTUP KVANTIZACIJI DIRACOVOG POLJA

- Peskin-Schroederov pristup kvantizaciji baziran je na Paulijevom dokazu **spin-statistika teorema**. Pauli je pokazao da ako se pretpostavi **Lorentz invarijantnost, pozitivnost energije fizikalnih stanja, pozitivnost normi tih stanja i kauzalnost** da čestice cjelobrojnog spina zadovoljavaju **Bose-Einsteinovu statistiku** a čestice polucjelobrojnog spina zadovoljavaju **Fermi-Diracovu statistiku**.

- Peskin-Schroederov izvod koji slijedi je ilustracija tog teorema.

- U prvom dijelu izvoda se pokušava kvantizirati Diracovo polje komutatorima i taj izvod vodi na neslaganje sa Paulijevom pretpostavkom pozitivnosti energije čestica. Ostali uvjeti su ispunjeni.

- U drugom dijelu se zahtjeva i pozitivnost energije čestica i to vodi na zaključak da polja van svjetlosnog stošca moraju antikomutirati. Prirodno proširanje tog rezultata jest kvantizacija fermionskih polja antikomutatorima i ono se uz redefiniciju vakuuma pokazuje konzistentim sa zahtjevom pozitivne definitosti Hamiltonijana.

- Iz Lagrangijana (332),

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x), \quad (428)$$

slijedi da je kanonski impuls polja ψ jednak $i\psi^\dagger$, a odatle Hamiltonijan (vidi (352); usporedi sa (419))

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \bar{\psi}(-i\vec{\gamma} \cdot \nabla + m)\psi = \int d^3x \psi^\dagger h_D \psi, \\ h_D &= -i\vec{\alpha} \cdot \nabla + m\beta. \end{aligned} \quad (429)$$

A. Pokušaj kvantizacije komutacijskim relacijama

-Komutacijske relacije

- Ako se pretpostave kanonske **komutacijske** relacije za ψ i pripadni kanonski impuls $i\psi^\dagger$ slijedi,

$$[\psi_a(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})] = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ab}, \quad (430)$$

$$[\psi_a(\vec{x}), \psi_b(\vec{y})] = 0, \quad (431)$$

$$[\psi_a^\dagger(\vec{x}), \psi_b^\dagger(\vec{y})] = 0. \quad (432)$$

gdje su $a, b = 1, \dots, 4$ komponente polja ψ . Polja ψ i ψ^\dagger su u Schrödingerovoj reprezentaciji.

- Dijagonalizacija Hamiltonijana

- Kvantizacijom opće rješenje slobodne Diracove jednačbe (407)

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s (a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^s v^s(p) e^{ip \cdot x}), \quad (433)$$

$$\psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \sum_s (a_{\vec{p}}^s u^s(\vec{p}) + b_{-\vec{p}}^s v^s(-\vec{p})), \quad (434)$$

postaje operator ($b_{\vec{p}}^{s*}$ iz (407) zamjenjen je sa $b_{\vec{p}}^s$ u skladu sa raspravom u Peskin-Schroederu). Time **koeficijenti $a_{\vec{p}}^s$ i $b_{\vec{p}}^s$ postaju operatori**. U (434) je opće rješenje Diracove jednačbe napisano u Schrödingerovoj reprezentaciji u obliku koji je podestan za nalaženje koeficijenata $a_{\vec{p}}^s$ i $b_{\vec{p}}^s$.

DZ. Rabeći relacije ortonormiranosti (402), (404), (405) i (406) pokažite da su koeficijenti $a_{\vec{p}}^s$ i $b_{\vec{p}}^s$ jednaki

$$a_{\vec{p}}^s = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} u^{s\dagger}(\vec{p}) \int d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{x}), \quad (435)$$

$$b_{\vec{p}}^s = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} v^{s\dagger}(\vec{p}) \int d^3x e^{+i\vec{p} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{x}). \quad (436)$$

DZ. Rabeći izraze (435) i (436) za $a_{\vec{p}}^s$ i $b_{\vec{p}}^s$ i pretpostavljajući da vrijede komutacijske relacije (430), (431) i (432) pokažite da vrijede sljedeće komutacijske relacije za operatore $a_{\vec{p}}^s$ i $b_{\vec{p}}^s$,

$$[a_{\vec{p}}^r, a_{\vec{q}}^{s\dagger}] = [b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^{s\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs}; \quad (437)$$

$$[a_{\vec{p}}^r, a_{\vec{q}}^s] = [b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^s] = [a_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^s] = [a_{\vec{p}}^{r\dagger}, b_{\vec{q}}^{s\dagger}] = [a_{\vec{p}}^{r\dagger}, b_{\vec{q}}^s] = 0 \quad (438)$$

(ima 16 komutacijskih relacija ali iz navedenih se kompleksnom konjugacijom ili zamjenom članova u komutatorima mogu dobiti sve relacije).

DZ. Pretpostavljajući komutacijske relacije (437) i (438), izraza za Diracovo polje (434) i relacija potpunosti (409) i (411) pokažite da vrijede komutacijske relacije (430), (431) i (432).

- Rabeći izraz za Hamiltonijan (429), izraz za Diracovo polje (434), Diracove jednačbe (368) i (369) te relacije ortonormiranosti (405) i (406) može se naći **izraz za Hamiltonijan preko operatora stvaranja i poništenja**,

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s - E_{\vec{p}} b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s \right). \quad (439)$$

DZ. Provjerite izraz za Hamiltonijan (439)

- (439) predstavlja dijagonalizirani Hamiltonijan za Diracovo polje. Problem s njim je da **nije pozitivno definitan**.

- Taj se problem **ne može riješiti ni zamjenom $\mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{b}^\dagger$** , jer komutacijska relacija (437) za b i b^\dagger operatore nije simetrična na tu zamjenu. Stoga b ne može biti operator stvaranja. Time komutacijska pravila (430) vode na problem negativno energetske stanja.

- **Kauzalnost**

- Za provjeru kauzalnosti treba izračunati sve komutatore polja u Heisenbergovoj slici i provjeriti da li su oni jednaki nuli za prostornolike intervale. Nadalje, komutator bi morao predstavljati amplitude prijelaza **pozitivno energetskih čestica**, budući da negativno-energetske čestice nisu opažene.

- Rabeći izraz za Hamiltonijan (439) i Hausdorffovu formulu (153) nalazimo

$$e^{iHt} a_{\vec{p}}^s e^{-iHt} = a_{\vec{p}}^s e^{-iE_{\vec{p}}t}, \quad e^{iHt} b_{\vec{p}}^s e^{-iHt} = b_{\vec{p}}^s e^{+iE_{\vec{p}}t}. \quad (440)$$

DZ. Provjeri relacije (440).

Iz relacija (440) i izraza za Diracovo polje u Schrödingerovoj slici (434) slijede izrazi za polja ψ i $\bar{\psi}$ u Heisenbergovoj slici,

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^s v^s(p) e^{ip \cdot x} \right), \quad (441)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} \right). \quad (442)$$

- Dok su komutator ψ sa ψ i komutator $\bar{\psi}$ sa $\bar{\psi}$ očigledno jednaki nuli, komutator ψ sa $\bar{\psi}$ glasi

$$[\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)]_{x^0=y^0} = (\gamma_0)_{ab} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (443)$$

za ista vremena, odnosno (vidi (163))

$$[\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{ab} [\phi(x), \phi(y)] \quad (444)$$

za različita vremena, gdje je $\phi(x)$ skalarno polje iste mase kao $\psi(x)$. Budući da je komutator KG polja $[\phi(x), \phi(y)]$ jednak nuli izvan svjetlosnog stožca, isto vrijedi i za komutator $[\psi(x), \bar{\psi}(y)]$. Primjetite da je komutator $[\psi(x), \bar{\psi}(y)]$ c-broj.

- Uz pretpostavku da su $a_{\vec{p}}^s$ i $b_{\vec{p}}^s$ operatori poništenja (to diktiraju komutacijske relacije),

$$a_{\vec{p}}^s |0\rangle = 0, \quad b_{\vec{p}}^s |0\rangle = 0, \quad (445)$$

dobijamo

$$\begin{aligned} [\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] &= \langle 0 | [\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (446)$$

Samo prvi član doprinosi komutatoru. On predstavlja prijelaznu amplitudu između x i y prostorno-vremenskih točaka. Međutim, ta amplituda sadrži i prijenos pozitivno-energetskih stanja ($a_{\vec{p}}^s$) i negativno-energetskih stanja ($b_{\vec{p}}^s$). I opet se javlja **problem negativno energetskih stanja**.

- Primjetimo da su svi Paulijevi uvjeti osim pozitivnosti energije u gornjem izvodu ispunjeni. Lorentz invarijantnost – zato jer smo rabili polja koja zadovoljavaju Lorentz invarijantnu, Diracovu jednadžbu. Pozitivnost norme – slijedi iz komutacijskih relacija (437). Kauzalnost – eksplicite smo je pokazali.

B. Zahtjev pozitivnosti čestičnih energija - kvantizacija antikomutatorima

- **Pozitivnost energije i fizikalno značenje operatora $a_{\vec{p}}^{s\dagger}$ i $b_{\vec{p}}^s$**

- Pretpostavimo da prijelazna amplituda koja zadovoljava uvjet kauzalnosti sadrži samo amplitude koje opisuju propagaciju samo pozitivno energetskih čestica, tj. onih koji se javljaju uz fazu $e^{-ip \cdot (x-y)}$ za propagaciju iz y u x ili $e^{-ip \cdot (y-x)}$ za propagaciju iz x u y i da se ona može prikazati preko vakuumskih očekivanih vrijednosti produkata dvaju polja. Tada ona mora biti izgrađena od amplitude $\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$ koja može imati samo doprinose od $a_{\vec{p}}^{s\dagger}$ i $a_{\vec{p}}^s$ operatora i od amplitude $\langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle$ koja mora imati doprinos od $b_{\vec{p}}^s$ i $b_{\vec{p}}^{s\dagger}$. Također mora vrijediti

$$\begin{aligned} 0 &= a_{\vec{p}}^s | 0 \rangle = b_{\vec{p}}^{s\dagger} | 0 \rangle, \\ 0 &= \langle 0 | a_{\vec{p}}^{s\dagger} = \langle 0 | b_{\vec{p}}^s, \end{aligned} \quad (447)$$

To ukazuje na potrebu za izmjenom definicije vakuuma – $b_{\vec{p}}^{s\dagger}$ poništava vakuum. Nadalje, po kvantnim brojevima koje nose, operatori $a_{\vec{p}}^{s\dagger}$ i $b_{\vec{p}}^s$ djelovanjem na vakuum $|0\rangle$ moraju stvarati stanja impulsa \vec{p} (svojstvena stanja impulsa \vec{p}).

- Analizirajmo prvo amplitudu $\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$. Rabeći (447) za njen eksplicitni oblik dobijamo

$$\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip \cdot x + iq \cdot y}}{\sqrt{2E_{\vec{p}} 2E_{\vec{q}}}} \sum_{r,s} u^r(p) \bar{u}^s(q) \langle 0 | a_{\vec{p}}^r a_{\vec{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle . \quad (448)$$

- $a_{\vec{p}}^{s\dagger}$ i $b_{\vec{p}}^s$ kao operatori stvaranja, pozitivnost norme

- Ovdje ću odstupiti od Peskin-Schroederovog izvida jer oni pokušavaju zaključiti o svojstvima $\langle 0 | a_{\vec{p}}^r a_{\vec{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle$ operatora iz translacijske i rotacijske simetrije nečega (nije rečeno

čega). Operator $\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle$ se pokazuje da je translacijski invarijantan, ali rotacijski nije invarijantan, pa se taj argument ne može koristiti. Ja ću umjesto toga pretpostaviti da operatore $a_q^{s\dagger}$ i b_q^s mogu interpretirati kao operatore stvaranja čestica.

* Za daljnju raspravu uvedimo sljedeće oznake:

- opće kvantno stanje: Ψ_α

- vakuumsko stanje: $\Psi_0 = |0\rangle$

- jednočestično stanje: Ψ_q ; q je skup svih kvantnih brojeva jednočestičnog stanja

Uvodimo pozitivno definitnu normalizaciju jednočestičnih stanja koja je poopćenje relacije (131),

$$\langle \Psi_q | \Psi_{q'} \rangle = |N_q|^2 \delta_{qq'}. \quad (449)$$

Tu je $\delta_{qq'}$ i Kronecker i δ -funkcija koja izjednačuje sve kvantne brojeve dvaju čestica (npr. $\delta_{(\vec{p}s)(\vec{q}r)} = (2\pi)^3 \delta(\vec{p}-\vec{q}) \delta_{sr}$ (faktor $(2\pi)^3$ je konvencija Peskin-Schroederove knjige)), a N_q je normalizacijski faktor (u Lorentz invarijantnoj normalizaciji (131) on je jednak $(2E_{\vec{p}})^{1/2}$).

* Definirajmo operator stvaranja jednočestičnog stanja,

$$N_q a_q^\dagger \Psi_0 = \Psi_q, \quad (450)$$

$$N_q a_q^\dagger \Psi_\alpha = \Psi_{q\alpha}, \quad \text{ili} \quad N_q a_q^\dagger \Psi_{q_1 \dots q_n} = \Psi_{qq_1 \dots q_n}, \quad (451)$$

kao operator koji ubacuje kvantne brojeve jednočestičnog stanja ispred svih ostalih kvantnih brojeva.

* a_q , hermitski konjugirani operatoru a_q^\dagger , se pokazuje da se ponaša kao operator koji poništava kvantne brojeve jednog stanja. Pokažimo to za jednočestična stanja jer je to dovoljno za izvod koji slijedi,

$$N_q \langle \Psi_{q_1} | a_q^\dagger | 0 \rangle \stackrel{(450)}{=} \langle \Psi_{q_1} | \Psi_q \rangle = |N_q|^2 \delta_{qq_1} \quad (452)$$

$$\stackrel{(133)}{=} N_q \langle a_q \Psi_{q_1} | \Psi_0 \rangle \quad (453)$$

$$\Rightarrow N_q^* a_q | \Psi_{q_1} \rangle = |N_q|^2 \delta_{qq_1} \Psi_0 \quad (454)$$

$$\Rightarrow a_q a_{q_1}^\dagger \Psi_0 = \delta_{qq_1} \Psi_0. \quad (455)$$

U (452) smo rabili definiciju jednočestičnog stanja tj. operatora jednočestičnog stanja (450) i normalizaciju jednočestičnog stanja (449). U (453) rabili smo definiciju hermitski pridruženog operatora (133). Primjetite da u je polaznom matricnom elementu broj jednočestičnih stanja u početnom stanju za jedan manji od broja jednočestičnih stanja u konačnom matricnom elementu. U (455) smo pokazali kako djeluje kombinacija operatora stvaranja, $a_q a_{q_1}^\dagger$ na vakuumsko stanje.

* Interpretirajući $a_q^{s\dagger}$ i b_q^s kao operatore stvaranja čestica dobijamo,

$$\langle 0 | a_{\vec{p}}^r a_{\vec{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}) \delta^{rs}, \quad (456)$$

$$\langle 0 | b_{\vec{p}}^{r\dagger} b_{\vec{q}}^s | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}) \delta^{rs}. \quad (457)$$

Ovdje je primjenjen zahtjev **pozitivnosti normi jednočestičnih stanja**.

- Kvantne statistike

* Prije nego što izračunamo amplitude $a_p^{s\dagger}$ i a_p^s i b_p^s i $b_p^{s\dagger}$ proučimo izraze koji će naznačiti koje su moguće statistike u teoriji polja:

a. Ako se u stanju sa identičnim česticama (čestice koje imaju sve kvantne brojeve osim impulsa i spina jednake) zamijene identične čestice onda se dobija isto stanje. Stoga se njihov prikaz u Hilbertovom prostoru može razlikovati do na fazu

$$\Psi_{\dots, q_1, \dots, q_2, \dots} = e^{i\alpha} \Psi_{\dots, q_2, \dots, q_1, \dots} . \quad (458)$$

Za fazu $e^{i\alpha}$ može se pokazati da može biti jednaka samo ± 1 (vidi izvod u Weinberg I knjizi pogl. 4.1),

$$\Psi_{\dots, q_1, \dots, q_2, \dots} = \pm \Psi_{\dots, q_2, \dots, q_1, \dots} . \quad (459)$$

Ako čestice nisu identične zamjena takvih čestica u stanju u Hilbertovom prostoru nema određenu fazu, ali je uvriježena **konvencija** da zamjena takovih stanja daje istu fazu kao kada se zamjenjuju identične čestice.

b. Razmotrimo djelovanje $a_{q_2} a_{q_1}^\dagger$ i $a_{q_1}^\dagger a_{q_2}$ na jednočestično stanje,

$$a_{q_1}^\dagger a_{q_2} |\Psi_q\rangle = N_q a_{q_1}^\dagger \delta_{q_2 q} |\psi_0\rangle = \frac{N_q}{N_{q_1}} \delta_{q_2 q} |\Psi_{q_1}\rangle \quad (460)$$

$$a_{q_2} a_{q_1}^\dagger |\Psi_q\rangle = \frac{1}{N_{q_1}} a_{q_2} |\Psi_{q_1 q}\rangle = \delta_{q_1 q_2} |\Psi_q\rangle \pm \frac{N_q}{N_{q_1}} \delta_{q_2 q} |\Psi_{q_1}\rangle \quad (461)$$

$$\Downarrow$$

$$(a_{q_2} a_{q_1}^\dagger \mp a_{q_1}^\dagger a_{q_2}) |\Psi_q\rangle = \delta_{q_1 q_2} |\Psi_q\rangle . \quad (462)$$

Gornji predznak je za fazu $+1$ a donji za fazu -1 u (459). Rezultat (462) vrijedi za bilo koje jednočestično stanje. Račun se može provesti za bilo koje višestestično stanje i daje isti rezultat (vidi Weinberg I Pogl. 4.2). Stoga jednakost vrijedi operatorski,

$$(a_{q_2} a_{q_1}^\dagger \mp a_{q_1}^\dagger a_{q_2}) = \delta_{q_1 q_2} . \quad (463)$$

To pokazuje da operatori stvaranja zadovoljavaju ili **komutacijska ili antikomutacijska pravila kvantizacije**. Gornji predznak (komutator) odgovara **Bose-Einsteinovoj statistici** a donji **Fermi-Diracovoj**.

DZ. Razmatrajući $a_{q_1} a_{q_2} |\Psi_{qq'}\rangle$ pokažite da vrijedi relacija

$$(a_{q_1} a_{q_2} \mp a_{q_2} a_{q_1}) |\Psi_{qq'}\rangle = 0 . \quad (464)$$

Gornji predznak vrijedi za fazu $+1$ a donji za fazu -1 u (459). Pretpostavite da relacija vrijedi za opće stanje Ψ_α tj. ako se zamijeni $\Psi_{qq'} \rightarrow \Psi_\alpha$ (postupak za dokaz imate u

Weinberg I pogl. 4.2).

DZ. Razmatrajući $a_{q_1}^\dagger a_{q_2}^\dagger |\Psi_0\rangle$ pokažite da vrijedi relacija

$$(a_{q_1}^\dagger a_{q_2}^\dagger \mp a_{q_2}^\dagger a_{q_1}^\dagger) |\Psi_0\rangle = 0. \quad (465)$$

Gornji predznak vrijedi za fazu +1 a donji za fazu -1 u (459). Pretpostavite da relacija vrijedi za opće stanje Ψ_α tj. ako se zamijeni $\Psi_0 \rightarrow \Psi_\alpha$. (postupak za dokaz imate u Weinberg I pogl. 4.2).

- **Naznaka da za fermione vrijedi Fermi-Diracova statistika**

- **Vraćamo se na Peskin-Schroederov izvod.** Izračunajmo amplitude $\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$ i $\langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle$ primjenjujući (456) i (457) i (409) dobijamo

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \sum_s u_a^s(p) \bar{u}_b^s(p) e^{-ip(x-y)} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (\not{p} + m)_{ab} e^{-ip(x-y)} \\ &= (i\partial_x + m)_{ab} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)} \\ &= (i\partial_x + m)_{ab} \langle 0 | \phi(x) \phi^*(y) | 0 \rangle \\ &= (i\partial_x + m)_{ab} D(x-y). \end{aligned} \quad (466)$$

U prvom retku rabili smo (456). U drugom (409). U trećem smo rabili $p^\mu e^{-ip(x-y)} = i\partial^\mu e^{-ip(x-y)}$. U četvrtom smo rabili (160) tj. (164), gdje je ϕ skalarno polje iste mase kao spinorno polje ψ . Analogno nalazimo

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (\not{p} - m)_{ab} e^{+ip(x-y)} \\ &= -(i\partial_x + m)_{ab} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{ip(x-y)} \\ &= -(i\partial_x + m)_{ab} \langle 0 | \phi^*(y) \phi(x) | 0 \rangle \\ &= -(i\partial_x + m)_{ab} D(y-x). \end{aligned} \quad (467)$$

Za prostornolike intervale, $(x-y)^2 < 0$, $D(x-y)$ je simetričan na zamjenu $x \leftrightarrow y$. Stoga za $(x-y)^2 < 0$ vrijedi

$$\langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) + \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle = 0. \quad (468)$$

Rezultat (473) je nezavisna potvrda da fermione treba kvantizirati antikomutacijskim pravilima.

- Antikomutacijske relacije za operatore stvaranja i poništenja i kanonske komutacijske relacije fermionskih polja; Kauzalnost za observable

DZ. Pretpostavljajući da vrijede antikomutacijska pravila, (463), (464) i (465) – donji predznak,

$$\{a_{\vec{p}}^s, a_{\vec{q}}^{r\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs}, \quad (469)$$

$$\{b_{\vec{p}}^{s\dagger}, b_{\vec{s}}^r\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs}, \quad (470)$$

$$\text{svi ostali antikomutatori} = 0, \quad (471)$$

pokažite da vrijedi

$$\psi_a(x)\psi_b(x) + \psi_b(x)\psi_a(x) = 0, \quad (472)$$

$$\bar{\psi}_a(x)\bar{\psi}_b(x) + \bar{\psi}_b(x)\bar{\psi}_a(x) = 0. \quad (473)$$

Dakle ψ antikomutira sa ψ i $\bar{\psi}$ antikomutira sa $\bar{\psi}$ neovisno o izboru točkaka x i y . **Napomena:** Pripazite, $b_{\vec{p}}^s$ je operator stvaranja u (441) i (442).

Zbog sačuvanja spina u observablama (Hamiltonijan, operator impulsa, operator naboja itd.) se fermionska polja javljaju samo u parovima, tj. u parnom broju u svakoj od observabli. Za svaki par takvih observabli \mathcal{O}_1 i \mathcal{O}_2 vrijedi da komutiraju za prostornolike intervale

$$[\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)] = 0, \quad (x - y)^2 < 0. \quad (474)$$

Drugim riječima za observable je ispunjen uvjet kauzalnosti ako vrijede antikomutacijske relacije (468), (472) i (473).

DZ. Za dva operatora oblika $\mathcal{O}_1(x) = \bar{\psi}(x)o_1\psi(x)$ i $\mathcal{O}_2(y) = \bar{\psi}(y)o_2\psi(y)$ pokažite da vrijede uvjeti kauzalnosti (474). **Napomena:** $o_{1,2}$ su 4×4 matrice, ali mogu sadržavati i derivacije, konstante i sl.

Rabeći (469), (470) i (471) lako je pokazati da vrijede istovremene kanonske antikomutacijske relacije.

$$\{\psi_a(x), \psi_b^\dagger(y)\}_{x^0=y^0} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ab}, \quad (475)$$

$$\{\psi_a(x), \psi_b(y)\}_{x^0=y^0} = 0, \quad (476)$$

$$\{\psi_a^\dagger(x), \psi_b^\dagger(y)\}_{x^0=y^0} = 0. \quad (477)$$

Zapravo relacije (476) i (477) direktno slijede iz općenitijih relacija (472) i (473) dok (475) slijedi iz (469), (470) i (471),

$$\{\psi_a(x), \psi_b^\dagger(y)\}_{x^0=y^0}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} ((\not{p} + m)\gamma^0)_{ab} e^{-ip(x-y)} \Big|_{x^0=y^0} \\
&+ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} ((\not{p} - m)\gamma^0)_{ab} e^{+ip(x-y)} \Big|_{x^0=y^0} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \mathbf{1}_{ab} = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \delta_{ab} .
\end{aligned} \tag{478}$$

DZ. Provjeri (478).

DZ. U relacijama (435) i (436) nigdje nije pretpostavljeno da vrijede komutacijske ili antikomutacijske relacije. Stoga (435) i (436) vrijede i za polja koja antikomutiraju. Pretpostavite da vrijede kanonske antikomutacijske relacije (475), (476) i (477) i pretpostavite da još ne znate da vrijede antikomutacijske relacije (469), (470) i (471) za operatore stvaranja i poništenja. Rabeći izraze (435) i (436) pokažite da vrijede antikomutacijske relacije (469), (470) i (471).

- Pozitivna definitnost Hamiltonijana

- Polazeći od izraza za Hamiltonijan (352) odnosno (429), izraza za polje (434), relacija ortonormiranosti (402), (404) i (406), te Diracovih jednadžbi u impulsnom prostoru (368) i (369) dobija se izraz za Hamiltonijan preko operatora stvaranja i poništenja (479). Upotrebom antikomutacijske relacije (470) dobija se (480).

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \sum_s (a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s - b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s) \tag{479}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \sum_s (a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s + \tilde{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} \tilde{b}_{\vec{p}}^s) - \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)}_{E_0} . \tag{480}$$

U izvodu se javljaju izrazi s lijeve strane sljedećih jednakosti

$$(\vec{\alpha}\vec{p} + m\gamma^0)u^s(p) = E_p u^s(p), \tag{481}$$

$$(-\vec{\alpha}\vec{p} + m\gamma^0)v^s(p) = -E_p v^s(p) . \tag{482}$$

Jednakosti su posljedica Diracovih jednadžbi u impulsnom prostoru (368) i (369). $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)$ se može identificirati sa volumenom u kojemu se uzima da se sve nalazi,

$$(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}) = \int d^3x = V . \tag{483}$$

- U jednadžbi (480) je $-E_0$ fermionska energija vakuuma. Energija vakuuma se zanemaruje u (perturbativnim) računima u teoriji polja. To odgovara formiranju tzv. normalno uređenog operatora Hamiltonijana,

$$: H : = H - \langle 0|H|0 \rangle . \tag{484}$$

- Primjetite da je fermionska vakuumska energija **negativna** za razliku od bozonske energije vakuuma, i da je po apsolutnom iznosu upravo jednaka energiji vakuuma kompleksnog skalarnog polja iste mase (vidi (1507)).

DZ. Provjerite izraze (479) i (480) za Hamiltonijan.

- Kada bi se operator $b_{\vec{p}}^{s\dagger}$ interpretirao kao operator stvaranja tada bi Hamiltonijan bio negativno definitan. Zahtjev pozitivne definitnosti Hamiltonijana vodi na isti rezultat kao zahtjev propagacije samo pozitivno-energetskih čestica : $b_{\vec{p}}^s$ se mora interpretirati kao operator stvaranja.

- Redefinicijom

$$\tilde{b}_{\vec{p}}^s \equiv b_{\vec{p}}^{s\dagger}, \quad \tilde{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} \equiv b_{\vec{p}}^s, \quad (485)$$

dobija se prirodan izraz za Hamiltonijan. Također i definicija vakuuma (447) sada izgleda prirodno,

$$a_{\vec{p}}^s|0\rangle = \tilde{b}_{\vec{p}}^s|0\rangle = 0. \quad (486)$$

- Primjetimo da smo u raspravi o kauzalnosti rabili uvjete **pozitivnosti energije čestica**, **pozitivnosti norme**, **relativističke invarijantnosti** (rabimo Diracova polja) i **kauzalnosti** (observable komutiraju za prostornolike intervale) – i dobili smo **Fermi-Diracovu statistiku**. **Ispravnost** pristupa je potvrđena analizom **pozitivne definitnosti Hamiltonijana**. Uvedena je nova oznaka $\tilde{b}_{\vec{p}}^{s\dagger}$ za operator $b_{\vec{p}}^s$ koji je po svojim svojstvima bio operator stvaranja fermiona (uprkos neprikladnom imenu), a vakuum je definiran tako da ga poništavaju operatori $a_{\vec{p}}^s$ i $\tilde{b}_{\vec{p}}^s$.

- U formulama koje slijede ćemo operator $\tilde{b}_{\vec{p}}^s$ označavati sa $b_{\vec{p}}^s$.

- **Kvantizirano Diracovo polje – popis rezultata**

- **Operatori polja** (vidi (441), (442))

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right), \quad (487)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} \right). \quad (488)$$

- **Antikomutacijske relacije operatora stvaranja i poništenja** su (vidi (469), (470) i (471))

$$\{a_{\vec{p}}^r, a_{\vec{q}}^{s\dagger}\} = \{b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs} \quad (489)$$

a sve ostale antikomutacijske relacije su jednake nuli.

- **Kanonske antikomutacijske relacije za polja** ψ i ψ^\dagger su (vidi (475), (476) i (477))

$$\{\psi_a(x), \psi_b^\dagger(y)\}_{x^0=y^0} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ab}$$

$$\{\psi_a(x), \psi_b(y)\}_{x^0=y^0} = \{\psi_a^\dagger(x), \psi_b^\dagger(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \quad (490)$$

- **Vakuu** je definiran kao stanje koje zadovoljava (vidi (486))

$$a_{\vec{p}}^s |0\rangle = b_{\vec{p}}^s |0\rangle = 0. \quad (491)$$

- **Hamiltonijan** (normalno uređen) (vidi (352), (480) i (484)):

$$H = \int d^3x : \bar{\psi}(x)(-i\vec{\gamma} \cdot \nabla + m)\psi(x) : \quad (492)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \sum_s (a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s). \quad (493)$$

- **Operator impulsa** (normalno uređen) (vidi (353)):

$$\vec{P} = \int d^3x : \psi^\dagger(x)(-i\nabla)\psi(x) : \quad (494)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \sum_s (a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s). \quad (495)$$

- **Operator naboja** (normalno uređen) (vidi (347)):

$$Q = \int d^3x \psi^\dagger(x)\psi(x) \quad (496)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s - b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s). \quad (497)$$

DZ. Dokažite izraze za operator impulsa (495) i za operator naboja (497).

- Iz jednadžbi (493), (495) i (497) slijedi da operatori $a_{\vec{p}}^{s\dagger}$ i $b_{\vec{p}}^{s\dagger}$ tvore čestice energije $+E_{\vec{p}}$ i impulsa \vec{p} te da $a_{\vec{p}}^{s\dagger}$ stvara česticu naboja 1 a $b_{\vec{p}}^{s\dagger}$ česticu naboja -1 .

Napomena: Primjetite da integral (496), prema (497) nije pozitivno definitna veličina – dakle podintegralna funkcija se ne može se interpretirati kao gustoća vjerojatnosti. Jedna od Diracovih osnovnih motivacija za nalaženje Diracove jednadžbe je bila Born-ova interpretacija $\psi(x)$ kao amplitude vjerojatnosti. Ovdje je pokazano da je ona neispravna.

- **Jednočestična stanja,**

$$|\vec{p}, s\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle \quad (498)$$

su definirana tako da je njihov skalarni produkt,

$$\langle \vec{p}, s | \vec{q}, r \rangle = 2E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs} \quad (499)$$

Lorentz invarijantan.

2.6.3 Lorentz transformacije i spin Diracove čestice

A. Transformacije polja sa stanovišta transformacija u Hilbertovom prostoru

- U Peskin-Schoederovoj knjizi se iz Lorentz invarijantnosti norme (499) zaključuje o transformaciji operatora stvaranja i poništenja na Lorentzove transformacije,

$$U(\Lambda)a_p^s U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda p}}{E_p}} a_{\Lambda p}^s, \quad (500)$$

uz komentar da to vrijedi ako je os kvantizacije paralelna boostu ili osi rotacije. Taj rezultat nije točan jer zanemaruje Wignerovu rotaciju. Kako se u polju integrira po svim mogućim smjerovima impulsa komentar o osi kvantizacije nije dovoljan da osigura transformaciju bez Wignerove rotacije (500).

- Lorentz transformacija stanja u Hilbertovom prostoru, Lorentz transformacija operatora stvaranja i poništenja

- Ispravan rezultat se dobiva iz Lorentzove transformacije stanja u Hilbertovom prostoru. Stanja u Hilbertovom prostoru, $\Psi_{p\sigma}$, su svojstvena stanja operatora 4-impulsa P^μ (vidi (1567)) i još jednog operatora koji komutira sa P^μ (obično treća komponenta momenta impulsa J_3). Može se pokazati da je kvantni broj σ diskretan – preciznije da može imati samo cjelobrojne i polucjelobrojne vrijednosti. Lorentzova transformacija stanja $\Psi_{p\sigma}$ daje stanje 4-impulsa Λp (vidi (1574)) ali ne nužno i iste vrijednosti svojstvene vrijednosti σ (vidi (1574)). Za nalaženje matrica koje opisuju miješanje svojstvenih vrijednosti σ potrebno je uvesti pojam standardnog 4-impulsa k^μ , preko kojeg se može izraziti bilo koji 4-impuls čestice (vidi (1577)). Stanje $\Psi_{p\sigma}$ se onda definira preko stanja $\Psi_{k\sigma}$ relacijom (1578). Lorentz transformacija toga stanja $U(\Lambda)\Psi_{p\sigma}$ može se prikazati preko stanja standardnog impulsa $\Psi_{k\sigma}$ na kojeg djeluju dvije Lorentzove transformacije - prva koja ne mijenja standardni impuls k^μ i druga koja predstavlja boost koji čestici daje 4-impuls Λp , $U(L(\Lambda p))$, (vidi (1579)). Prva transformacija miješa samo svojstvene vrijednosti σ , zove se Wignerova rotacija ($W(\Lambda, p)$), i može se prikazati matrično (vidi (1582)), preko matrica $D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))$. Skup svih Lorentzovih transformacija koje ne mijenjaju 4-vektor k^μ zove se mala grupa Lorentzovih transformacija s obzirom na smjer k^μ (analogno se definira mala grupa bilo koje grupe s obzirom na neki smjer u vektorskom prostoru stanja na koji ta grupa djeluje). Konačan rezultat djelovanja opće Lorentzove transformacije na stanje $\Psi_{p\sigma}$ glasi (vidi (1584))

$$U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} \stackrel{(1579,1582)}{=} N(p)D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))U(L(\Lambda p))\Psi_{k\sigma'} \quad (501)$$

$$\stackrel{(1578)}{=} \left(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \right) D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))\Psi_{\Lambda p, \sigma'} \quad (501)$$

$$\stackrel{(1607)}{=} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))\Psi_{\Lambda p, \sigma'} . \quad (502)$$

U (502) je uvrštena Peskin-Schroederova normalizacija stanja. Iz (502), (498) i invarijantnosti vakuuma na Lorentzove transformacije slijedi

$$U(\Lambda)a_{\vec{p}}^{s\dagger}U^\dagger(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\vec{p}}}{E_{\vec{p}}}}D_{s's'}(W(\Lambda, p))a_{\Lambda\vec{p}}^{s\dagger}, \quad (503)$$

$$\Rightarrow U(\Lambda)a_{\vec{p}}^sU^\dagger(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\vec{p}}}{E_{\vec{p}}}}D_{ss'}(W^{-1}(\Lambda, p))a_{\Lambda\vec{p}}^s. \quad (504)$$

(U (504) rabimo $D_{s's'}^*(W(\Lambda, p)) = D_{ss'}^\dagger(W(\Lambda, p)) = D_{ss'}^{-1}(W(\Lambda, p)) = D_{ss'}(W^{-1}(\Lambda, p))$). Primjetite da se formule (500) i (504) razlikuju za Wignerovu rotaciju. Također, iz definicije Wignerove rotacije (1580) i činjenice da se u izrazu za polje (487) integrira po svim smjerovima impulsa \vec{p} slijedi da se Wignerova rotacija ne može zanemariti zbog posebnog izbora kvantizacijske osi ili smjera boosta.

- Skalarno polje - Lorentzova transformacija u Hilbertovom prostoru

- Transformaciju fermionskog polja pri Lorentzovim transformacijama naći ćemo indirektno studirajući Lorentzovu transformaciju skalarnog polja u Hilbertovom prostoru. Transformacija skalarnog polja je jednostavnija jer stanja skalarnih čestica po definiciji nemaju spina, a i samo polje nema spina (iako je to očigledno jer je polje jednokomponentno – to ćemo eksplicite pokazati u Dodatku 10), pa stoga nema Wignerove rotacije ni za operatore stvaranja i poništenja ni sa samo polje. Formule (503) i (504) vrijede za stanja čestica bilo kojeg spina, pa stoga i za skalarnu česticu. Odatle, rabeći (155) odnosno (1504) nalazimo

$$\begin{aligned} & U(\Lambda)\phi(x)U^{-1}(\Lambda) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left(\underbrace{U(\Lambda)\sqrt{2E_{\vec{p}}}a_{\vec{p}}U^{-1}(\Lambda)}_{\sqrt{2E_{\Lambda\vec{p}}}a_{\Lambda\vec{p}}} e^{-ip \cdot x} + \underbrace{U(\Lambda)\sqrt{2E_{\vec{p}}}b_{\vec{p}}^\dagger U^{-1}(\Lambda)}_{\sqrt{2E_{\Lambda\vec{p}}}b_{\Lambda\vec{p}}^\dagger} e^{ip \cdot x} \right) \\ &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}'}} \left(\underbrace{\sqrt{2E_{\vec{p}'}}a_{\vec{p}'}}_{e^{-ip'(\Lambda x)}} e^{-i(\Lambda^{-1}p')x} + \underbrace{\sqrt{2E_{\vec{p}'}}b_{\vec{p}'}^\dagger}_{e^{ip'(\Lambda x)}} e^{i(\Lambda^{-1}p')x} \right) \\ &= \phi(\Lambda x). \end{aligned} \quad (505)$$

Primjetite da je transformacija skalarnog polja u Hilbertovom prostoru upravo suprotna od one u (235), slučaj B.

- Transformacija polja sa više komponenti, transformacija spinornog polja

Iz transformacija koje smo napravili na primjeru skalarnog polja jasno je da će se pri transformaciji operatora stvaranja i poništenja zadanih sa (503) i (504) svakom polju

efektivno mijenjati koordinata po pravilu

$$x \rightarrow \Lambda x . \quad (506)$$

Iz toga slijedi da je transformacija općeg polja suprotna od one u (250) slučaj B.,

$$\Phi_a(x) \rightarrow U(\Lambda)\Phi_a(x)U^{-1}(\Lambda) = M_{ab}(\Lambda^{-1})\Phi_b(\Lambda x) . \quad (507)$$

Prirodno je pitanje zašto se Lorentzova transformacija polja $M_{ab}(\Lambda^{-1})$ javlja sa Λ^{-1} a ne sa Λ . Razlog tome jest što je transformacija koordinata matrice tipa – ona se lovi uvijek na vanjski indeks,

$$x \rightarrow x' = \Lambda_1 x \rightarrow x'' = \Lambda_2 x' = \Lambda_2 \Lambda_1 x, \quad (508)$$

dok je transformacija $U(\Lambda) \dots U^{-1}(\Lambda)$ operatorskog tipa – ona se lovi uvijek na unutarnji indeks (zanemarujući koordinatu x),

$$\begin{aligned} \Phi_a &\rightarrow M_{ab}(\Lambda_1^{-1})\Phi_b \rightarrow M_{ab}(\Lambda_1^{-1})(M_{bc}(\Lambda_2^{-1})\Phi_c) \\ &= M_{ac}(\Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1})\Phi_c = M_{ac}((\Lambda_2\Lambda_1)^{-1})\Phi_c . \end{aligned} \quad (509)$$

U drugom retku (509) je upotrebljena činjenica da matrice $M(\Lambda)$ čine reprezentaciju Lorentzove grupe, a zatim je primjenjeno pravilo za množenje inverznih matrica. Primjetite da ako bi zavisnost M matrica bila o Λ a ne o Λ^{-1} onda bi se u konačnom rezultatu javljao suprotan poredak Λ matrica nego u transformaciji (508), što ne smije biti. Zbog toga transformacije koordinata x i polja Φ moraju biti međusobno inverzne.

- Rabeći Lorentzovu transformaciju za opće polje u Hilbertovom prostoru (507), možemo odmah napisati Lorentzovu transformaciju za spinorno polje u Hilbertovom prostoru,

$$\psi(x) \rightarrow U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\psi(\Lambda x) \quad (510)$$

$$\begin{aligned} = &\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{ss'} \left(a_{\Lambda\vec{p}}^{s'} e^{-ip \cdot x} \sqrt{\frac{E_{\Lambda\vec{p}}}{E_{\vec{p}}}} D_{ss'}(W^{-1}(\Lambda, p)) u^s(p) \right. \\ &\left. + b_{\Lambda\vec{p}}^{s'\dagger} e^{ip \cdot x} \sqrt{\frac{E_{\Lambda\vec{p}}}{E_{\vec{p}}}} D_{ss'}^*(W^{-1}(\Lambda, p)) v^s(p) \right) \end{aligned} \quad (511)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s e^{-ip \cdot (\Lambda x)} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} u^s(p) + b_{\vec{p}}^{s\dagger} e^{ip \cdot (\Lambda x)} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} v^s(p) \right) . \quad (512)$$

Prvi redak je transformacija za spinorno polje koje smo našli iz općih argumenata. Drugi redak je raspis $U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda)$ preko (503) i (504). Treći redak je raspis $\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\psi(\Lambda x)$. Primjetite da iz (510) tj. raspisa te jednadžbe u (511) i (512) slijede netrivialne veze između reprezentacija Lorentzove transformacije u Hilbertovom prostoru i reprezentacije

Lorentzove transformacije koja definira polje. Te veze definiraju kojim reprezentacijama Lorentzove grupe pripadaju polja za danu reprezentaciju Lorentzove grupe operatora stvaranja i poništenja. One također definiraju spin polja. Također one definiraju oblik koeficijentnih tj. valnih funkcija $u^s(p)$ i $v^s(p)$. Više detalja o tome možete naći u Dodatku 10.

- Nalaženje spina fermionskog polja i fermionskih čestica preko Noetherine sačuvane veličine J_3

- Za sada znamo da operatori stvaranja $a_p^{s\dagger}$ i $b_p^{s\dagger}$ imaju dva stanja $s = 1, 2$ ali ne znamo kako su ta stanja povezana sa spinom. Da bismo to saznali treba nam operator kutne količine gibanja u teoriji polja.

- Rabeći sačuvane Noetherine naboje za Lorentzove transformacije za fermionsko polje (359),

$$\begin{aligned} Q^{\alpha\beta} &= \int d^3x \psi^\dagger(x) (J^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}) \psi(x) \\ &= \int d^3x \psi^\dagger(x) \left[i(x^\alpha \partial^\beta - x^\beta \partial^\alpha) + \frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \right] + (g^{0\beta} x^\alpha - g^{0\alpha} x^\beta) \bar{\psi}(x) (i\gamma^\lambda \partial_\lambda - m) \end{aligned} \quad (513)$$

koje smo izveli za transformaciju polja,

$$\psi(x) \rightarrow \underbrace{\left(1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right)}_{\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}} \underbrace{\psi(x - \omega x)}_{\Lambda x} \quad (514)$$

(pripadna transformacija koordinata je $x \rightarrow x - \omega x$) nalazimo za operatore kutne količine gibanja,

$$\begin{aligned} Q^{ij} &= \int d^3x \psi^\dagger(x) (J^{ij} + S^{ij}) \psi(x) \\ &= \int d^3x \psi^\dagger(x) \left(i(x^i \partial^j - x^j \partial^i) + \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] \right) \psi(x) \\ &= \epsilon_{ijk} \int d^3x \psi^\dagger(x) \left(L_k + \frac{1}{2} \Sigma_k \right) \end{aligned} \quad (515)$$

Tu je Σ_3 jedna od tri matrice

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (516)$$

Stoga

$$\begin{aligned} \vec{J} &\equiv (Q^{23}, Q^{31}, Q^{12}) \\ &= \int d^3x \psi^\dagger(x) (-1) \left(\vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \right) \psi(x). \end{aligned} \quad (517)$$

Uvrštavajući izraze

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [u(p, s)b(p, s)e^{-ipx} + v(p, s)d^\dagger(p, s)e^{ipx}] \quad (518)$$

$$\psi^\dagger(x) = \sum_{s'} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} [u(p', s')b(p', s')e^{-ip'x} + v(p', s')d^\dagger(p', s')e^{ip'x}] \quad (519)$$

rabeći

$$i(x^i \partial^j - x^j \partial^i)e^{\pm ipx} = i(\partial_p^i p^j - \partial_p^j p^i)e^{\pm ipx} \quad (520)$$

parcijalno integrirajući po p , integrirajući po d^3x i provodeći integraciju po ∂_p^i dobijamo

$$\begin{aligned} Q^{ij} &= i \int d^3x \sum_{ss'} \int \frac{d^3p' d^3p}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{p'} 2E_p}} \\ & [u^\dagger(p', s')b^\dagger(p', s')e^{ip'x}((x^i \partial^j - x^j \partial^i + \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j])e^{-ipx})u(p, s)b(p, s) \\ & + u^\dagger(p', s')b^\dagger(p', s')e^{ip'x}((x^i \partial^j - x^j \partial^i + \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j])e^{ipx})v(p, s)d^\dagger(p, s) \\ & + v^\dagger(p', s')d(p', s')e^{-ip'x}((x^i \partial^j - x^j \partial^i + \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j])e^{-ipx})u(p, s)b(p, s) \\ & + v^\dagger(p', s')d(p', s')e^{-ip'x}((x^i \partial^j - x^j \partial^i + \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j])e^{ipx})v(p, s)d^\dagger(p, s)] \quad (521) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= i \int d^3x \sum_{ss'} \int \frac{d^3p' d^3p}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{p'} 2E_p}} \\ & [u^\dagger(p', s')b^\dagger(p', s')e^{ip'x-ipx}(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i + \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j])u(p, s)b(p, s) \\ & + u^\dagger(p', s')b^\dagger(p', s')e^{ip'x+ipx}(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i + \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j])v(p, s)d^\dagger(p, s) \\ & + v^\dagger(p', s')d(p', s')e^{-ip'x-ipx}(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i + \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j])u(p, s)b(p, s) \\ & + v^\dagger(p', s')d(p', s')e^{-ip'x+ipx}(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i + \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j])v(p, s)d^\dagger(p, s)] \quad (522) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= i \int d^3x \sum_{ss'} \int \frac{d^3p' d^3p}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{p'} 2E_p}} \\ & [(u^\dagger(p, s')(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i + \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j])u(p, s))b^\dagger(p, s')b(p, s) \\ & + e^{2iE_p t}(u^\dagger(-\vec{p}, s')(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i + \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j])v(p, s))b^\dagger(-\vec{p}, s')d^\dagger(p, s) \\ & + e^{-2iE_p t}(v^\dagger(-\vec{p}, s')(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i + \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j])u(p, s))d(-\vec{p}, s')b(p, s) \\ & + (v^\dagger(p, s')(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i + \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j])v(p, s))d(p, s')d^\dagger(p, s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +u^\dagger(p, s')u(p, s)b^\dagger(p, s')(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i)b(p, s) \\
& +e^{2iE_p t}u^\dagger(-\vec{p}, s')v(p, s)b^\dagger(-\vec{p}, s')(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i)d^\dagger(p, s) \\
& +e^{-2iE_p t}v^\dagger(-\vec{p}, s')u(p, s)d^\dagger(-\vec{p}, s')(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i)b(p, s) \\
& +v^\dagger(p, s')v(p, s)d(p, s')(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i)d^\dagger(p, s)
\end{aligned} \tag{523}$$

Rabimo relacije ortonormiranosti

$$\begin{aligned}
u^\dagger(p, s')u(p, s) &= v^\dagger(p, s')v(p, s) = 2e_p \delta_{s's} \\
u^\dagger(-\vec{p}, s')v(p, s) &= v^\dagger(-\vec{p}, s')u(p, s) = 0.
\end{aligned} \tag{524}$$

Zamjenjujemo $d(p', s)$ i $d^\dagger(p, s)$ u zadnjem sumadu i parcijalno integriramo po p

$$d(p, s')(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i)d^\dagger(p, s) \rightarrow d^\dagger(p, s)(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i)d(p, s'), \tag{525}$$

Izražavamo valne funkcije $u(p, s)$ i $v(p, s)$ preko boosta (vidi (382) i (385))

$$\begin{aligned}
\Lambda_{1/2}(L(\vec{p})) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\sigma \cdot \vec{p}}{m}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\bar{\sigma} \cdot \vec{p}}{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p \cdot \sigma + m}{\sqrt{2m(E_p + m)}} & 0 \\ 0 & \frac{p \cdot \bar{\sigma} + m}{\sqrt{2m(E_p + m)}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{p \cdot \gamma \gamma^0 + m}{\sqrt{2m(E_p + m)}}
\end{aligned} \tag{526}$$

i pripadnih valnih funkcija u sustavu mirovanja,

$$u(p, s) = \frac{p \cdot \gamma \gamma^0 + m}{\sqrt{2m(E_p + m)}}u(0, s), \quad v(p, s) = \frac{p \cdot \gamma \gamma^0 + m}{\sqrt{2m(E_p + m)}}v(0, s) \tag{527}$$

Primjenjujemo operatore koji se javljaju u prva četiri člana u (523) na valne funkcije $u(p, s)$ i $v(p, s)$,

$$\begin{aligned}
\left(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i + \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j]\right)u(p, s) &= (-p^j \partial_p^i + p^i \partial_p^j + \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j])\frac{p \cdot \gamma \gamma^0 + m}{\sqrt{2m(E_p + m)}}u(0, s) \\
&= \frac{p \cdot \gamma \gamma^0 + m}{\sqrt{2m(E_p + m)}}\frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j]u(0, s), \\
\left(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i + \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j]\right)u(p, s) &= \frac{p \cdot \gamma \gamma^0 + m}{\sqrt{2m(E_p + m)}}\frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j]v(0, s).
\end{aligned} \tag{528}$$

Primjenom (524), (525), (526), (527) i (528) na (523) dobijamo

$$Q^{ij} = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [b^\dagger(p, s)i(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i)b(p, s) + d^\dagger(p, s)i(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i)d(p, s)]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{ss'} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \\
& [u^\dagger(p, s') \Lambda_{1/2}(p) \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] u(0, s) b^\dagger(p, s') b(p, s) \\
& + e^{2iE_p t} u^\dagger(-\vec{p}, s') \Lambda_{1/2}(p) \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] v(0, s) b^\dagger(-\vec{p}, s') d^\dagger(p, s) \\
& + e^{-2iE_p t} v^\dagger(-\vec{p}, s') \Lambda_{1/2}(p) \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] u(0, s) d(-\vec{p}, s') b(p, s) \\
& + v^\dagger(p, s') \Lambda_{1/2}(p) \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] v(0, s) d(p, s') d^\dagger(p, s)] \tag{529}
\end{aligned}$$

Nađimo izraz za Q^{12} . Matrica $i[\gamma^2, \gamma^2]/4$ jednaka je spinskom operatoru

$$\frac{i}{4} [\gamma^2, \gamma^2] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} = S_3. \tag{530}$$

Valne funkcije $u(0, s)$ i $v(0, s)$, $s = 1, 2$,

$$u(0, s) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix}, \quad v(0, s) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ -\chi_s \end{pmatrix} \tag{531}$$

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{532}$$

su svojstvena stanja S_3 , sa svojstvenim vrijednostima $m_s = 1/2, -1/2$ za $s = 1, 2$. Rabeći to svojstvo, primjenjujući zatim operator boosta na stanja u mirovanju i primjenjujući relacije ortogonalnosti (524) nalazimo za normalno uređeni operator : Q^{12} :

$$\begin{aligned}
: Q^{12} : & = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \\
& [b^\dagger(p, s) i(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i) b(p, s) + m_s b^\dagger(p, s) b(p, s) \\
& + d^\dagger(p, s) i(-\partial_p^i p^j + \partial_p^j p^i) d(p, s) - m_s d^\dagger(p, s) d(p, s)] \tag{533}
\end{aligned}$$

Djelovanjem tog operatora na jednočestično stanje u mirovanju (p^i),

$$\begin{aligned}
: Q^{12} : b^\dagger(0, s) |0\rangle & = m_s b^\dagger(0, s) |0\rangle \\
: Q^{12} : d^\dagger(0, s) |0\rangle & = -m_s d^\dagger(0, s) |0\rangle \tag{534}
\end{aligned}$$

Stoga čestična stana za $s=1,2$ imaju projekciju spina $1/2, -1/2$ dok antičestična stana za $s=1,2$ imaju projekciju spina $-1/2, 1/2$.

- Diracov propagator

- Kao i u konstrukciji KG propagatora u konstrukciji Diracovog propagatora rabimo amplitude prijelaza koje zadovoljavaju slobodnu jednadžbu gibanja (ovdje je to Diracova jednadžba)

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \sum_s u_a^s(p)\bar{u}_b^s(p)e^{-ip\cdot(x-y)} \\ &= (i\cancel{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)}, = (i\cancel{\partial}_x + m)_{ab} \langle 0|\phi(x)\phi^*(y)|0\rangle\end{aligned}\quad (535)$$

$$\begin{aligned}\langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \sum_s v_a^s(p)\bar{v}_b^s(p)e^{-ip\cdot(y-x)} \\ &= -(i\cancel{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip\cdot(y-x)} = -(i\cancel{\partial}_x + m)_{ab} \langle 0|\phi^*(y)\phi(x)|0\rangle.\end{aligned}\quad (536)$$

- Od tih amplituda se konstruiraju Greenove funkcije koje zadovoljavaju razne rubne uvjete. Greenove funkcije moraju zadovoljavati jednadžbu gibanja (ovdje Diracovu jednadžbu) za točkasti izvor,

$$(i\cancel{\partial} - m)S(x - y) = i\delta^{(4)}(x - y)\mathbf{1}_{4\times 4}.\quad (537)$$

Kao i kod KG polja, one se konstruiraju kao linearna kombinacija amplituda koje zadovoljavaju homogenu slobodnu jednadžbu gibanja pomnoženih sa vremenskim θ funkcijama ($\theta(x^0 - y^0)$ i $\theta(y^0 - x^0)$),

$$\begin{aligned}s_a\theta(s_A(x^0 - y^0))\langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle + s_B\theta(s_B(x^0 - y^0))\langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle \\ = (i\cancel{\partial} + m)_{ab}[s_A\theta(s_A(x^0 - y^0))\langle 0|\phi(x)\phi^*(y)|0\rangle - s_B\theta(s_B(x^0 - y^0))\langle 0|\phi^*(y)\phi(x)|0\rangle] \\ = (i\cancel{\partial} + m)_{ab}D_X(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot(x-y)}(\cancel{p} + m)_{ab}}{(p^0 - E_p + is_A\eta)(p^0 + E_p + is_B\eta)} \\ \stackrel{R}{=} \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) + \bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle = S_R(x - y)_{ab} \\ \stackrel{A}{=} -\theta(y^0 - x^0)\langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) + \bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle = S_A(x - y)_{ab} \\ \stackrel{F}{=} \langle 0|\theta(x^0 - y^0)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) - \theta(y^0 - x^0)\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle = S_F(x - y)_{ab} \\ \stackrel{D}{=} \langle 0|-\theta(y^0 - x^0)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) + \theta(x^0 - y^0)\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle = S_D(x - y)_{ab}\end{aligned}\quad (538)$$

gdje R ($s_A = s_B = 1$), A ($s_A = s_B = -1$), F ($s_A = -s_B = 1$) i D ($-s_A = s_B = 1$) označavaju retardirani, avansirani, Feynmanov i Diracov uvijet (propagator).

DZ. Provjerite jednadžbu (538).

DF. Pokažite da je $S_F(x - y)$ kauzalan (da se čestice i antičestice prvo stvaraju a onda

poništavavaju. Provjerite ista ponašanja za propagatore $S_R(x-y)$, $S_A(x-y)$ i $S_D(x-y)$.

Od posebne važnosti je Feynmanov propagator,

$$\begin{aligned}
 S_F(x-y) &= \langle 0 | \theta(x^0 - y^0) \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) - \theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle \\
 &\equiv \langle 0 | T(\psi_a(x) \bar{\psi}_b(y)) | 0 \rangle \\
 &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\eta}
 \end{aligned} \tag{539}$$

koji je sastavni dio Feynmanovih pravila koja se javljaju u perturbativnom računu smetnje u kvantnoj teoriji polja.

3 Polja u međudjelovanju i Feynmanovi dijagrami

3.1 Teorija smetnje - Bazične ideje i primjeri

- Međudjelovanja :

Do sada smo razmatrali samo slobodne teorije polja (za skalarno i spinorno polje).

Za eksperimentano opažanje nužno je imati međudjelovanje – članove sa 3 i više polja u Hamiltonijanu odnosno Lagrangijanu, dakle **nelinearne članove u jednadžbama gibanja**.

- Kauzalnost (Lorentz invarijantnost i princip dekompozicije nakupina)

Za očuvanje kauzalnosti je nužna lokalna teorija polja. Preciznije, Lorentz invarijantnost teorije koja zadovoljava princip dekompozicije nakupina (vidi Weinberg I; princip dekompozicija nakupina jest zahtjev da su udaljeni eksperimenti međusobno nezavisni) može se ostvariti samo sa lokalnom teorijom polja u kojoj se Hamiltonijan i Lagrangijan može prikazati preko produkta polja i njihovih prvih 4-derivacija u jednoj točki ($\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x))$). Razmotrit ćemo tri teorije koje nemaju derivativnih vezanja (ne sadrže $\partial_\mu \phi(x)$ i za koje vrijedi

$$\mathcal{H}_{INT} = -\mathcal{L}_{INT}, \quad (540)$$

A. ϕ^4 teorija

B. Yukawa teorija

C. kvantna elektrodinamika

A. ϕ^4 teorija

· Lagrangijan (gustoća):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (541)$$

gdje je λ bezdimenzijska konstanta.

· javlja se u opisu Higgsova, statističkoj mehanici

· **Euler-Lagrangeove jednadžbe gibanja** (to su klasične jednadžbe) glase

$$\partial^2 \phi + m^2 \phi = -\frac{\lambda}{3!} \phi^3. \quad (542)$$

Jednadžba je nelinearna i ne može se riješiti Fourierovom analizom kao slobodna KG jednadžba

· **Kanonske komutacijske relacije:** zahvaljujući tome što nema derivativnih vezanja u Lagrangijanu, kanonski impuls je isti kao kod slobodne teorije, $\pi = \dot{\phi}$ ($= \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}$), pa je i kanonska kvantizacijska relacija ista,

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (543)$$

(ako bi \mathcal{L}_{INT} sadržavao $\partial_\mu\phi(x)$ mijenjao bi se π).

· **Hamiltonijan:**

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \\ H &= \int d^3x \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right]\end{aligned}\quad (544)$$

· **Heisenbergove jednadžbe gibanja** (kvantne jednadžbe):

Rabeći Heisenbergove jednažbe gibanja za ϕ i pripadni $\pi = \dot{\phi}$ (ne pišemo koordinatnu ovisnost zbog kratkoće zapisa),

$$\begin{aligned}i[H, \phi] &= \dot{\phi} = \pi, \\ i[H, \pi] &= \nabla^2\phi - m^2\phi - \frac{\lambda}{3!}\phi^3 = \dot{\pi} = \ddot{\phi} \\ &= \ddot{\phi} - \nabla^2\phi + m^2\phi = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3.\end{aligned}\quad (545)$$

Dakle kvantne jednadžbe (Heisenbergove jednadžbe gibanja) se podudaraju sa klasičnim jednadžbama (Euler-Lagrangeove jednadžbe gibanja).

B. Yukawina teorija

· **Lagrangijan:**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Yukawa} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{KG} - g\bar{\psi}\psi\phi \\ &= \bar{\psi}(i\rlap{\not{\partial}} - m_\psi)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 - g\bar{\psi}\psi\phi.\end{aligned}\quad (546)$$

· Teorija je slična QED, ali jednostavnija : nema problema sa baždarnom invarijantnošću. Javlja se u efektivnim teorijama kao što je opis nukleon-pionskog vezanja ($\pi - \bar{N} - N$), ali i u SM u opisu međudjelovanja Higgasa sa kvarkovima ($H - \bar{q} - q$) i leptonima ($H - \bar{\ell} - \ell$).

· **Eulerove jednadžbe gibanja** (klasične jednadžbe)

$$\begin{aligned}0 &= (i\rlap{\not{\partial}} - m_\psi)\psi - g\phi\psi, \\ 0 &= \bar{\psi}(-i\overleftarrow{\not{\partial}} - m_\psi) - g\bar{\psi}\phi, \\ 0 &= \partial^2\phi + m_\phi^2\phi + g\bar{\psi}\psi.\end{aligned}\quad (547)$$

· **Kanonski impulsi i kanonske komutacijske relacije** (Schrödingerova reprezentacija)

Kanonski impulsi su

$$\begin{aligned}\pi_\psi &= i\psi^\dagger, \\ \pi_\phi &= \dot{\phi}.\end{aligned}\quad (548)$$

Odatle slijede kanonske komutacijske relacije

$$\begin{aligned} [\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})]_+ &= \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\phi(\vec{x}), \dot{\phi}(\vec{y})]_- &= i\delta(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (549)$$

· **Hamiltonijan**

$$\mathcal{H} = \bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\nabla + m_\psi)\psi + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + g\bar{\psi}\psi\phi. \quad (550)$$

· **Heisenbergove jednađbe gibanja** (kvantne jednađbe)

DZ. Izvedite (kvantne) Heisenbergove jednađbe gibanja za polja ϕ , $\bar{\psi}$ i ψ i pokažite da se one podudaraju sa (klasičnim) Euler-Lagrangeovim jednađbama gibanja.

C. Kvantna elektrodinamika (QED)

· **Lagrangijan**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{INT} \\ &= \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \end{aligned} \quad (551)$$

$$= \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (552)$$

gdje je $e = -|e|$ naboj elektrona. Za opću nabijenu česticu naboja Q (naboj se mjeri u jedinicama $|e|$) treba zamijeniti $e \rightarrow |e|Q$. Ako ima više nabijenih čestica svakoj od njih treba pridružiti njen \mathcal{L}_{Dirac} i \mathcal{L}_{INT} . U trećem redu uveli smo kovarijantnu derivaciju D ,

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (553)$$

· **$U(1)$ baždarna invarijantnost Lagrangijana**

Lagrangijan (551) odnosno (552) je invarijantan na sljedeću $U(1)$ lokalnu baždarnu transformaciju polja,

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \end{aligned} \quad (554)$$

Posebno $\cancel{D}\psi$ se transformira jednako kao ψ na baždarne transformacije,

$$\begin{aligned} i\cancel{D}\psi &= (i\cancel{\partial} - e\cancel{A})\psi \\ &\rightarrow [i\cancel{\partial} - (e\cancel{A} - \cancel{\partial}\alpha)](e^{i\alpha}\psi) = e^{i\alpha}(i\cancel{\partial} - e\cancel{A})\psi, \end{aligned} \quad (555)$$

što osigurava invarijantnost Lagrangijana na baždarne transformacije.

· Eulerove (klasične) jednačbe gibanja

Eulerove jednačbe gibanja glase

$$\begin{aligned} 0 &= (i\mathcal{D} - m)\psi \\ -e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi &= -\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu), \end{aligned} \quad (556)$$

$$\equiv ej^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu}. \quad (557)$$

· Kvantizacija

- Kvantizacija QED je komplicirana zato jer ne postoje svi kanonski impulsi, koje bi očekivali u 4-dim zapisu Lagrangijana preko elektromagnetskog polja A_μ . Npr. ne postoji kanonski impuls A^0 komponente elektromagnetskog polja, $\pi^0 = -F^{00} = 0$. Također ne postoji ni kanonski impuls longitudinalne komponente polja proporcionalne $\nabla\vec{A}$. To je posljedica činjenice da foton ima samo dva helicitetna stanja, a opisuje se polarizacijskim vektorom $\varepsilon^\mu(k, \sigma)$ koji ima 4 komponente. Upravo taj prevelik broj komponenti u opisu elektromagnetskog polja vodi na baždarnu invarijantnost $\mathcal{L}_{Maxwell}$. Stoga se kvantizacija ne može provoditi standardno nego postavljanjem dodatnih, baždarnih uvjeta na teoriju. Ima nekoliko rješenja koja se standardno javljaju u udžbenicima.

– **Rješenje 1** : Kvantizacija u Coulombovom baždarenju

$\nabla\vec{A} = 0$, A^0 nije dinamička varijabla već se na njega postavlja uvjet. Kanonske kvantizacijske jednačbe glase

$$\begin{aligned} [A^i(\vec{x}), \dot{A}^j(\vec{y})] &= \delta_{TR}^{ij}(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}. \end{aligned} \quad (558)$$

– **Rješenje 2** : Kvantizacija u Lorentzovom baždarenju ($\partial_\mu A^\mu = 0$)

Kvantiziraju se sve četiri komponente

$$[A^\mu(\vec{x}), \dot{A}^\nu(\vec{y})] = -g^{\mu\nu}\delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (559)$$

Pri tome se javlja problem sa negativnim vjerojatnostima, koji se rješava Gupta-Bleulerovom metodom, koja oslabljuje Lorentzov uvjet,

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \rightarrow \langle \Psi | \partial_\mu A^\mu | \Psi \rangle = 0, \quad (560)$$

gdje je Ψ fizikalno stanje (stanje koje se može opažati).

– **Rješenje 3** : Kvantizacija preko integrala po putevima

Ovo je najelegantnija metoda. Nema operatora. Javljaju se samo klasična polja. Kvantizacija se ostvaruje dozvoljavanjem da se sistem kreće po svim mogućim stazama a ne samo

po stazi dozvoljenoj klasičnim jednadžbama gibanja. Svaka staza ima težinu koja odgovara eksponentu akcije. Metoda je vrlo elegantna ako se kombinira sa Fadeev-Popovom metodom ugrađivanja baždarnih uvjeta, jer ona omogućuje da se kvantizacija istovremeno provede za veliku klasu baždarnih uvjeta.

Renormalizabilnost i moguće teorije polja

· Zahtjeva se konačnost teorije. Drugim riječima amplitude moraju biti konačne. Problem dolazi od virtualnih čestica – one tvore petlje sa neodređenim 4-impulsima ($\int_{-\infty}^{+\infty} d^4p$). Akcija je bezdimenzijska veličina. Svakom procesu odgovara neka efektivna akcija. Ako se u Lagrangijanu javlja međudjelovanje sa konstantom veze α koja je dimenzije $(\text{masa})^{-p}$, $p > 0$, tada efektivna akcija koja odgovara nekom danom procesu oblika $S_{eff} = \alpha \bar{S}_{eff}$, gdje je \bar{S}_{eff} operator pozitivne dimenzije p . Ako se 4-impuls integrira do neke velike gornje granice Λ , akcija će se ponašati kao Λ^p , dakle divergirat će. Stoga, zbog zahtjeva konačnosti teorije, konstante veze mogu imati samo dimenziju veću ili jednaku nuli. Postupak uklanjanja divergencija iz teorije, tzv. renormalizacija, moguće je provesti u svakom redu računu smetnje samo ako konstante veze imaju dimenzije veću ili jednaku nuli. Takve teorije se zovu renormalizabilne (u Dysonovom smislu).

· Kako je akcija bezdimenzijska, a integracijska mjera d^4x ima dimenziju -4 (m^{-4}), gustoća Lagrangijana ima dimenziju 4. Odatle je lako pokazati da skalarno polje i elektromagnetsko (vektorsko) polje ima dimenziju 1, a Diracovo polje ima dimenziju $3/2$. Odatle slijedi da su Lagrangijani (Hamiltonijani) međudjelovanja jako ograničeni. U 4-dimenzijskom prostoru, za skalarno, vektorsko i Diracovo polje postoje samo sljedeći Lagrangijani međudjelovanja koji zadovoljavaju uvjet renormalizabilnosti,

$$\phi : \mu\phi^3, \quad \lambda\phi^4, \quad (561)$$

$$\phi, \bar{\psi}, \psi : g\bar{\psi}\psi\phi, \quad (562)$$

$$A, \bar{\psi}, \psi : e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad (563)$$

$$A, \phi : eA_\mu\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu\phi, \quad e^2|\phi|^2 A_\mu A^\mu, \\ \left(\mathcal{L} = |D_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2 \right) \quad (564)$$

$$A : A^2\partial_\mu A^\mu, \quad A^4. \quad (565)$$

- Međudjelovanja (561), (562) i (563) smo već sreli.
- Međudjelovanja (564) se javljaju npr. u skalarnoj elektrodinamici.
- Međudjelovanja (565) se javljaju ne-Abelovim baždarnim teorijama.

· Pitanje : zašto se javljaju samo renormalizabilne teorije. Odgovor slijedi iz RG analize teorije.

· Usporedba Hamiltonijana međudjelovanja u teoriji polja i NR kvantnoj mehanici. U

teoriji polja je Hamiltonijan jako ograničen, dok u NR QM nije.

· Teorija je nelinearna. Koje metode su na raspolaganju za izračun fizikalnih veličine koje se javljaju u eksperimentu. Imamo **samo perturbativni račun**. Struktura amplituda dana je **Feynmanovim dijagramima**. Postoje dva pristupa perturbativnom računu

A. **Operatorski** (Dyson, ...)

B. Pristup preko **integrala po putevima** (Feynman, ...)

3.2 Perturbativni razvoj Greenovih (korelacijskih) funkcija

- Prvo ćemo razmotriti perturbativni razvoj korelacijskih (Greenovih) funkcija dvaju polja. Tu analizu ćemo poopćiti kasnije na korelacijske (Greenove) funkcije više polja, što će nam omogućiti izračunavanje fizikalnih veličina: udarnih presjeka i širina raspada.

- Analizu Greenove funkcije dvaju polja provodimo u ϕ^4 teoriji, u kojoj ona glasi

$$\langle \Omega | T(\phi(x)\phi(y)) | \Omega \rangle . \quad (566)$$

$|\Omega\rangle$ je osnovno stanje teorije s međudjelovanjem ($\lambda\phi^4$ član), i u Heisenbergovoj slici i ono je različito od osnovnog stanja stanja slobodne teorije $|0\rangle$. $\phi(x)$ je polje u Heisenbergovoj slici. T je vremensko uređenje

- **Fizikalna interpretacija** (566) je amplituda širenja čestice iz točke y u točku x , kao i kod slobodne teorije. Kod slobodne teorije (566) je Feynmanov propagator,

$$\langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle = D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} . \quad (567)$$

· Nas zanima kako se izraz (567) mijenja kada se uključi međudjelovanje:

- Da bismo to dobili prvo razdvajamo Hamiltonijan na slobodni Hamiltonijan (H_0) i Hamiltonijan međudjelovanja (H_{int}),

$$H = H_0 + H_{int} = H_{KG} + \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) . \quad (568)$$

- Cilj nam je dobiti izraz (566) u razvoju po konstanti međudjelovanja λ

- Hamiltonijan međudjelovanja nam se javlja na dva mjesta:

1. U definiciji Heisenbergovog polja

$$\phi(x) = e^{iHt} \phi(\vec{x}) e^{-iHt} . \quad (569)$$

2. U definiciji $|\Omega\rangle$

Moramo izraziti i $\phi(x)$ i $|\Omega\rangle$ preko veličina s kojima znamo manipulirati: slobodnih polja i vakuuma slobodne teorije polja.

□ **Izraz za $\phi(x)$:**

- Za svako fiksno vrijeme ϕ se može raspisati po Fourierovim komponentama

$$\phi(t_0, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_p e^{i\vec{p}\vec{x}} + a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}}) . \quad (570)$$

- Za $t \neq t_0$ $\phi(x)$ dobijamo djelovanjem operatora evolucije

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)} . \quad (571)$$

- Za $\lambda = 0$ je $H = H_0$, pa se polje (571) reducira na polje u slici međudjelovanja (koje je za $H = H_0$ jednako polju u Heisenbergovoj slici)

$$\phi(t, \vec{x})_{\lambda=0} = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} \equiv \phi_I(t, \vec{x}) . \quad (572)$$

- Ako je λ malen (572) daje glavni doprinos polju. Kako se $H_0 (= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}))$ može dijagonalizirati $\phi_I(t, \vec{x})$ se može eksplicitno izvršiti

$$\phi_I(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x})|_{x^0=t-t_0} . \quad (573)$$

- Izražavanje Heisenbergovog polja ϕ preko polja ϕ_I
- Formalno, rabeći (571) i (572), dobijamo

$$\begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) &= e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_I(t, \vec{x}) e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \\ &\equiv U^\dagger(t, t_0) \phi_I(t, \vec{x}) U(t, t_0), \end{aligned} \quad (574)$$

gdje je $U(t, t_0)$ unitaran operator,

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}, \quad (575)$$

tzv. operator evolucije u slici međudjelovanja. (Izraz (574) je egzakatan.)

- želimo izraziti $U(t, t_0)$ preko polja ϕ_I kojeg možemo izraziti preko operatora $a_{\vec{p}}^\dagger$ i $a_{\vec{p}}$.
- $U(t, t_0)$ je jedinstveno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)} \underbrace{(H - H_0)}_{H_{int}} e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \\ &= H_I(t) U(t, t_0), \end{aligned} \quad (576)$$

uz početni uvjet $U(t_0, t_0) = 1$ i definiciju Hamiltonijana međudjelovanja u slici međudjelovanja,

$$H_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_{int} e^{-iH_0(t-t_0)} = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(t, \vec{x}) . \quad (577)$$

- Rješenje (576) mora biti nešto kao $U \sim \exp(-iH_I(t))$.
- Rješenje u razvoju po λ glasi

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \dots . \quad (578)$$

Ono se dobija formalnim rješavanjem (576) u kojem se $U(t, t_0)$ javlja i kao rješenje i s desne strane jednadžbe ali u višem redu u razvoju po λ i uzastopnim uvrštavanjem tog rješenja u desnu stranu jednadžbe. Rješenje se također može i eksplicite provjeriti uvrštavanjem u jednadžbu (576).

• **Vremensko uređenje**

Izraz (578) je vremenski uređen: kasniji H_I su s lijeva od ranijih. Tu omogućuje jednostavniji zapis rješenja. Npr. za drugi član u razvoju po λ imamo

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 H_I(t_1) H_I(t_2) \\
& = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1) \\
& = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \frac{1}{2} \left(H_I(t_1) H_I(t_2) \theta(t_1 - t_2) + H_I(t_2) H_I(t_1) \theta(t_2 - t_1) \right) \\
& = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \frac{1}{2} T[H_I(t_1), H_I(t_2)] . \tag{579}
\end{aligned}$$

U drugom redu smo zamijenili t_1 i t_2 integraciju uz prateću promjenu integracijskih granica. U trećem smo preimenovali $t_1 \leftrightarrow t_2$. U četvrtom smo zbrojili rezultate iz prvog i četvrtog retka, stavili ih pod istu integraciju, ali pri tome smo morali uvesti θ -funkcije. Peti red je samo kraći zapis petog – preko T produkta.

Analogno se može dokaz provesti za bilo koji broj Hamiltonijana H_I ,

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n) \\
& = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n \theta(t_1 - t_2) \dots \theta(t_{n-1} - t_n) H_I(t_1) \dots H_I(t_n) \\
& = \frac{1}{n!} \sum_{\mathcal{P}} \underbrace{\int_{t_0}^t dt_{\mathcal{P}_1} \dots \int_{t_0}^t dt_{\mathcal{P}_n} \theta(t_{\mathcal{P}_1} - t_{\mathcal{P}_2}) \dots \theta(t_{\mathcal{P}_{n-1}} - t_{\mathcal{P}_n}) H_I(t_{\mathcal{P}_1}) \dots H_I(t_{\mathcal{P}_n})}_{\text{sim na perm}} \\
& = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n \sum_{\mathcal{P}} \theta(t_{\mathcal{P}_1} - t_{\mathcal{P}_2}) \dots \theta(t_{\mathcal{P}_{n-1}} - t_{\mathcal{P}_n}) H_I(t_{\mathcal{P}_1}) \dots H_I(t_{\mathcal{P}_n}) \\
& = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n T\{H_I(t_1) \dots H_I(t_n)\} . \tag{580}
\end{aligned}$$

Odatle slijedi kompaktni zapis $U(t, t_0)$,

$$\begin{aligned}
U(t, t_0) & = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\} + \dots \\
& = T\left\{ \exp\left[-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')\right] \right\} \tag{581}
\end{aligned}$$

(za vremensko uređenje T se uzima da je linearan operator).

- Generalizacija $U(t, t_0)$ na $U(t, t')$
- Generaliziramo definiciju U operatora,

$$U(t, t') = T \left\{ \exp \left[-i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'') \right] \right\} . \quad (582)$$

- Svojstva $U(t, t')$:

1. diferencijalna jednadžba je ista kao za $U(t, t_0)$

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t') = H_I(t) U(t, t') \quad (583)$$

2. Početni uvjet jednadžbe je sada

$$U(t, t')|_{t=t'} = 1 \quad (584)$$

3. Oblik rješenja preko vremena t_0 za koji smo zadali Fourierov razvoj polja (570),

$$U(t, t') = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0(t'-t_0)} = U(t, t_0) U^\dagger(t', t_0) \quad (585)$$

4. Identiteti koje zadovoljava $U(t, t')$ ($t_1 \geq t_2 \geq t_3$),

$$U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3), \quad (586)$$

$$U(t_1, t_3) U^\dagger(t_2, t_3) = U(t_1, t_2) . \quad (587)$$

(Napomena: $U(t, t')$ postoji samo za $t \geq t'$. Primjetite da $U^\dagger(t, t')$ ima isti oblik kao $U(t, t')$ za zamjenjenim ulogama t i t' i uz $t' \leq t$.

DZ. Provjerite jednadžbu (583) za definiciju (582). provjerite da li je (585) rješenje diferencijalne jednadžbe (583), (zbog jedinstvenosti su rješenja jednaka). Provjerite identitete (586) i (587).

• Prikaz stanja $|\Omega\rangle$ preko stanja $|0\rangle$ i Hamiltonijana H_I

- Zamišljamo da krećemo od stanja $|0\rangle$, svojstvenog stanja slobodnog Hamiltonijana H_0 i vremenski ga evoluiramo ukupnim Hamiltonijanom H ,

$$\begin{aligned} e^{-iHT} |0\rangle &= \sum_n e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle \\ &= e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle + \sum_{n \neq \Omega} e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle . \end{aligned} \quad (588)$$

Ubacili smo potpun skup stanja ukupnog Hamiltonijana H između e^{-iHT} i $|0\rangle$. Među tim stanjima je i osnovno stanje H , $|\Omega\rangle$. U drugom retku smo izdvojili to stanje od ostalih.

- Moramo pretpostaviti da je preklap $\langle \Omega|0\rangle \neq 0$ jer inače H_I ne bi bilo malo međudjelovanje,

pa sistem ne bismo mogli kasnije perturbativno razvijati po H_I .

- Nultu energiju definiramo preko osnovnog stanja slobodnog Hamiltonijana,

$$H_0|0\rangle = 0 . \quad (589)$$

- Kako je $E_n > E_0$ (pretpostavka energetskog procjepa između osnovnog i ostalih stanja), u (588) se možemo riješiti svih $n \neq 0$ stanja puštajući T u beskonačnost; preciznije $T \rightarrow \infty(1 - i\varepsilon)$ tako da pri pri tom limesu imamo $e^{-iE_n T} \rightarrow 0$. Odatle dobijamo

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (e^{-iE_0 T} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} e^{-iHT} |0\rangle . \quad (590)$$

- Kako je T vrlo velik možemo ga uvećati za malo konstantno vrijeme t_0 (u kojem je definiran Fourierov raspis polja),

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} e^{-iH(T+t_0)} |0\rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (e^{-iE_0(t_0-(-T))} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} \underbrace{e^{-iH(t_0-(-T))} e^{-iH_0((-T)-t_0)} |0\rangle}_{U(t_0, -T)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (e^{-iE_0(t_0-(-T))} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} U(t_0, -T) |0\rangle . \end{aligned} \quad (591)$$

U prvom retku smo napravili zamjenu $T \rightarrow T + t_0$. U drugom smo ubacili ispred stanja $|0\rangle$ faktor koji ga ne mijenja, $e^{iH_0(T+t_0)}$. Preuredili smo predznake ispred vremena tako da smo od dva eksponencijana faktora dobili izraz koji je prema (585) jednak $U(t_0, -T)$.

- Iz (591) slijedi da je stanje $|\Omega\rangle$ do na komplicirani skalarni faktor jednako

$$|\Omega\rangle \propto U(t_0, -T) |0\rangle, \quad (592)$$

tj. može se izraziti preko vakuumskeg osnovnog stanja $|0\rangle$ i Hamiltonijana i operatora za koji smo pokazali da se perturbativno može prikazati Hamiltonijana H_I , koji je izražen preko polja u slici međudjelovanja ϕ_I .

- Slično nalazimo

$$\langle \Omega| = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle 0|U(T, t_0) \left(e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle \right)^{-1} . \quad (593)$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \langle 0|e^{-iHT} &= \langle 0|n\rangle \langle n|e^{-iE_n T} \\ &= \langle 0|\Omega\rangle \langle \Omega|e^{-iE_0 T} + \sum_{n \neq \Omega} \langle 0|n\rangle \langle n|e^{-iE_n T} . \end{aligned} \quad (594)$$

Puštajući $T \rightarrow \infty(1 - i\varepsilon)$ i zamjenjujući $T \rightarrow T - t_0$ dobijamo,

$$\begin{aligned} \langle \Omega| &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle 0|e^{-iH(T)} \left(\langle 0|\Omega\rangle e^{-iE_0 T} \right)^{-1} \\ &\stackrel{T \gg t_0}{=} \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle 0|e^{-iH(T-t_0)} \left(\langle 0|\Omega\rangle e^{-iE_0(T-t_0)} \right)^{-1} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle 0| \underbrace{e^{iH_0(T-t_0)} e^{-iH(T-t_0)}}_{U(T, t_0)} \left(\langle 0|\Omega\rangle e^{-iE_0(T-t_0)} \right)^{-1} . \end{aligned} \quad (595)$$

• **Izraz za korelacijsku funkciju dvaju polja**

Uvrštavajući izraze (574), (591) i (593) u izraz za korelacijsku funkciju dvaju polja (566) dobijamo

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | T(\phi(x)\phi(y)) | \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle 0 | U(T, t_0) \left(\langle 0 | \Omega \rangle e^{-iE_0(T-t_0)} \right)^{-1} \\
&\times (\theta(x^0 - y^0) U^\dagger(x^0, t_0) \phi_I(x) U(x^0, t_0) U^\dagger(y^0, t_0) \phi_I(y) U(y^0, t_0) \\
&\quad + \theta(y^0 - x^0) U^\dagger(y^0, t_0) \phi_I(y) U(y^0, t_0) U^\dagger(x^0, t_0) \phi_I(x) U(x^0, t_0)) \\
&\times \left(e^{-iE_0(t_0 - (-T))} \langle \Omega | 0 \rangle \right)^{-1} U(t_0, -T) | 0 \rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \left(e^{-iE_0 2T} |\langle 0 | \Omega \rangle|^2 \right)^{-1} \\
&\times \langle 0 | (\theta(x^0 - y^0) U(T, x^0) \phi_I(x) U(x^0, y^0) \phi_I(y) U(y^0, -T) \\
&\quad + \theta(y^0 - x^0) U(T, y^0) \phi_I(y) U(y^0, x^0) \phi_I(x) U(x^0, -T)) | 0 \rangle. \tag{596}
\end{aligned}$$

- Uporabom normalizacije stanja Ω ,

$$1 = \langle \Omega | \Omega \rangle, \tag{597}$$

i izraza (591) i (593) dobijamo izraz za konstantni faktor koji se javlja u izrazu za korelacijsku funkciju,

$$e^{-iE_0 2T} |\langle 0 | \Omega \rangle|^2 = \langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle, \tag{598}$$

a odatle slijedi konačan izraz za korelacijsku funkciju, tzv. Dysonova formula za korelacijsku (Greenovu) funkciju dva skalarna polja,

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | T\phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (\langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle)^{-1} \\
&\times \langle 0 | U(T, x^0) \phi_I(x) U(x^0, y^0) \phi_I(y) U(y^0, -T) \\
&\quad + U(T, y^0) \phi_I(y) U(y^0, x^0) \phi_I(x) U(x^0, -T) | 0 \rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{\langle 0 | T(\phi_I(x)\phi_I(y)U(T, -T)) | 0 \rangle}{\langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle} \tag{599}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{\langle 0 | T\{\phi_I(x)\phi_I(y) \exp[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)]\} }{\langle 0 | T\{\exp[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)]\} } \tag{600}$$

Formula (600) je egzaktna, međutim njen oblik je podesan za perturbativni račun smetnje.

3.3 Wickov teorem

- Problem korelacijskih funkcija (dva polja; a kasnije ćemo pokazati isto za više polja) je Dysonovom formulom (600) sveden na problem izračunavanja očekivanih vrijednosti

T -produkata polja

$$\langle 0|T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\dots\phi_I(x_n)\}|0\rangle, \quad n < \infty. \quad (601)$$

- Za $n = 2$ (601) je Feynmanov propagator (za skalarno polje).

- Direktno nalaženje izraza (601) preko komutacijskih relacija za operatore a i a^\dagger je moguće ali teško. Zato se primjenjuje sljedeća procedura koja olakšava račun. Proceduru ilustriramo na primjeru dva ϕ_I polja.

1. Svako se polje razdvaja na pozitivno-energetski dio (koji sadrži samo a operatore i pozitivno energetske faze e^{-iEt}) i negativno-energetski dio (koji sadrži samo a^\dagger operatore i negativno energetske faze e^{+iEt}),

$$\begin{aligned} \phi_I^+(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x}, \\ \phi_I^-(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}. \end{aligned} \quad (602)$$

2. T produkt polja se razdvaja na normalni produkt polja i ostatak.

$$\begin{aligned} T(\phi_I(x)\phi_I(y)) &= \theta(x^0 - y^0)\phi_I(x)\phi_I(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi_I(y)\phi_I(x) \\ &= \theta(x^0 - y^0)(\phi_I^+(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^+(x)\phi_I^-(y) + \phi_I^-(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(x)\phi_I^-(y)) \\ &+ \theta(y^0 - x^0)(\phi_I^+(y)\phi_I^+(x) + \phi_I^+(y)\phi_I^-(x) + \phi_I^-(y)\phi_I^+(x) + \phi_I^-(y)\phi_I^-(x)) \\ &= \theta(x^0 - y^0)(\phi_I^+(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(y)\phi_I^+(x) + \phi_I^-(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(x)\phi_I^-(y) + [\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)]) \\ &+ \theta(y^0 - x^0)(\phi_I^+(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(y)\phi_I^+(x) + \phi_I^-(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(x)\phi_I^-(y) + [\phi_I^+(y), \phi_I^-(x)]) \\ &= N(\phi_I(x)\phi_I(y)) + \overline{\phi(x)\phi(y)} \end{aligned} \quad (603)$$

gdje je

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} \equiv \theta(x^0 - y^0)[\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)] + \theta(y^0 - x^0)[\phi_I^+(y), \phi_I^-(x)] \quad (604)$$

$$\begin{aligned} &= \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\phi_I(x)\phi_I(y)|0\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\phi_I(y)\phi_I(x)|0\rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0)D(x - y) + \theta(y^0 - x^0)D(y - x) \\ &= D_F(x - y). \end{aligned} \quad (605)$$

DZ. Dokažite da vrijede sljedeće relacije

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = T\{\phi(y)\phi(x)\}, \quad (606)$$

$$N\{\phi(x)\phi(y)\} = N\{\phi(y)\phi(x)\}. \quad (607)$$

Stoga zamjena dvaju skalarnih (ili još općenitije bozonskih polja) ne mijenja T produkt odnosno N produkt tih polja. Takve jednakosti vrijede za T odnosno N produkt bilo kojeg broja bozonskih polja.

- Generalizacija (603) na bilo koji broj polja vodi na identitet

$$T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)\} = N\{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) + \text{sve moguće kontrakcije}\} \quad (608)$$

koji je poznat kao **WICKOV TEOREM** (ovdje za skalarna odnosno bozonska polja).

- Primjer za $m = 4$ (koordinate zamjenjujemo indeksom zbog skraćivanja notacije - npr. $\phi(x_i) \equiv \phi_i$)

$$\begin{aligned} T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} = N\{ & \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \\ & + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4}\} . \end{aligned} \quad (609)$$

- Normalni produkt kontrakcije polja koja nisu susjedna pretpostavljaju da se prvo da se polja stave skupa (pri svakom preskoku jednog skalarnog polja preko drugog dobija se predznak +1) i onda pokontrahiraju,

$$N(\overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4}) = N(\overbrace{\phi_1\phi_3\phi_2\phi_4}) = D_F(x_1 - x_3)N(\phi_2\phi_4) . \quad (610)$$

- Svojstvo normalno uređenih operatora je da je njihova vakuumska očekivana vrijednost jednaka nuli

$$\langle 0|N(\text{bilo koji operator})|0\rangle = 0 . \quad (611)$$

Drugim riječima za bilo koji operator O

$$N(O) = O - \langle 0|O|0\rangle . \quad (612)$$

Stoga vakuumska očekivana vrijednost T produkta 4 polja glasi (a mi baš takve gledamo u (601))

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle = & D_F(x_1 - x_2)D_F(x_3 - x_4) \\ & + D_F(x_1 - x_3)D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4)D_F(x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (613)$$

• Dokaz Wickovog teorema

- Dokaz se provodi matematičkom indukcijom. Za $m = 2$ polja smo ga već dokazali. Pretpostavimo da je dokazan za $m - 1$ polja.

- Dokaz ne gubi na općenitosti ako se pretpostavi da je $x_1^0 \geq x_2^0 \geq x_3^0 \geq \dots x_m^0$. Ako bi naime bio drugačiji poredak vremena mogli bismo preimenovati koordinate bez posljedica na bilo koji član jednadžbe (608).

- Primjenom Wickovog teorema za polja ϕ_2, \dots, ϕ_m imamo

$$\begin{aligned} T\{\phi_1 \dots \phi_m\} & = \phi_1\phi_2 \dots \phi_m = \phi_1 T\{\phi_2 \dots \phi_m\} \\ & = \phi_1 N\{\phi_2 \dots \phi_m + \text{sve kontrakcije bez } \phi_1\} \\ & = (\phi_1^+ + \phi_1^-) N\{\phi_2 \dots \phi_m + \text{sve kontrakcije bez } \phi_1\} . \end{aligned} \quad (614)$$

- Ubacujemo ϕ_1^+ i ϕ_1^- pod normalno uređenje (N). Npr. za prvi član u (614)

$$\phi_1^- N\{\phi_2 \dots \phi_m\} = N\{\phi_1^- \phi_2 \dots \phi_m\}, \quad (615)$$

$$\begin{aligned} \phi_1^+ N\{\phi_2 \dots \phi_m\} &= N\{\phi_2 \dots \phi_m\} \phi_1^+ + [\phi_1^+, N(\phi_2 \dots \phi_m)] \\ &= N(\phi_1^+ \phi_2 \dots \phi_m + [\phi_1^+, \phi_2^-] \phi_3 \dots \phi_m + \phi_2 [\phi_1^+, \phi_3^-] \phi_4 \dots \phi_m + \dots) \\ &= N(\phi_1^+ \phi_2 \dots \phi_m + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots \phi_m} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \dots \phi_m} + \dots). \end{aligned} \quad (616)$$

Primjetite da su time za prvi član uvedene sve kontrakcije sa poljem ϕ_1 , preciznije svi članovi koji imaju samo jednu kontrakciju i to polja ϕ_1 sa bilo kojim drugim poljem. Na analogan način se ponašaju svi drugi članovi u jedn. (614) koji već imaju kontrakcije – uz član u kojem se ϕ_1^+ samo dodaje u normalnom produktu javljaju se članovi u kojima se ϕ_1^+ kontrahira sa bilo kojim od polja koja već nisu pokontrahirana. Na taj način dobijamo članove u kojima je ϕ_1^+ samo dodan ispred svih polja i članove u kojima je ϕ_1^+ pokontrahiran sa jednim od polja koja nisu već prije ubacivanja ϕ_1^+ pod normalni produkt bila kontrahirana i to na sve moguće načine. Skup svih tih članova daje jednakost (608) za m polja,

$$T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m)\} = N\{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m) + \text{sve moguće kontrakcije}\}. \quad (617)$$

Time je Wickov TM dokazan.

DZ Izvrijednite

$$\langle 0|T\{\phi_1 \dots \phi_6\}|0\rangle. \quad (618)$$

DZ Za Hamiltonijan skalarne kvantne elektrodinamike

$$H_I = ie\phi_I^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_I A_I^\mu, \quad (619)$$

($a \overleftrightarrow{\partial}_\mu b = a \partial_\mu b - (\partial_\mu a) b$) nađite izraz za

$$\langle 0|TH_I(x)H_I(y)|0\rangle. \quad (620)$$

Pri tome će se javljati kontrakcija dva fotonska polja koju identificirajte sa fotonskim propagatorom,

$$\overbrace{A_\mu(x)A_\nu(y)}. \quad (621)$$

DZ Pokažite da vrijede sljedeće relacije

$$T(\phi_1 N(\phi_2 \phi_3)) = N(\phi_1 \phi_2 \phi_3 + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3}), \quad (622)$$

$$\begin{aligned} T(N(\phi_1 \phi_2)N(\phi_3 \phi_4)) &= N(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} \\ &+ \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4}). \end{aligned} \quad (623)$$

Ta dva primjera ilustriraju opće pravilo da, pri primjeni Wickovog TM u raspisu T produkta polja preko normalno uređenih polja i kontrakcija, ne treba uzimati u obzir kontrakcije polja koje se pod T -produktom javljaju u normalnom uređenju.

Napomenimo da se normalno uređenje ponekad označava sa $::$,

$$N(AB) = :AB: . \quad (624)$$

DZ. Primjenom (623) nađite za Hamiltonijan (619) izraz za

$$\langle 0|T{:H_I(x):{:H_I(x):}}|0\rangle . \quad (625)$$

3.4 Feynmanovi dijagrami

- Ovo poglavlje se bavi nalaženjem amplituda na primjeru korelacijske funkcije s dva polja, $\langle \Omega|T(\phi(x)\phi(y))|\Omega\rangle$, kombinatorikom tj. prebrojavanjem koliko puta se koji dijagram javlja, Feynmanovim pravilima za skalarno polje, vakuumskim doprinosima te njihovim kraćenjem u Dysonovoj formuli (600).

- Napomena: Ovdje se rabi Peskinov pristup amplitudima u kojem se pretpostavlja da Hamiltonijani nisu normalno uređeni. Zbog toga se kod njega u izrazima javljaju dodatni doprinosi vakuumskog i "punoglavac" tipa kojih ne bi bilo kada bi Hamiltonijani međudjelovanja bili normalno uređeni. To nema nikakvog utjecaja na udarne presjeke, jer se u Dysonovoj formuli (600) vakuumski doprinosi krata, a punoglavac doprinosi se uklanjaju renormalizacijom. Oba pristupa u konačnosti daju isti rezultat.

- Wickov TM omogućuje zapis izraza oblika

$$\langle 0|T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\dots\phi_I(x_n)\}|0\rangle \quad (626)$$

preko sume produkata Feynmanovih propagatora.

- **Primjer 1 : Četiri polja u četiri različite prostorno-vremenske točke** iz jednadžbe (613). Prikaz te amplitude preko tzv. Feynmanovih dijagrama je

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \bullet & \bullet \\ \hline & \hline \\ \bullet & \bullet \\ 3 & 4 \end{array} & + & \begin{array}{c} 1 \\ \bullet \\ \hline \\ \bullet \\ 3 \end{array} & & \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ \hline \\ \bullet \\ 4 \end{array} & + & \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \bullet & \bullet \\ \diagdown & \diagup \\ \bullet & \bullet \\ 3 & 4 \end{array} \end{array} \quad (627)$$

- Ta amplituda nije mjerljiva.

- **Interpretacija** amplitude je da se u dvije prostorno-vremenske točke kreiraju čestice, svaka od njih se propagira do jedne od dvije preostale točke, i tamo se čestice anihiliraju. Postoje tri mogućnosti odabira polaznih i konačnih točaka koje odgovaraju tri topološki

različita Feynmanova dijagrama.

□ Račun Greenove funkcije za dva polja

- Analiza Greenove funkcije dva polja je glavna tema ovog poglavlja.
- Greenova funkcija za dva polja glasi

$$(600) = \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}.$$

• Grafički prikaz Greenove funkcije dva polja u prvom redu računa smetnje

- Sada ćemo vidjeti kako se grafički mogu prikazati procesi u kojima su uključena međudjelovanja.
- Za početak zanemarimo nazivnik u Dysonovoj formuli (600). Brojnik s eksponencijalnim faktorom razvijenim u red glasi

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T \left\{ \phi_I(x) \phi_I(y) + \phi_I(x) \phi_I(y) \left[-i \int dt H_I(t) \right] + \dots \right\} | 0 \rangle \\ & = D_F(x-y) + \langle 0 | T \left\{ \phi_I(x) \phi_I(y) \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z \phi_I(z) \phi_I(z) \phi_I(z) \phi_I(z) \right\} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (628)$$

- Kao što je naznačeno prvi član jednak je Feynmanovom propagatoru skalarnog polja.
- Drugi član je perturbativna korekcija prvom, i njega izračunavamo primjenjujući Wickov teorem.
- Primjetite da **Peskin ne pretpostavlja da je Hamiltonijan međudjelovanja $H_I(t)$ normalno uređen**. Zbog toga se u računu javljaju i doprinosi u kojima su polja svakog pojedinog Hamiltonijana međusobno pokontrahirana.
- Polja Hamiltonijana su ista i u jednoj točki, pa se ne mogu razlikovati. Šest skalarnih polja možemo pokontrahirati ili tako da vanjska polja pokontrahiramo međusobno (jedna mogućnost) i polja Hamiltonijana međusobno (tri mogućnosti) ili tako da vanjska polja pokontrahiramo sa dva unutarnja (12 mogućnosti) i preostala dva unutarnja polja međusobno (jedna mogućnost). Sveukupno, to za doprinos prvog reda računa smetnje nazivniku izraza za Greenovu funkciju dva polja daje rezultat

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \left\{ \phi(x) \phi(y) (-i) \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi^4(z) \right\} | 0 \rangle \\ & = 3 \left(\frac{-i}{4!} D_F(x-y) \int d^4 z D_F(z-z) D_F(z-z) \right) \\ & \quad + 12 \left(\frac{-i}{4!} \int d^4 z D_F(x-z) D_F(y-z) D_F(z-z) \right). \end{aligned} \quad (629)$$

- Grafički se dva doprinosa iz jedn. (629) mogu prikazati sljedećim dijagramima,

$$\left(\begin{array}{c} \bullet \\ x \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ y \end{array} \quad \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bullet \\ z \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \bullet \\ x \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bullet \\ z \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ y \end{array} \right). \quad (630)$$

- Svaka **kontrakcija** (odnosno propagator D_F) predočena je jednom **linijom**, a svaka **4-koordinata točkom**. Pri tome razlikujemo **vanjske točke** i **unutarnje točke**. Unutarnje točke (pripadne koordinate su z_i), tzv. vrhovi, predstavljaju Hamiltonijane $H_I(z_i)$, i javljaju se uz faktore $(-i\lambda \int d^4z_i)$.
- Feynmanovi dijagrami su zapravo grafički prikaz amplitude koja opisuje stvaranje i poništenje čestica u pripadnim prostorno-vremenskim točkama.

• **Faktori simetrije dijagrama**

- Primjetimo da broj ekvivalentnih procesa 3 odnosno 12 djelomice poništava faktor $1/4!$ koji je u Hamiltonijan H_I uveden zbog identičnosti polja ϕ_I . Nadalje, odstupanja od poništenja faktora $1/4!$, $1/8$ i $1/2$, tzv. **faktori simetrije dijagrama**, odgovaraju simetriji pojedinih dijagrama na zamjenu polja.
- Tako dijagram u obliku osmice u jednadžbi (630) ima simetriju na zamjenu ulazno-izlaznih polja u točku z i u gornjoj i doljnjoj kružnici, a osim toga je simetričan na zamjenu gornje i doljnje kružnice.
- Sveukupno to daje faktor $2 \times 2 \times 2 = 8$.
- graf u drugom sumandu jedn. (630) je simetričan na zamjenu ulazno-izlaznih polja, što daje faktor 2.
- Npr. procesu koji odgovara amplitudi

$$\langle 0 | \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4z \phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z) \right) | 0 \rangle, \quad (631)$$

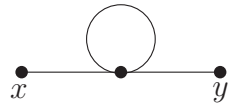
i opisan je dijagramom



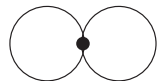
takvog faktora nema zato jer se 4 polja iz Hamiltonijana $H_I(z)$ mogu povezati s četiri vanjska polja u četiri različite prostorno-vremenske točke na $4!$ načina.

- Dakle faktori simetrije dijagrama pokazuju koliko je broj kontrakcija u danom dijagramu manji od produkta faktora tipa $4!$ zbog identičnosti nekih procesa na zamjenu pojedinih polja uključenih u dani proces.
- Primjetimo i da je faktor simetrije dijagrama posljedica identičnosti polja u Hamiltonijanu. Ako su polja u Hamiltonijanu sva različita, faktor simetrije dijagrama je uvijek jednak 1.
- Svaki dijagram ima svoj faktor simetrije. Evo još nekoliko primjera dijagrama koji imaju

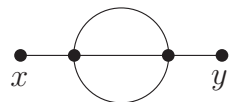
faktor simetrije različit od jedinice,



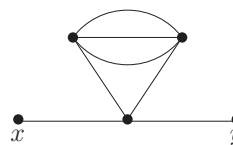
$$S = 2, \tag{633}$$



$$S = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \tag{634}$$



$$S = 3! = 6, \tag{635}$$




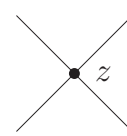

$$S = 3! \cdot 2 = 12. \tag{636}$$

- Kada niste sigurni u faktor simetrije, treba prebrojati sve ekvivalentne kontrakcije u izrazu za amplitudu.

• **Feynmanova pravila u koordinatnom prostoru**

- Sada možemo popisati Feynmanova pravila za ϕ^4 teoriju koja smo sreli do sada (uglavnom) u izračunu $\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$

- **Feynmanova pravila u koordinatnom prostoru:**

1. Za svaki propagator  = $D_F(x - y)$,
2. Za svaki vrh  = $(-i\lambda) \int d^4z$,
3. Za svaku vanjsku točku  = e^{-ipx} ,
4. Podijeliti s faktorom simetrije.

Faza koja je pridjeljena vanjskoj točki odgovara impulsu koji ulazi u točku x . Ako impuls izlazi iz nje, faza ima suprotan predznak.

- **Interpretacija:**

1. $(-i\lambda)$ je amplituda za emisiju (apsorpciju) čestica u vrhu.
2. $\int d^4z$ naznačuje da treba sumirati preko svih točaka u kojima se proces može desiti. To je zapravo **princip superpozicije** u QM: kada se proces može ostvariti na razne načine, treba pribrojiti amplitude svih mogućih načina ostvaranja događaja.
3. $D_F(x - y)$ je amplituda prijelaza iz y u x .
4. Za izračun pojedine amplitude, Feynmanova pravila kažu da treba pomnožiti sve amplitude (propagatore i faktore vrhova)

koje se javljaju u amplitudi danog procesa

Primjer 1: Napišimo amplitude koje odgovaraju dijagramima u (633), (634), (635), (636) i (632):

$$\mathcal{M}_a = \frac{1}{2}(-i\lambda) \int d^4z e^{ip_2x} D_F(z-z) e^{-ip_1z}, \quad (637)$$

$$\mathcal{M}_b = \frac{1}{8}(-i\lambda) \int d^4z D_F(z-z) D_F(z-z), \quad (638)$$

$$\mathcal{M}_c = \frac{1}{6}(-i\lambda)^2 \int d^4z_1 d^4z_2 e^{-ip_2z_2} D_F^3(z_2-z_1), e^{-ip_1z_1} \quad (639)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_d &= \frac{1}{12}(-i\lambda)^3 \int d^4z_1 d^4z_2 d^4z_3 e^{-ip_2z_1} e^{-ip_1z_1} D_F(z_1-z_3) D_F(z_1-z_2) \\ &\quad \times D_F^3(z_2-z_3). \end{aligned} \quad (640)$$

$$\mathcal{M}_e = \frac{1}{1}(-i\lambda) \int d^4z e^{iz(p_1+p_2+p_3+p_4)} \quad (641)$$

U dijagramu \mathcal{M}_b nemamo vanjskih linija, samo unutarnje, koje povezuju vrhove međudjelovanja. U dijagramima \mathcal{M}_a , \mathcal{M}_c i \mathcal{M}_d imamo dvije vanjske linije. U dijagramu \mathcal{M}_e imamo četiri vanjske linije. Vanjske linije smo za sada uveli bez objašnjenja – objasniti ćemo ih poslije.

• Feynmanova pravila u impulsnom prostoru

- Rabeći integralnu reprezentaciju Greenovih funkcija,

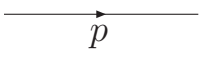
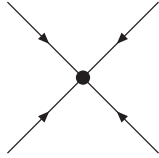
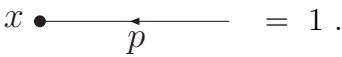
$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)}, \quad (642)$$

i integrirajući po internim koordinatama (odgovaraju H_I vrhovima), za svaki vrh dobijamo sačuvanje 4-impulsa

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & p_1 & \\ p_4 \swarrow & \bullet & \searrow p_2 \\ p_3 \nearrow & z & \end{array} \\ \leftrightarrow \end{array} \quad \int d^4z e^{-ip_1z} e^{-ip_2z} e^{-ip_3z} e^{-ip_4z} \\ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4). \end{aligned} \quad (643)$$

Ta sačuvanja 4 impulsa daju toliko uvjeta na neodređene 4 impulse propagatora koliko ima vrhova. Time dolazimo do Feynmanovih pravila za ϕ^4 teoriju u impulsnom prostoru

- Feynmanova pravila za ϕ^4 teoriju u impulsnom prostoru:

1. Za svaki propagator  = $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$,
2. Za svaki vrh  = $-i\lambda$,
3. Za svaku vanjsku točku  = 1.
4. Zakon sačuvanja za svaki vrh $(2\pi)^4 \delta(\sum p_f - \sum p_i)$.
5. Integracija po svakom neodređenom impulsu $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$.
6. Djeljenje s faktorom simetrije.

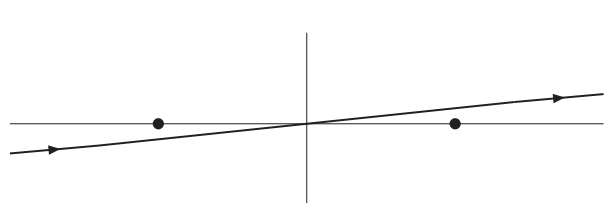
• **Integracija po vremenu (i integracija po prostoru)**

U Dysonovoj formuli za Greenovu funkciju dva polja (600) javlja se integracija \int_{-T}^T , gdje $T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$. Pogledajmo tu integraciju u dva različita slučaja.

a. Za dijagram tipa (643) (**povezani ne-vakuumski dijagram**) integral glasi

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \int_{-T}^T dz^0 \int d^3 z e^{-i(p_1+p_2+p_3+p_4) \cdot z}, \tag{644}$$

i on konvergira zahvaljujući malom imaginarnom faktoru $-i\epsilon$. Uvođenje tog malog imaginarnog faktora ekvivalentno je integraciji po realnoj vremenskoj osi ako je svaki od 4-impulsa zamjenjen sa 4-impulsom sa nultom komponentom sa malim imaginarnim članom, $p^0 \propto (1 + i\epsilon)$. U impulsnom prostoru integracija po p^0 komponentama je dana konturom,



$$\tag{645}$$

Ta ista kontura javlja se u definiciji Feynmanovog propagatora (642), a ostvaruje se dodavanjem malog imaginarnog člana masi propagatora. U tom smislu za ovakvu vrstu dijagrama T iščezava iz izraza u limesu kada $T \rightarrow \infty$.

b. **Dijagrami vakuumskog tipa** su koji imaju samo interne točke, kao što je npr.

dijagram u jedn. (634), ili dijagram

$$(646)$$

U svim takvim dijagramima koji nisu povezani sa dijagramima koji imaju vanjske linije (oni čine tzv. vakuumski dio ukupne amplitude) postoji jedna (i za povezani vakuumski dijagram samo jedna) $\delta^{(4)}$ -funkcija koja zbog drugih $\delta^{(4)}$ -funkcija ima argument jednak nuli. Značenje $\delta^{(4)}(0)$ dobijamo iz njene definicije ako pretpostavimo da su prostor i vrijeme veliki ali konačni (V i $2T$)

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = \int d^4 z e^{i \cdot 0} = (2T)V . \quad (647)$$

• **Odvajanje i kraćenje doprinosa vakuumskih dijagrama u korelacijskoj funkciji za dva polja**

- Dijagramatski ćemo "dokazati" kako izgledaju doprinosi vakuumskih dijagrama u korelacijskoj funkciji za dva polja.
- Tipičan dijagram je oblika

$$(648)$$

On sadrži dio povezan sa x i y te djelove koji nisu povezani s njima (vakuumske djelove).

- Vakuumske dijagrame i pripadne amplitude ćemo označiti sa V_i .
- Ako se isti vakuumski dijagram (npr V_i) javlja više puta kao u jedn. (648) on se u amplitudi javlja sa faktorom $1/n_i!$ (gdje je n_i broj koliko puta se dijagram V_i javlja) zbog simetrije amplitude na zamjenu tih identičnih doprinosa (zamjena ne vodi na novi doprinos).
- Suma svih doprinosa V_i tog dijagrama stoga daje bilo kojoj amplitudi, povezanoj sa tačkama x i y , faktor

$$\sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} = \exp V_i . \quad (649)$$

- Sve vakuumske amplitude daju bilo kojoj amplitudi povezanoj sa x i y faktor

$$\prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} = \prod_i \exp V_i = \exp \left(\sum V_i \right) . \quad (650)$$

- Sveukupna amplituda koja se javlja u brojniku jedn. (600) jednaka je stoga sumi svih amplituda povezanih sa x i y pomnoženih sa faktorom (650)

$$\left(\sum \text{povezane ampl.} \right) \times \exp \left(\sum_i V_i \right). \quad (651)$$

- Dijagramatski taj izraz glasi

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\varepsilon)} \langle 0|T \left\{ \phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} |0\rangle \\ &= \left(\begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ x \qquad y \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ x \qquad y \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ x \qquad y \end{array} + \dots \right) \\ & \times \exp \left[\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (652)$$

- S druge strane analogna analiza daje za nazivnik u jedn. (600)

$$\begin{aligned} & \langle 0|T \left\{ \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} |0\rangle \\ &= \exp \left[\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + \dots \right] \\ &= \exp \left(\sum_i V_i \right) \\ &\stackrel{(598)}{=} e^{-iE_0 2T} |\langle 0|\Omega\rangle|^2 = \langle 0|U(T, -T)|0\rangle. \end{aligned} \quad (653)$$

koji slijedi iz izraza za $|\Omega\rangle$ i $\langle \Omega|\Omega\rangle = 1$.

- Stoga je izraz za Greenovu funkciju dva polja prema (600) jednak

$$\begin{aligned} & \langle \Omega|T [\phi(x) \phi(y)] |\Omega\rangle \\ &= \text{suma svih povezanih dijagrama s dvije vanjske točke} \\ &= \left(\begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ x \qquad y \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ x \qquad y \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ x \qquad y \end{array} + \dots \right). \end{aligned} \quad (654)$$

- Primjetite da izraz sadrži samo amplitude koje su povezane sa x i y . Na sadrži vakuumske doprinose V_i .

• **Fizikalna interpretacija vakuumskih dijagrama**

- Iz jedn. (653) dobijamo

$$\exp\left[\sum_i V_i\right] \propto \exp[-iE_0(2T)]. \quad (655)$$

- Prema diskusiji kod jedn. (647) svaki vakuumski dijagram je proporcionalan $\delta(0) = V(2T)$, pa stoga iz (655) slijedi izraz za gustoću vakuumske energije,

$$\frac{E_0}{V} = \frac{i}{(2\pi)^4 \delta^4(0)} \left[\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right] - i \frac{\ln |\langle 0|\Omega \rangle|^2}{(2\pi)^4 \delta^4(0)}. \quad (656)$$

- Lijeva strane jednadžbe je neovisna o V i T .

• **Generalizacija izraza za Greenove funkcije na Greenove funkcije za više polja**

- Do sada smo razmatrali samo korelacijske funkcije dva polja.

- Poopćenje relacije (654) vrijedi za bilo koji broj polja. Korelacijska funkcija n polja ne sadrži u sebi vakuumske doprinose (tj doprinose čiji dijagrami nisu povezani niti sa jednom vanjskom točkom). Npr. za korelacijsku funkciju 4 polja vrijedi sljedeća relacija,

$$\begin{aligned} & \langle \Omega | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 | \Omega \rangle \\ &= \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \dots \quad (657) \\ &+ \text{diagram 6} + \text{diagram 7} + \text{diagram 8} + \dots \\ &+ \text{diagram 9} + \dots + \text{diagram 10} + \dots \end{aligned}$$

- Općenito

$$\begin{aligned} & \langle \Omega | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle \\ &= \left(\begin{array}{l} \text{suma svih dijagrama bez vakuumskih} \\ \text{doprinosa s } n \text{ vanjskih točaka} \end{array} \right). \quad (658) \end{aligned}$$

3.5 S-matrica i udarni presjek

□ Mjerljive veličine – eksperiment

• Brzina procesa, luminozitet i udarni presjek ¹

- Definicija po Particle Data Group

- U sudarivačima se udarni presjek definira preko luminoziteta,

$$R = \mathcal{L}\sigma . \quad (659)$$

Tu je R broj događaja (međudjelovanja) u sekundi, \mathcal{L} je luminozitet, a σ je udarni presjek. Definicija (659) zavisi o definiciji luminoziteta.

- U sinhrotronima sa nasuprotnim snopovima (CERN itd. – sudarivači s dva snopa) se u snopovima javljaju čestice u nakupinama. Broj čestica po nakupini u jednom odnosno drugom snopu je približno isti za svaki sudarivač i svojstvo je danog sudarivača. Zbog toga se obično definira luminozitet za dvije nakupine u snopovima

$$\mathcal{L} = \frac{fN_1N_2}{4\pi a_x a_y} \approx \frac{fN_1N_2}{A} . \quad (660)$$

Tu N_1 i N_2 označavaju (prosječan) broj čestica po nakupini prvog odnosno drugog snopa; f je frekvencija kojom nakupine obilaze puni krug u akceleratoru; a_x i a_y su veličine dimenzije duljine koje opisuju Gaussov oblik snopa; $A \approx 4\pi a_x a_y$ je "zajednička površina dvaju snopova".

- U definiciji luminoziteta (660) nije uključen broj nakupina u snopovima. Broj nakupina u snopovima je lakše mijenjati i on se podešava tako da je mjerenje optimalno. Ako bi se luminozitet definirao kao u (660) i ako bi broj nakupina u snopovima bio b_1 i b_2 , onda bi R bio dan sa

$$R = b_1 b_2 \mathcal{L}\sigma . \quad (661)$$

Međutim luminozitet se često definira na sljedeći način. Jedna od nakupina u jednom od snopova se uzima kao da je meta (npr. u snopu 1), na kojem se raspršava cijeli drugi snop. Time se za luminozitet dobija

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= b_2 \frac{fN_1N_2}{4\pi a_x a_y} \approx b_2 \frac{fN_1N_2}{A} \\ &= \frac{f\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2}{b_1 A} , \end{aligned} \quad (662)$$

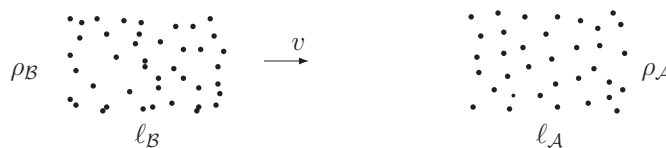
gdje su \mathcal{N}_1 i \mathcal{N}_2 ukupni brojevi čestica u prvom i drugom snopu, a za R se dobija

$$R = b_1 \mathcal{L}\sigma . \quad (663)$$

¹Zahvaljujem se prof. Planiniću za informacije u vezi pojma luminoziteta

- Peskinova definicija

- Peskin definira udarni presjek za raspršenje dvije nakupine čestica (\mathcal{A} i \mathcal{B}). Pretpostavlja se da su nakupine duljine ℓ_A i ℓ_B , da je gustoća čestica ρ_A i ρ_B , te da imaju zajedničku preklapnu površinu nakupina A dok jedna nakupina prolazi preko druge.



- Uz pretpostavku da su gustoće nakupina konstantne za udarni presjek σ se može definirati kao (usporedite sa (659) i (660)).

$$\sigma = \frac{\text{Broj raspršenja}}{\rho_A \ell_A \rho_B \ell_B A} . \quad (664)$$

- U realnim snopovima gustoće ρ_A i ρ_B nisu konstantne, ali su skale promjene gustoće i širine snopa puno veće od dosega međudjelovanja i širine paketa koji opisuje pojedinačne čestice. Zbog toga možemo uzeti da su ρ_A i ρ_B glatke funkcije x pa se može provesti integracija po širini snopa. To vodi na jednakost

$$\text{Broj događaja} = \sigma \ell_A \ell_B \int d^2x \rho_A(x) \rho_B(x) . \quad (665)$$

- Eksperimentalni uređaji mogu dati puno detaljniju informaciju o raspršenju od samog broja raspršenih čestica:

1. Pri raspršenju dvaju čestica npr. e^- na e^+ ima puno kanala (e^+e^- , $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$, $e^+e^-\gamma$, $e^+e^-\gamma\gamma$, $\mu^+\mu^-\gamma$, itd.). Eksperimentalci mogu mjeriti broj raspršenja u svaki od tih pojedinih kanala. Time se dobijaju udarni presjeci za pojedine kanale (npr. $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma)$)

2. Nadalje može se mjeriti i ovisnost broja raspršenja o vrijednostima konačnih impulsa i spinova. To vodi na diferencijale udarne presjeke $d\sigma/(d^3p_1 d^3p_3 \dots d^3p_n)$, gdje su p_1, \dots, p_n 4-impulsi vanjskih čestica (spinsku ovisnost nismo eksplicite naznačili).

• Širine raspada

- Širina raspada se definira kao mjera brzine raspada čestice. Pretpostavimo da imamo nakupinu čestica \mathcal{A} koje se raspadaju (pretpostavlja se da čestice miruju). Tada je (ukupna) širina raspada čestice \mathcal{A} definirana sa

$$\Gamma_{\mathcal{A}} \equiv \frac{\text{Broj raspada čestica } \mathcal{A} \text{ u jedinici vremena}}{\text{Trenutni broj čestica } \mathcal{A}} \equiv -\frac{dN_{\mathcal{A}}/dt}{N_{\mathcal{A}}} , \quad (666)$$

gdje je t vrijeme u sustavu mirovanja čestica \mathcal{A} .

- Veza sa vremenom života čestice je

$$\tau_{\mathcal{A}} = \frac{1}{\Gamma_{\mathcal{A}}} \quad (667)$$

(Poluvrijeme života je $(t_{1/2})_{\mathcal{A}} = \tau_{\mathcal{A}} \cdot \ln 2$).

- U NR kvantnoj mehanici se širine raspada nestabilnih stanja (npr. u atomskoj fizici) javljaju u eksperimentima kao rezonance. U blizini rezonantne energije E_0 NR amplituda raspršenja dana je Breit-Wignerovom formulom,

$$f(E) \propto \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma/2}, \quad (668)$$

odakle slijedi da udarni presjek u blizini rezonantne energije ima oblik

$$\sigma \propto \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (669)$$

- U relativističkoj fizici generalizacija Breit-Wignerove formule (668) glasi

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + im\Gamma} \approx \frac{1}{2E_{\vec{p}}(p^0 - E_{\vec{p}} + i(m/E_{\vec{p}})\Gamma/2)}. \quad (670)$$

Mjerena brzina raspada čestice u općem sustavu je $(m/E_{\vec{p}})\Gamma$, gdje je Γ definiran u sustavu mirovanja čestice. $(m/E_{\vec{p}})$ dolazi zbog "vremenske dilatacije". Izraz s lijeve strane jednadžbe (670) je relativistički invarijantan.

□ S matrica

- U karakterističnom eksperimentu u čestičnoj i nuklearnoj fizici, skiciranom na slici nekoliko se makroskopski udaljenih čestica približava, sudara u mikroskopski malom području i produkti međudjelovanja se opet detektiraju na makroskopskim udaljenostima.

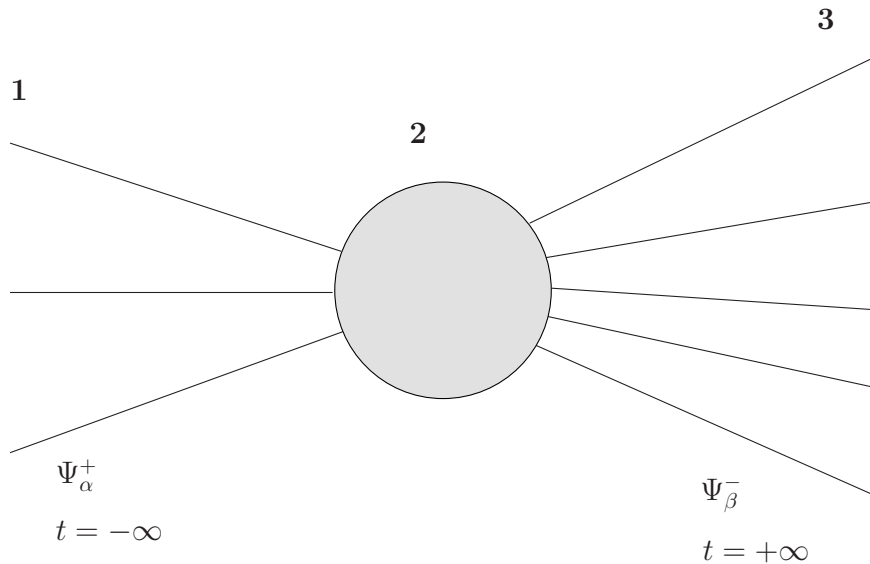


Figure 3: 3.1 Opća slika raspršenja

- 1, 3 : fizikalna stanja prije i poslije interakcije, udaljena međusobno toliko da efektivno ne međudjeluju. Ta stanja su tzv. in (ulazna) i out (izlazna) stanja.
- Prijelazni matricni element između početnog i konačnog stanja definira tzv. S -matricni element prijelaza između ta dva stanja.
- U eksperimentu se mjere distribucije vjerojatnosti — ovdje dajemo formalizam za njihovo nalaženje.

• **In i out stanja**

- **Weinbergova definicija :**

- Stanja koja opisuju procese kao na gornjoj slici su u **Heisenbergovoj slici**. Stoga se ona **ne razvijaju u vremenu**. Međutim ako se napravi translacija u vremenu koja povezuje vremena polaznog (S) i konačnog (S') inercijalnog sustava relacijom $t' = t - \tau$, sustava tada stanja u dva sustava nisu ista već su povezana relacijom

$$\Psi' = e^{-iH\tau}\Psi . \quad (671)$$

- **Stanja na slici** odgovaraju dvama stanjima kakve vide promatrači u sustavima koji su s obzirom na vrijeme međudjelovanja translaterani u vrijeme $\tau \rightarrow -\infty$ (stanje Ψ_α^+) odnosno $\tau \rightarrow \infty$ (stanje Ψ_β^-)

- Nadalje, zamišlja se da se ukupni Hamiltonijan H može razdijeliti na slobodni Hamiltonijan H_0 i Hamiltonijan međudjelovanja H_{int} ,

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (672)$$

na takav način da je **spektar slobodnih svojstvenih stanja ϕ_α i spektar stanja u međudjelovanju Ψ_α isti**,

$$\begin{aligned} H\Psi_\alpha &= E_\alpha\Psi_\alpha , \\ H_0\Phi_\alpha &= E_\alpha\Phi_\alpha . \end{aligned} \quad (673)$$

Tako svakom stanju Ψ_α odgovara neko stanje slobodnog Hamiltonijana Φ_α iste energije. (Primjetite da ovdje Weinberg odstupa od Peskina : Po Peskinu osnovno stanje kompletnog Hamiltonijana $|\Omega\rangle$ i osnovno stanje slobodnog Hamiltonijana $|0\rangle$ nemaju iste energije).

- **In (out) stanje** se definira kao stanje koje zadovoljava relaciju

$$\exp(-iH\tau) \int d\alpha g(\alpha)\Psi_\alpha^\pm \xrightarrow{\pm : \tau \rightarrow \mp\infty} \exp(-iH_0\tau) \int d\alpha g(\alpha)\Phi_\alpha , \quad (674)$$

za svaku glatku funkciju $g(\alpha)$ kvantnih brojeva α (tzv. test funkcija).

- **Formalno** se relacija (674) zapisuje

$$\Psi_\alpha^\pm = \Omega(\mp\infty)\Phi_\alpha , \quad (675)$$

$$\Omega(\tau) = \exp(iH\tau)\exp(-iH_0\tau) . \quad (676)$$

Napomena : **Jednakost** (675,676) se uvijek mora interpretirati kao relacija (674).

Napomena : **Realna stanja** su lokalizirana u prostoru. Stoga ona jesu valni paketi izgrađeni od stanja određene energije i impulsa. Nadalje, iako jesu valni paketi, ona imaju jako dobro definiran impuls i energiju, dakle to su valni paketi koji su u impulsnom prostoru lokalizirani oko nekog impulsa koji se mjeri kao impuls čestice (isto vrijedi i za energiju).

- **Peskinova definicija:**

- Peskin za in i out stanja uzima valne pakete

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} \phi(\vec{k}) |\vec{k}\rangle, \quad (677)$$

koji su definirani u limesu $t \rightarrow \mp\infty$. Tu je $\phi(\vec{k})$ Fourierov transformat neke prostorne funkcije normirane na jedinicu,

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\phi(\vec{k})|^2 = 1. \quad (678)$$

a $|\vec{k}\rangle$ je svojstveno stanje **kompletnog Hamiltonijana** H (ono odgovara stanju Ψ_α u Weinbergovoj notaciji).

- **Ortonormiranost in i out stanja:** Za slobodnu teoriju (tada bi $|\vec{k}\rangle$ odgovarao Φ_α u Weinbergovoj notaciji) vrijedi $|\vec{k}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{k}}} a_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle$ i tada, uz normalizaciju (678), vrijedi

$$\langle\phi|\phi\rangle = 1. \quad (679)$$

Kako prema (675) stanje $|\psi\rangle$ u teoriji s međudjelovanjem i stanje $|\phi\rangle$ stanje u slobodnoj teoriji povezuje **unitaran operator**, **normiranost** vrijedi i za in i out stanja.

- Sa slike 3 je intuitivno jasno da mi zapravo tražimo prijelaznu amplitudu

$$\underbrace{\langle\phi_1\phi_2\dots|}_{\text{budućnost}} \underbrace{|\phi_A\phi_B\rangle}_{\text{prošlost}}, \quad (680)$$

odnosno pripadnu vjerojatnost

$$\mathcal{P} = \left| \underbrace{\langle\phi_1\phi_2\dots|}_{\text{budućnost}} \underbrace{|\phi_A\phi_B\rangle}_{\text{prošlost}} \right|^2. \quad (681)$$

Valni paketi (in i out stanja po Peskinu) ϕ_A, ϕ_B , i ϕ_1, ϕ_2, \dots su lokalizirani u prostoru, pa kako su na velikim udaljenostima za $t \rightarrow -\infty$ odnosno $t \rightarrow \infty$, međusobno ne međudjeluju (po principu dekompozicije nakupina). Zbog međudjelovanja H_{int} koja miješa stanja prijelazna amplituda je (može biti) različita od nule.

- **Konstrukcija in stanja** $|\phi_A\phi_B\rangle_{in}$

- In stanja, $|\phi_A\phi_B\rangle_{in}$ definiramo iz inercijalnog sustava vremenski transliranog u $t \rightarrow -\infty$ kao superpozicije stanja određenog impulsa i energije s obzirom na ukupni operator impulsa i ukupni Hamiltonijan, $|\vec{k}_1\vec{k}_2\rangle$. Pri tome se zahtjeva da su valni paketi tj. test funkcije $\phi(\vec{k}_i)$ koji definiraju te valne pakete koncentrirani (imaju oštar maksimum) oko nekih određenih vrijednosti impulsa \vec{p}_i .

- Pri tome je zgodno uvesti parametar sudara (engl. impact parametar) tj. relativnu udaljenost dvaju valnih paketa s obzirom na relativni smjer gibanja, \vec{b} ,

$$|\phi_A\phi_B\rangle_{in} = \int \frac{d^3k_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_B}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A\phi_B e^{-i\vec{b}\cdot\vec{k}_B}}{\sqrt{(2E_A)(2E_B)}} |\vec{k}_A\vec{k}_B\rangle_{in}. \quad (682)$$

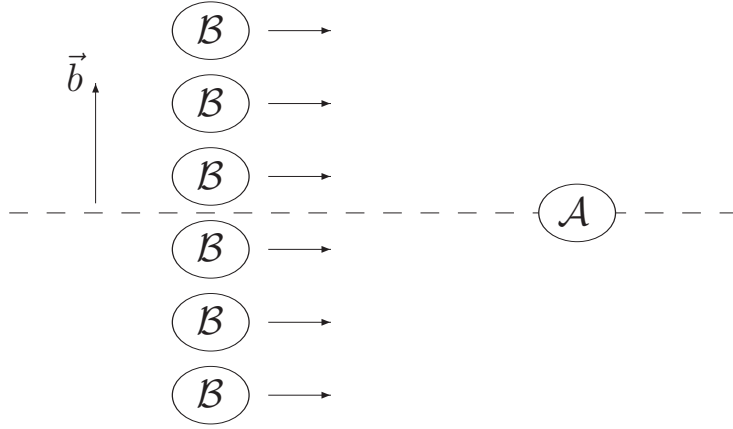


Figure 4: 4.5 Paketi in stanja i parametar raspršenja

- **Out stanja** ${}_{out}\langle\phi_1\phi_2\dots|$

- Definiraju se analogno in stanjima ali u inercijanom sustavu translaticanom u vremenu s obzirom na vrijeme raspršenja za $t \rightarrow +\infty$. Opet se definiraju kao valni paketi svojstvenih stanja određenog impulsa i energije,

$${}_{out}\langle\phi_1\phi_2\dots| = \left(\prod_f \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{\phi_f(\vec{p}_f)}{\sqrt{2E_f}} \right) {}_{out}\langle\vec{p}_1\vec{p}_2\dots|. \quad (683)$$

Konačni rezultat za udarni presjek ne zavisi o tome da li se za out stanja uzimaju produktna stanja točno određenog impulsa ili produktno stanje valnih paketa. Stoga ćemo, zbog jednostavnosti računa, uzeti da su out stanja dobro definirano impulsa a ne valni paketi.

• S matrica

- Vjerojatnost (681) odnosno prijelaznu amplitudu (680) najlakše je definirati preko in i out stanja određenog impulsa.

- S matrični element je definiran kao amplituda vjerojatnosti prijelaza između in i out stanja. Konkretno za stanja određenog impulsa

$$\begin{aligned} S_{fi} &\equiv {}_{out}\langle\vec{p}_1\vec{p}_2\dots|\vec{k}_A\vec{k}_B\rangle_{in} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\langle\vec{p}_1\vec{p}_2\dots|}_{T} \underbrace{|\vec{k}_A\vec{k}_B\rangle}_{-T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle\vec{p}_1\vec{p}_2\dots|e^{-iH(2T)}|\vec{k}_A\vec{k}_B\rangle. \end{aligned} \quad (684)$$

- Izraz u drugom retku vrijedi u svakom referentnom sustavu.

- **Struktura S matrice - T matrica, sačuvanje energije, invarijantni matrični element**

- Čak ako teorija uključuje međudjelovanje, postoji mogućnost da čestice ne međudjeluju tj. postoji dio S matrice koji je proporcionalan jediničnom operatoru. Da bi se izolirao dio S matrice sa međudjelovanjima definira se T matrica,

$$S_{fi} = \delta_{fi} + iT_{fi} . \quad (685)$$

- Nadalje, kako S matrica (684) sadrži svojstvena stanja ukupnog Hamiltonijana i impulsa, te ukupni Hamiltonijan, te kako operatori ukupnog Hamiltonijana i ukupnog impulsa međusobno komutiraju, S matrica mora čuvati 4-impuls, tj. mora sadržavati kao faktor $\delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f)$.

- Izvlačenjem tog faktora iz T matrice dobija se tzv. invarijantni matrični element

$$T_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f) \mathcal{M}(k_{\mathcal{A}}, k_{\mathcal{B}} \rightarrow \{p_f\}), \quad (686)$$

gdje su impulsi $k_{\mathcal{A}}$, $k_{\mathcal{B}}$ i p_f na ljusci mase.

- Gornje definicije dane S matrice, T matrice, prijelaznih matričnih elemenata itd. dane su samo za prijelaz dvije početne čestice u neki skup konačnih čestica. Međutim ista definicija vrijedi i za prijelaz jedne, tri ili više čestica u neki skup konačnih čestica.

• Udarni presjek

- U procesu raspršenja dvije početne čestice dobro definiranih impulsa se raspršavaju u skup konačnih čestica čiji impuls nije vrlo precizno definiran. Zbog toga se u izrazima ne javlja prijelazna vjerojatnost za točno određene konačne impulse, već se oni integriraju. U tu svrhu trebamo definirati **diferencijalnu prijelaznu vjerojatnost**,

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}\mathcal{B} \rightarrow 12 \dots n) = \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | \phi_{\mathcal{A}} \phi_{\mathcal{B}} \rangle|^2 . \quad (687)$$

koja je tako definirana za odabir normalizacije u ovoj knjizi (sjetite se da je normalizacija stanja Lorentz invarijantna pa stoga i integracija po faznom prostoru mora također biti Lorentz invarijantna; također pri ubacivanju potpunog skupa stanja se integrira po Lorentz invarijantnoj mjeri)

- Za jednu česticu u meti (\mathcal{A}) i mnogo upadnih čestica koje u područje međudjelovanje ulaze sa različitim vrijedostima ulaznih parametara \vec{b} broj raspršenja (N) jednak je

$$N = \sum_{\substack{\text{sve ulazne} \\ \text{čestice } i}} \mathcal{P}_i = \int d^2 b n_{\mathcal{B}} \mathcal{P}(\vec{b}), \quad (688)$$

gdje je $n_{\mathcal{B}}$ broj čestica \mathcal{B} po jedinici površine $d^2 b$.

- Uz pretpostavku da je $n_{\mathcal{B}}$ konstantan na skali dosega međudjelovanja, $n_{\mathcal{B}}$ se može staviti izvan $d^2 b$ integracije.

- Tada se **udarni presjek** σ definira kao

$$\sigma = \frac{N}{n_{\mathcal{B}} N_{\mathcal{A}}} = \frac{N}{n_{\mathcal{B}} \cdot 1} = \int d^2 b \mathcal{P}(\vec{b}) . \quad (689)$$

Primjetite da je definicija vrijedi i za općeniti slučaj kada je broj čestica mete N_A različit od jedinice.

- **Diferencijalni udarni presjek**

- Diferencijalni udarni presjek za dani diferencijalni element faznog prostora konačnih čestica glasi

$$d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int d^2 b \left(\prod_{i=A,B} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i(\vec{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3 \bar{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i^*(\vec{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \right) \times e^{i\vec{b} \cdot (\vec{k}_B - \vec{k}_A)} (out\langle\{\vec{p}_f\}|\{\vec{k}_i\}\rangle_{in}) (out\langle\{\vec{p}_f\}|\{\vec{k}_i\}\rangle_{in})^*, \quad (690)$$

gdje se integrira po upadnim parametrima \vec{b} i po Fourierovim komponentama ulaznih čestica $\vec{k}_A, \vec{k}_B, \bar{k}_A, \bar{k}_B$. Po faznom prostoru izlaznih čestica se ne integrira.

- Integracija po $d^2 b$ daje faktor

$$(2\pi)^2 \delta(\vec{k}_B^\perp - \vec{k}_A^\perp), \quad (691)$$

gdje su \vec{k}_B^\perp i \vec{k}_A^\perp komponente impulsa okomite na smjer upada čestica B za koju ćemo zbog jednostavnosti uzeti da je u smjeru pozitivne z osi.

- Pretpostavljajući da nas ne interesira slučaj kada nema raspršenja možemo zanemariti jedinični član (δ_{fi}) u (685),

$$\begin{aligned} (out\langle\{\vec{p}_f\}|\{\vec{k}_i\}\rangle_{in}) &= i\mathcal{M}(\{k_i\} \rightarrow \{p_f\})(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum k_i - \sum p_f), \\ (out\langle\{\vec{p}_f\}|\{\vec{k}_i\}\rangle_{in})^* &= -i\mathcal{M}^*(\{\bar{k}_i\} \rightarrow \{p_f\})(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum \bar{k}_i - \sum p_f). \end{aligned} \quad (692)$$

$\delta^{(4)}$ funkcije u (692) zapisujemo preko okomitih komponenti, z komponenti i nultih komponenti,

$$\begin{aligned} \delta^{(4)}(\sum k_i - \sum p_f) &= \delta^{(2)}(\sum \vec{k}_i^\perp - \sum \vec{p}_f^\perp) \\ &\times \delta(\sum k_i^z - \sum p_f^z) \delta(\sum E_i - \sum E_f), \\ \delta^{(4)}(\sum \bar{k}_i - \sum p_f) &= \delta^{(2)}(\sum \vec{\bar{k}}_i^\perp - \sum \vec{p}_f^\perp) \\ &\times \delta(\sum \bar{k}_i^z - \sum p_f^z) \delta(\sum \bar{E}_i - \sum E_f). \end{aligned} \quad (693)$$

Ukupan broj (2π) faktora koji se javlja uz delta funkcije je 10 (tj. $(2\pi)^{2+4+4} = (2\pi)^{10}$).

- Provodimo integracije preko \vec{k}_A i \vec{k}_B impulsa u delta funkcijama. Okomite komponente daju

$$\int d^2 \vec{k}_A^\perp d^2 \vec{k}_B^\perp \delta^{(2)}(\vec{k}_B^\perp - \vec{k}_A^\perp) \delta^{(2)}(\vec{k}_A^\perp + \vec{k}_B^\perp - \sum_f \vec{p}_f^\perp) \delta^{(2)}(\vec{k}_A^\perp + \vec{k}_B^\perp - \sum_f \vec{p}_f^\perp)$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^2 \vec{k}_A^\perp \delta^{(2)}(\vec{k}_A^\perp + \vec{k}_B^\perp - \sum_f \vec{p}_f^\perp) \delta^{(2)}(\vec{k}_A^\perp + \vec{k}_B^\perp - \sum_f \vec{p}_f^\perp) \\
&= \delta^{(2)}(\vec{k}_A^\perp + \vec{k}_B^\perp - \sum_f \vec{p}_f^\perp) .
\end{aligned} \tag{694}$$

Primjetite da vrijedi $\vec{k}_B^\perp = \vec{k}_B^\perp$ i $\vec{k}_A^\perp = \vec{k}_A^\perp$. z komponente k_i^z i \bar{k}_i^z su međusobno nezavisne. \bar{k}_i^z integracije daju

$$\begin{aligned}
&\int d\bar{k}_A^z d\bar{k}_B^z \delta(\bar{k}_A^z + \bar{k}_B^z - \sum_f p_f^z) \delta(\bar{E}_A + \bar{E}_B - \sum_f E_f^z) \\
&= \int d\bar{k}_A^z \delta\left(\sqrt{\vec{k}_A^2 + m_A^2} + \sqrt{\vec{k}_B^2 + m_B^2} \Big|_{\bar{k}_B^z = -\bar{k}_A^z + \sum_f p_f^z} - \sum_f E_f^z\right) \\
&= \int d\bar{k}_A^z \delta(\bar{k}_A^z - \bar{k}_A^{z,0}) \frac{1}{\left(\frac{\bar{k}_A^{z,0}}{E_A} - \frac{\bar{k}_B^z}{E_B}\right)_{\bar{k}_B^z = -\bar{k}_A^z + \sum_f p_f^z}} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\bar{k}_A^{z,0}}{E_A} - \frac{\bar{k}_B^z}{E_B}\right)_{\bar{k}_B^z = -\bar{k}_A^{z,0} + \sum_f p_f^z}} = \frac{1}{|\bar{v}_A^z - \bar{v}_B^z|} .
\end{aligned} \tag{695}$$

Tu je $\bar{k}_A^{z,0}$ rješenje jednadžbe definirane delta funkcijom u drugom redu (695). k_i^z integracije daju potpuno isti rezultat sa $\delta(k_A^z + k_B^z - \sum_f p_f^z) \delta(E_A + E_B - \sum_f E_f^z)$. Preciznije jednaka su rješenja za jednadžbe iz δ funkcija

$$k_A^{z,0} = \bar{k}_A^{z,0}, \tag{696}$$

pa su stoga jednake i sve ostale veličine

$$k_B^z = \bar{k}_B^z, \quad E_A = \bar{E}_A, \quad E_B = \bar{E}_B . \tag{697}$$

k_i^z integracije nećemo provoditi. Samo nam je bitno da možemo primjeniti jednakosti (696) i (697).

- Upotrebom jednakosti (691-697), za diferencijalni udarni presjek (690) dobijamo

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int \frac{d^3 k_A}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_B}{(2\pi)^3} \frac{|\phi_A(k_A)|^2}{2E_A} \frac{|\phi_B(k_B)|^2}{2E_B} \\
&\times (2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum_f p_f) \frac{1}{|\vec{v}_A - \vec{v}_B|} |\mathcal{M}(\{k_i\} \rightarrow \{p_f\})|^2 .
\end{aligned} \tag{698}$$

- Sada ćemo upotrijebiti pretpostavku da su valni paketi imaju **oštar maksimum** oko vrijednosti impulsa \vec{p}_A i \vec{p}_B . Druge funkcije kao što su energije, brzine i kvadrat invarijantnog matričnog elementa imaju puno blažu ovisnost o vrijednostima impulsa po kojima

se integrira. Zato se u njih mogu uvrstiti umjesto \vec{k}_A i \vec{k}_B vrijednosti \vec{p}_A i \vec{p}_B i može ih se izvući izvan integrala,

$$d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \frac{|\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_f\})|^2}{2E_A 2E_B |\vec{v}_A - \vec{v}_B|} \\ \times \int \frac{d^3 k_A}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_B}{(2\pi)^3} |\phi_A(k_A)|^2 |\phi_B(k_B)|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum_f p_f). \quad (699)$$

- Dodatno pojednostavljenje formule za udarni presjek slijedi iz **svojstava detektora**. Detektori (uglavnom) **nemaju rezoluciju u impulsu bolju od širine valnih paketa**. Stoga je poznavanje kroz koji dio faznog prostora prošla čestica (čestice) slabija od širine valnog paketa, pa se nekoherentna suma (koja se provodi kada nemamo informaciju kroz koji dio faznog prostora ili nekog njegovog podskupa čestica prolazi) provodi po elementima faznog volumena većim od širine valnog paketa. Stoga se zbroj $k_A + k_B$ u δ -funkciji u dobroj aproksimaciji može zamijeniti sa $p_A + p_B$ i **δ -funkcija se može izvući izvan integrala**. Preostaju dvije nezavisne impulsne integracije po normaliziranim funkcijama valnih paketima koje daju jedinicu. Time konačna formula za udarni presjek postaje neovisna o detaljima valnih paketa koje opisuju ulazne čestice,

$$d\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B |\vec{v}_A - \vec{v}_B|} \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \\ \times |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta(p_A + p_B - \sum_f p_f). \quad (700)$$

Transformacije udarnog presjeka na Lorentzove transformacije

- U izrazu (700) su $|\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta(p_A + p_B - \sum_f p_f)$ i integralna mjera po konačnim impulsima,

$$dLIPS_n = d\Pi_n = \left(\prod_f \int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta(p_A + p_B - \sum_f p_f), \quad (701)$$

(LIPS stoji za "Lorentz Invariant Phase Space") Lorentz invarijantni. Peskinova oznaka za $dLIPS_n$ je $d\Pi_n$. To znači da je transformacija diferencijalnog udarnog presjeka $d\sigma$ definirana faktorom (pretpostavlja se da se snopovi šire duž z osi)

$$\frac{1}{E_A E_B |v_A - v_B|} = \frac{1}{|E_B p_A^z - E_A p_B^z|} = \frac{1}{|\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_A^\mu p_B^\nu|}, \quad (702)$$

Ta veličina nije Lorentz invarijantna, ali je invarijantna na boostove (potiske) duž z osi. Ona se transformira na Lorentzove transformacije kao površina udarnog presjeka.

Ipak, u knjigama se često identificira sa Lorentz invarijantnom veličinom

$$\frac{1}{E_A E_B |v_A - v_B|} = \frac{1}{\sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}}. \quad (703)$$

Tako se postiže da je udarni presjek "Lorentz invarijantna veličina".

- $LIPS_2$ u sustavu centra mase konačnih čestica

- Za dvije čestice u konačnom stanju u sustavu centra mase (CM sustav, CMS), $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} \int dLIPS_2 &\equiv \int d\Pi_2 = \int \frac{dp_1 p_1^2 d\Omega}{(2\pi)^3 2E_1 2E_2} (2\pi) \delta(E_{cm} - E_1 - E_2) \\ &= \int d\Omega \frac{p_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{p_1}{E_1} + \frac{p_1}{E_2} \right)^{-1} \\ &= \int d\Omega \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}_1|}{E_{cm}}, \end{aligned} \quad (704)$$

gdje je $E_1 = \sqrt{p_1^2 + m_1^2}$, $E_2 = \sqrt{p_1^2 + m_2^2}$ i E_{cm} je ukupna energija ulaznih čestica. U drugom redu, (jedn. (704)), izvršena je integracija preko impulsa. Time impuls (njegov iznos) p_1 postaje jednak,

$$\begin{aligned} p_1 &\rightarrow p_1^0 \equiv \frac{1}{2E_{CM}} \lambda^{1/2}(E_{CM}^2, m_1^2, m_2^2), \\ \lambda(a, b, c) &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \end{aligned} \quad (705)$$

($\lambda(x, y, z)$ je tzv. trokutna funkcija). U trećem retku je izraz sređen.

- Primjenom (704) dobija se za dvo-čestično konačno stanje

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{4E_A E_B |v_A - v_B|} \frac{p_1}{(2\pi)^2 4E_{CM}} |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p_1, p_2)|^2 \quad (706)$$

$$= \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2} \frac{p_1}{p_A}. \quad (707)$$

- Posebno ako su mase svih čestica koje se raspršuju iste, tada vrijedi

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2}. \quad (708)$$

• Širina raspada

- Formalno, izraz za diferencijanu širinu raspada se dobija iz izraza za udarni presjek zamjenama svih varijabli i veličina ulaznih dvaju čestica sa odgovarajućim veličinama jedne čestice koja je u mirovanju (Peskin definira širinu raspada u sustavu u kojem čestica koja se raspada miruje)

$$\begin{aligned} p_A, p_B &\rightarrow m_A, \\ 4E_A E_B |v_A - v_B| &\rightarrow 2m_A. \end{aligned} \quad (709)$$

Time za širinu raspada u sustavu mirovanja čestice dobijamo

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}(m_{\mathcal{A}} \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^4((m_{\mathcal{A}}, \vec{0}) - \sum_f p_f) \quad (710)$$

(u svakom drugom sustavu mora se uključiti faktor vremenske dilatacije $m_{\mathcal{A}}/E_{\mathcal{A}}$).

- Problem sa gornjom definicijom jest da ne postoji sustav u $t \rightarrow -\infty$ za česticu koja se raspada (ne postoji ulazno "in" stanje. Ipak je jedn. (710) ispravna (vidi poslije).

• **Komentar za identične ulazne odnosno izlazne čestice**

- Formule (689) (710) vrijede i kada u konačnom stanju ima identičnih čestica. (Račun matričnog elementa za identične čestice se razlikuje od onog za neidentične, međutim o tome sada ne govorimo.) Međutim u izrazima za ukupni udarni presjek i širinu raspada se mora paziti da se ne integrira po stanjima koje se mogu dobiti zamjenom dvaju identičnih čestica jer se takva stanja ne mogu razlikovati. Ako postoje identične čestice u konačnom stanju, ispravan izraz se efektivno dobija integracijom po cijelom faznom prostoru i diobom sa faktortma $n_i!$ gdje su n_i brojevi identičnih čestica i u konačnom stanju.

3.6 Račun S-matričnih elemenata iz Feynmanovih dijagrama

- U ovom poglavlju ćemo napisati formulu za invarijantni matrični element preko Feynmanovih pravila i dati motive zašto ta formula mora tako izgledati. Kasnije ćemo dati dokaz te formule.

• **Formula za S matrični element preko Feynmanovih dijagrama** - Da bismo izračunali S-matrični element (684)

$$S_{fi} = {}_{out}\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_{in} = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | e^{-iH(2T)} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle. \quad (711)$$

moramo izraziti in i out stanja u (711) preko odgovarajućih stanja slobodnog Hamiltonijana H_0 . To smo uspješno napravili za vakuumsko stanje Hamiltonijana H (vidi (590)),

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} e^{-iHT} |0\rangle, \quad (712)$$

i po analogiji očekujemo da vrijedi relacija oblika

$$|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-iHT} |\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_0. \quad (713)$$

Tu je $|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle_0$ slobodno stanje koje odgovara stanju u međudjelovanju $|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle$.

- U izvodu (712) korišteno je svojstvo vakuuma da je to stanje najniže energije i da postoji energetski procjep između vakuumske stanja i svih drugih stanja.

- Stanja $|\vec{k}_A \vec{k}_B\rangle$ nemaju takva svojstva relativno prema drugim stanjima, imaju samo svojstvo da su prostorno odvojena od drugih stanja. Problem je povezan s činjenicom da međudjelovanja ne određuju samo raspršenja "in" čestica u "out" čestice, već također tvore odnosno definiraju strukturu tih čestica.

- Uz pretpostavku da vrijedi (713) i rabeći izraz za Hamiltonijan (polja) u međudjelovanju (vidi (574) desnu stranu (712) možemo pisati

$$\begin{aligned} & {}_{out}\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_{in} \\ & \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | T \left(\exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0. \end{aligned} \quad (714)$$

- Kao i kod korelacijskih funkcija (vidi (600) i (658)) dolazi do kraćenja faktora između stanja u međudjelovanju i slobodnih stanja i to vodi na konačnu formulu za S (odnosno T) matrični element,

$$\begin{aligned} & {}_{out}\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_{in} = \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | e^{-iH(2T)} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left({}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | T \left(\exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \right) \underset{\substack{\text{povezani} \\ \text{amputirani}}}{\cdot}. \end{aligned} \quad (715)$$

U izrazu (714) se atributi "povezani" i "amputirani" odnose na klasu mogućih Feynmanovih dijagrama koji su dozvoljeni u S matričnim elementima i bit će definirani malo

poslije.

□ Motivacija za formulu (715) – eliminacija ”loših” članova

- Promotrimo sada formulu (715) član po član u perturbativnom razvoju za dvije čestice i konačnom stanju u ϕ^4 teoriji. Uz put ćemo odbacivati sve dijagrame koji bilo ne daju doprinos raspršenju ili vode na doprinose koji su loše definirani. Također ćemo uvesti neke nove pojmove kao što su vanjska linija, potpuno povezani dijagram, amputirani dijagram.

• Doprinosi nultog reda

- Prvi član u razvoju glasi

$$\begin{aligned} {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 &= \sqrt{2E_1 2E_2 2E_A 2E_B} \langle 0 | a_2 a_1 a_A^\dagger a_B^\dagger | 0 \rangle \\ &= 2E_A 2E_B (2\pi)^6 \left(\delta(\vec{p}_A - \vec{p}_1) \delta(\vec{p}_B - \vec{p}_2) \right. \\ &\quad \left. + \delta(\vec{p}_A - \vec{p}_2) \delta(\vec{p}_B - \vec{p}_1) \right) \end{aligned} \quad (716)$$

$$= \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \mathcal{A} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \mathcal{B} \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathcal{A} \quad \mathcal{B} \end{array} . \quad (717)$$

Jedn. (716) je dijagramatski prikazana u (717). Primjeti da je zbog δ -funkcija u (716) početno stanje jednako konačnom, pa stoga pripadni matrični element odgovara $\mathbf{1}$ -ici u S -matričnom elementu a ne T operatoru koji opisuje raspršenja. Stoga ne spada u ”povezane, amputirane” dijagrame iz (715).

• Doprinosi prvog reda, vanjske linije

- Drugi član u razvoju ${}_{out}\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_{in}$ glasi

$$\begin{aligned} {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \left(-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi_I^4(x) \right) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \\ = {}_0\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N \left(-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi_I^4(x) + \text{kontrakcije} \right) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 . \end{aligned} \quad (718)$$

- U prvom redu jedn. (718) smo uzeli međudjelovanje u prvom redu perturbativnog razvoje prema definiciji (715).

- U drugom redu (718) smo upotrijebili Wickov teorem za T produkt polja (vidi (608)).

- Budući da vanjska stanja nisu vakuum ($|0\rangle$), nije nužno da se sva polja pokontrahiraju da bi se dobio rezultat različit od nule. Neka polja u kombinaciji sa operatorima stvaranja/poništenja koja se javljaju u ulaznim/izlaznim stanjima daju rezultat različit

od nule. Npr.

$$\begin{aligned}
 \phi_I(x)|\vec{p}\rangle_0 &= \phi_I^\dagger(x)|\vec{p}\rangle_0 \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} a_{\vec{k}} e^{-ik \cdot x} \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} e^{-ik \cdot x} \sqrt{2E_{\vec{p}}} (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{p}) |0\rangle \\
 &= e^{-ip \cdot x} |0\rangle, \tag{719}
 \end{aligned}$$

i analogno

$${}_0\langle\vec{p}|\phi_I(x) = {}_0\langle\vec{p}|\phi_I^-(x) = \langle 0|e^{ip \cdot x}. \tag{720}$$

- Definiramo **kontraksije polja i vanjskih stanja** (ponekad se definiraju sa $|0\rangle$, ponekad bez njega – Peskin nije sasvim konzistentan)

$$\begin{aligned}
 \overline{\phi_I(x)|\vec{p}\rangle_0} &= e^{-ip \cdot x} = \begin{array}{c} \rangle \\ \hline x \quad p \end{array}, \\
 {}_0\langle\vec{p}|\overline{\phi_I(x)} &= e^{ip \cdot x} = \begin{array}{c} \hline p \quad x \\ \langle \end{array}. \tag{721}
 \end{aligned}$$

- Primjetite da u izrazu za kontrakciju nema vakuuma, već samo faze.

- Dijagrami uz te faze su grafički prikazi tih kontrakcija, tzv. **vanjske linije**. One se moraju dodati Feynmanovim pravilima koje smo do sada imali (vanjske linije smo bili prije pridruživali propagatorima s jednom točkom po kojoj se nije integriralo).

- U dijagramima (717) imamo direktnu "kontrakciju" operatora stvaranja i poništenja u početnim i konačnim stanjima. Linije predstavljaju tu "kontrakciju" – primjetite da se linije ne vežu ni na jednu točku (tj. Hamiltonijan međudjelovanja), već se direktno povezuju početno i konačno stanje.

- **Za izračunavanje S-matričnog elementa** kao što je (718) potrebno je pokontrahirati sva vanjska stanja (vs) i sve operatore polja ϕ_I tako da ne ostane niti jedan operator stvaranja ili poništenja (kontraksije: ili vs-vs ili vs- ϕ ili ϕ - ϕ). Konkretno, za S-matrični element (718) Wickov TM daje N produkta

$$N(\phi\phi\phi\phi); \quad N(\overline{\phi\phi\phi\phi}); \quad N(\overline{\phi\phi\phi\phi}). \tag{722}$$

Operatori polja koji nisu pokontrahirani međusobno moraju se pokontrahirati s vanjskim stanjima. Stanja koja preostanu moraju se pokontrahirati međusobno.

Ukupna amplituda

- Ukupna amplituda napisana preko N produkata iz jedn. (722) ima tri dijela,

$$-i \frac{\lambda}{4!} \times 3 \times \int d^4x \quad {}_0\langle\vec{p}_1\vec{p}_2|N(\overline{\phi\phi\phi\phi})|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0$$

$$= \text{diagram of two circles} \times \left(\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \mathcal{A} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \mathcal{B} \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathcal{A} \quad \mathcal{B} \end{array} \right) \quad (723)$$

$$-i \frac{\lambda}{4!} \times 12 \times \int d^4x \, {}_0 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N(\overline{\phi\phi\phi\phi}) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0$$

$$= \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{circle} \\ | \\ \mathcal{A} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \mathcal{B} \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \mathcal{A} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \text{circle} \\ | \\ \mathcal{B} \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{circle} \quad \mathcal{A} \quad \mathcal{B} \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathcal{A} \quad \text{circle} \quad \mathcal{B} \end{array} \quad (724)$$

$$-i \frac{\lambda}{4!} \times 4! \times \int d^4x \, {}_0 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | N(\phi\phi\phi\phi) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0$$

$$= \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathcal{A} \quad \mathcal{B} \end{array}$$

$$= -i\lambda(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) . \quad (725)$$

- Doprinos koji odgovara jedn. (723) odnosno trećem N -produktu u jedn. (722) je još jedan trivijalan doprinos S -matrici, zato jer ne doprinosi raspršenju – međudjelovanje je ”potrošeno” na vakuumski dijagram.

- Dijagram koji odgovara jedn. (724) odnosno drugom N -produktu u jedn. (722) je također trivijalan doprinos S -matrici. On mijenja česticu koja se giba, ali ne doprinosi raspršenju. Gornja dva primjera ukazuju na to da samo **potpuno povezani** dijagrami doprinose raspršenju, odnosno T -matrici.

- Dijagram koji odgovara jedn. (725) odnosno prvom N -produktu u jedn. (722) odgovara raspršenju. Primjetite da su sve vanjske noge povezane na Hamiltonijan međudjelovanja. To znači da su svi operatori vanjskih čestica ”potrošeni” na kontrakcije sa Hamiltonijanom (Hamiltonijanima) međudjelovanja – nema slobodnih čestica. Uočite da je struktura amplitude proporcionalna jednoj i samo jednoj δ funkciji koja sadrži sve ulazne i izlazne 4-impulse. To je također svojstvo povezane amplitude. Faktor proporcionalnosti uz ” $i \times \delta$ ” funkcija je invarijantni matricni element \mathcal{M} . Ovdje je on jednak $\mathcal{M} = -\lambda$

- Račun prvog udarnog presjeka

- Primjenom formule za diferencijalni udarni presjek (708) kada sve ulazne i izlazne čestice imaju istu masu nalazimo,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{CM}^2} . \quad (726)$$

Ta formula bi se mogla rabiti za mjerenje konstante λ .

- Struktura T -matričnog elementa

- Napišimo dijelove T matričnog elementa u višem redu računa smetnje zanemarujući za sada preskripciju "povezanih i amputiranih dijagrama, ali odbacujući doprinose u kojima vanjske linije nisu uopće povezane (tj. nema raspršenja),

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | iT | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle &\stackrel{?}{=} \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \dots \\
 &+ \left(\text{diagram 5} \text{ } \text{diagram 6} \right) + \dots + \left(\text{diagram 7} \text{ } \text{diagram 8} \text{ } \text{diagram 9} \right) \\
 &+ \text{diagram 10} \cdot
 \end{aligned} \tag{727}$$

- U prvom redu su doprinosi koji opisuju raspršenje. Prvi dijagram predstavlja doprinos matrici T u najnižem (prvom) redu računa smetnje, a sljedeća tri predstavlja doprinos u drugom redu računa smetnje – u njima se javljaju virtualne čestice (petlje).

- U drugom redu su doprinosi koji također opisuju raspršenje, ali svaka amplituda pored dijagrama koji se javljaju u prvom redu ima kao dodatni faktor vakuumske dijagrame (tj. amplitude). Ti vakuumski dijagrami predstavljaju razvoj stanja (kao što smo imali kod korelacijskih funkcija više polja – vakuumski dijagrami opisivali razvoj vakuuma) i daju pomak u energije vakuuma u međudjelovanju, $|\Omega\rangle$, spram energije vakuuma bez međudjelovanja, $|0\rangle$.

- Odbacivanje tadpole dijagrama; njihova uloga

- Treći red sadrži doprinose koji sadrže "punoglavac" doprinose. Sada ćemo pokazati da je njih besmisleno dodavati S odnosno iT matričnom elementu zato jer nužno divergiraju. Naime za dijagram u trećem redu imamo

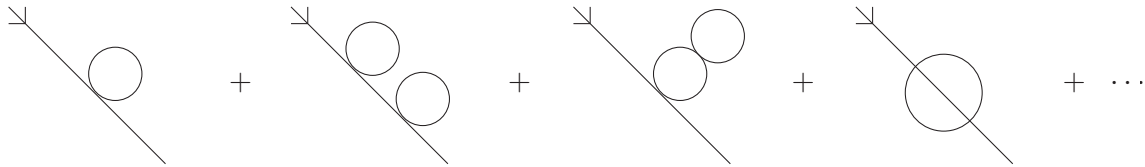
$$\begin{aligned}
 \text{diagram} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{i}{p'^2 - m^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \\
 &\times (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p' - p_1 - p_2) \\
 &\times (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_B - p') .
 \end{aligned} \tag{728}$$

Kako je vanjska noga na ljusci mase ($p_B^2 - m^2 = 0$), a integracija po $d^4 p'$ izjednačuje p_B i p' , propagator između vrha međudjelovanja i "punoglavca" nužno divergira,

$$\frac{1}{p'^2 - m^2} \Big|_{p'=p_B} = \frac{1}{p_B^2 - m^2} = \frac{1}{0}, \tag{729}$$

pa cjelokupna amplituda divergira. Zbog toga je taj i sve takve dijagrame besmisleno dodavati iT matrici.

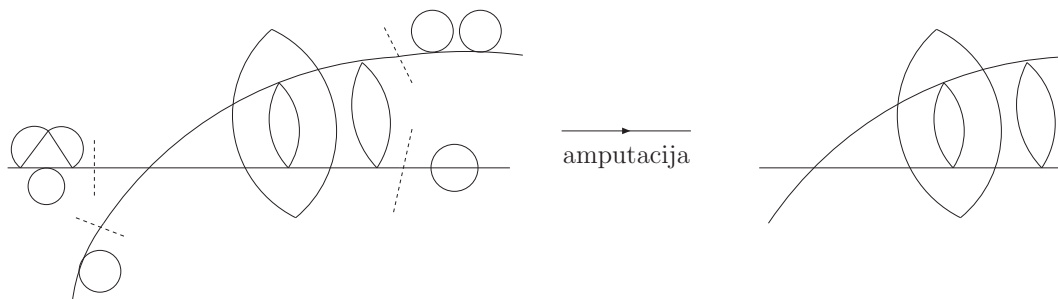
- Zapravo pored tog dijagrama postoji beskonačan skup "punoglavac" dijagrama na toj istoj nozi (vanjskoj liniji)



Oni daju dodatani doprinos razvoju slobodnog stanja $|\vec{p}\rangle_0$ u stanje u međudjelovanju $|\vec{p}\rangle$. Njih moramo isključiti u računu S matričnog elementa raspršenja. To vodi na pojam amputacije vanjskih linija, odnosno na pojam amputiranog Feynmanovog dijagrama (amplitude).

- Definicija amputacije

Za opći dijagram sa vanjskim linijama amputacija se definira na sljedeći način. Polazeći od vrha vanjske linije nalazimo zadnju točku gdje možemo presjeći liniju tako da ta operacija odvađa tu nogu od ostatka dijagrama. Tamo siječemo liniju. Evo primjera:



Procedura sječenja vanjske linije zove se amputacija vanjske linije. Amputiranjem svih vanjskih linija dobija se tzv. amputirani Feynmanov dijagram. Njemu odgovara tzv. amputirana amplituda.

- Preskripcija za račun S -matričnog elementa za raspršenje

Sada možemo formulu za S -matrični element (715) napisati s razumjevanjem


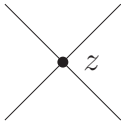

$$\begin{aligned} {}_{out}\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle_{in} &= \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | e^{-iH(2T)} | \vec{k}_A \vec{k}_B \rangle \\ &= i\mathcal{M} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left({}_0 \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots | T \left(\exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right) | \vec{p}_A \vec{p}_B \rangle_0 \right)_{\substack{\text{povezani} \\ \text{amputirani}}} \\
&= \left(\begin{array}{l} \text{suma svih potpuno povezanih, amputiranih Feynmanovih} \\ \text{dijagrama sa ulaznim impulsima } p_A, p_A \text{ i izlaznim } \sum p_f \end{array} \right). \quad (730)
\end{aligned}$$

Primjetite da "povezani" dijagrami znače "potpuno povezani dijagrami", a amputirani dijagrami znači dijagrami bez "punoglavac" doprinosa (mogu se razdvojiti od ostatka sječenjem jedne linije).

- Feynmanova pravila ϕ^4 teorije u x -prostoru

Napišimo još jednom Feynmanova pravila ϕ^4 teorije u x prostoru:

1. Za svaki propagator,  = $D_F(x - y)$
2. Za svaki vrh,  = $(-i\lambda) \int d^4z$
3. Za svaku vanjsku točku,  = e^{-ipx}
4. Podjeliti s faktorom simetrije

Sada je jasnije definirana vanjska linija. Vanjska linija zapravo nije ništa drugo nego amplituda nalaženja čestice u vrhu s kojim je linija povezana, tj. valna funkcija čestice. Za ulazne čestice on je jednak fazi $e^{-ip \cdot x}$ a za izlazne fazi $e^{ip \cdot x}$ gdje je p impuls ulazne (izlazne) čestice, a x koordinata vrha.

- Feynmanova pravila ϕ^4 teorije u p -prostoru

Kao i kod korelacijskih funkcija, jednostavnije je računati sa Feynmanovim pravilima u impulsnom prostoru. Integracijom po svim koordinatama u x prostoru i eliminacijom ukupne δ -funkcije, koja predstavlja sačuvanje ukupnog 4-impulsa dobija se invarijantna matricu $i\mathcal{M}$,

$$i\mathcal{M} = \text{suma svih povezanih, amputiranih dijagrama} . \quad (731)$$

gdje se dijagrami izračunavaju prema sljedećim Feynmanovim pravilima

1. Za svaki propagator

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ p \end{array} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

2. Za svaki vrh

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \\ \nwarrow \quad \nearrow \end{array} = -i\lambda$$

3. Za svaku vanjsku točku

$$x \bullet \begin{array}{c} \longleftarrow \\ p \end{array} = 1$$

4. Zakon sačuvanja za svaki vrh

$$(2\pi)^4 \delta(\sum p_f - \sum p_i)$$

5. Integracija po svakom
neodređenom impulsu

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

6. Djeljenje s faktorom simetrije

U biti formula (730) nije u potpunosti korektna. Svaka vanjska linija mora se jos korigirati faktorima renormalizacije vanjskih polja. O tome će biti više rečeno poslije.

3.7 Feynmanova pravila za fermione

- Do sada smo, zbog najjednostavnije strukture raspravljali samo ϕ^4 teoriju. Sada ćemo generalizirati te rezultate na fermione.

Vremensko uređenje gustoća Hamiltonijana

- Što se tiče vremenskog uređenja Hamiltonijana nema problema. Gustoća Hamiltonijana mora biti skalar, pa stoga mora sadržavati fermionska polja u parovima. Zbog toga nema problema sa vremenskim uređenjem koje se javlja u definiciji S -matričnih elemenata (730) jer se parovi spinornih polja na T transformaciju ponašaju kao bozoni.

Wickov teorem i generalizacija T -produkta i N -produkta

- T -produkt i N produkt su drugačiji za fermione.

T produkt

- T produkt tj. vremensko uređenje dva fermionska smo definirali, (vidi Eq. (??)),

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y))|0\rangle &= \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle \\ &- \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle, \end{aligned} \quad (732)$$

Tu definiciju diktira antikomutacijsko svojstvo operatora stvaranja i poništenja. S tom definicijom T -produkta se za Feynmanov propagator dobija

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\eta} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (733)$$

$$= \langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(y))|0\rangle . \quad (734)$$

- Poopćenje na bilo koji broj fermiona: T -produkt većeg broja fermiona mijenja predznak kada po zamijeni bilo koja dva fermiona:

$$T(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4) = (-1)^3\psi_3\psi_1\psi_4\psi_2 \quad \text{ako} \quad x_3^0 > x_1^0 > x_4^0 > x_2^0 \quad (735)$$

$$T(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4) = -T(\psi_2\psi_1\psi_3\psi_4) . \quad (736)$$

Prva jednadžba odgovara zamjenama fermiona koje su potrebne da se stavi 4 polja u vremensko uređenje. Druga opisuje relativan predznak dva T produkta ako se zamjene dva polja.

DZ Provjeri na primjeru (736) pretpostavljajući da vrijedi relacija tipa (735).

N produkt

- N produkt za spinorna polja se također definira tako da zamjena svaka dva fermiona donosi minus predznak. Preciznije i ta je definicija posljedica antikomutacijskih svojatava

fermionskih operatora i poništenja,

$$N(a_{\bar{p}}a_{\bar{q}}a_{\bar{r}}^{\dagger}) = (-1)^2 a_{\bar{r}}^{\dagger}a_{\bar{p}}a_{\bar{q}} = (-1)^3 a_{\bar{r}}^{\dagger}a_{\bar{q}}a_{\bar{p}}, \quad (737)$$

$$N(\psi_1\psi_2) = \psi_1^{\dagger}\psi_2^{\dagger} + \psi_1^{\dagger}\psi_2 - \psi_2^{\dagger}\psi_1^{\dagger} + \psi_1^{\dagger}\psi_2^{\dagger}, \quad (738)$$

$$N(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4) = -N(\psi_2\psi_1\psi_3\psi_4). \quad (739)$$

DZ. Provjerite (739).

Wickov TM

Rabeći gornje definicije za T i N produkt lako je generalizirati Wickov TM. Kontrakciju dva polja definiramo u analogiji s bozonskim poljima (vidi (603))

$$T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} = N\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} + \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)}, \quad (740)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} &= \theta(x^0 - y^0)\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} - \theta(y^0 - x^0)\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\} = S_F(x - y), \\ \overline{\psi(x)\psi(y)} &= 0 \quad \overline{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)} = 0. \end{aligned} \quad (741)$$

DZ. Dokažite relacije (740) i (741).

Također se kontrakcije pod normalnim uređenjem definiraju tako da svaka zamjena fermiona nosi minus predznak,

$$N(\overline{\psi_1\psi_2\psi_3\bar{\psi}_4}) = -\overline{\psi_1\bar{\psi}_3}N(\psi_2\bar{\psi}_4). \quad (742)$$

Sa gornjim konvencijama za T i N produkt Wickov teorem ima isti oblik kao za skalarno polje (bozone),

$$T[\psi_1\bar{\psi}_2\psi_3\dots] = N[\psi_1\bar{\psi}_2\psi_3\dots + \text{sve moguće kontrakcije}]. \quad (743)$$

Dokaz je isti kao za bozonski slučaj, budući da o negativnim predznacima brinu gornje definicije T i N produkta.

3.7.1 Yukawina teorija

□ Hamiltonijan:

$$H = H_{\text{Dirac}} + H_{\text{Klein-Gordon}} + \int d^3x g \bar{\psi}\psi\phi. \quad (744)$$

Yukawina teorija je jednostavnija verzija QED. Nju ćemo ovdje analizirati i za nju ćemo naći Feynmanova pravila da bismo mogli pogoditi Feynmanova pravila za QED koja je

teže naći zbog baždarne invarijantnosti QED.

□ Feynmanova pravila

- Feynmanova pravila za Yukawinu teoriju ćemo naći analizom reakcije (f označava fermion)

$$f(p) + f(k) \rightarrow f(p') + f(k') . \quad (745)$$

- Dominantni doprinos jest drugog reda u H_I ,

$$\begin{aligned} S_{fi} &= {}_{out}\langle \vec{p}' \vec{k}' | \vec{p} \vec{k} \rangle_{in} \\ &= {}_0\langle \vec{p}' \vec{k}' | T \exp(-ig \int d^4x \bar{\psi}_I \psi_I \phi_I) | \vec{p} \vec{k} \rangle_0 \Big|_{\substack{\text{povezani} \\ \text{amputirani}}} \\ &= {}_0\langle \vec{p}' \vec{k}' | T \left(\frac{1}{2!} (-ig) \int d^4x \bar{\psi}_I \psi_I \phi_I (-ig) \int d^4y \bar{\psi}_I \psi_I \phi_I \right) | \vec{p} \vec{k} \rangle_0 \Big|_{\substack{\text{povezani} \\ \text{amputirani}}} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (746)$$

- Treba upotrijebiti Wickov TM da se reducira T produkt na N produkt i kontrakcije, a sa nepokontrahiranim poljima djelovati na početna i konačna stanja rabeći "kontrakciju"

$$\begin{aligned} \overline{\psi_I(x) | \vec{p}, s \rangle} &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}'}}} \sum_{s'} a_{\vec{p}'}^{s'} u^{s'}(p') e^{-ip' \cdot x} \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle \\ &= e^{-ip \cdot x} u^s(p) |0\rangle . \end{aligned} \quad (747)$$

Analogno,

$$\begin{aligned} \overline{\langle \vec{p}, s | \psi_I(x) \rangle} &= e^{ip \cdot x} \bar{u}^s(p) \langle 0| , \\ \overline{\psi_I(x) | \vec{p}, s \rangle_a} &= e^{-ip \cdot x} \bar{v}^s(p) |0\rangle , \\ {}_a\langle \vec{p}, s | \psi_I(x) \rangle &= e^{ip \cdot x} v^s(p) \langle 0| . \end{aligned} \quad (748)$$

Sa "a" smo označili antičestična stanja, npr. $|\vec{p}, s\rangle_a = b_{\vec{p},s}^\dagger |0\rangle$.

Wickov TM eliminira polja u zadnjem retku jedn. (746) koja se ne mogu poništiti/kontrahirati sa vanjskim stanjima,

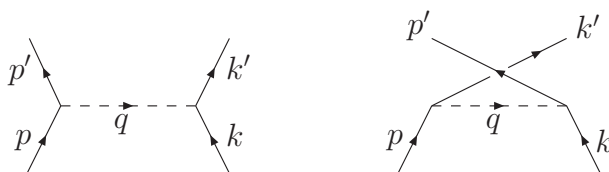
$$S_{fi} = {}_0\langle \vec{p}' \vec{k}' | T \left(\frac{1}{2!} (-ig) \int d^4x \bar{\psi}_I \psi_I \phi_I (-ig) \int d^4y \bar{\psi}_I \psi_I \phi_I \right) | \vec{p} \vec{k} \rangle_0 + \dots \quad (749)$$

Vanjska stanja se mogu kontrahirati na $4 = 2 \times 2$ načina sa fermionskim poljima, gdje dvojke stoje za moguće kontrakcije ψ polja sa početnim stanjima i $\bar{\psi}$ polja sa konačnim stanjima. Kako su integracije po x i y nijeme javljaju se dva para jednakih izraza u konačnoj amplitudi, tako da je dovoljno gledati samo dvije topološki različite kontrakcije

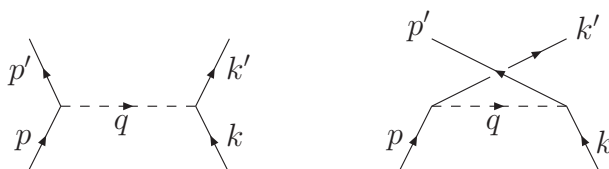
vanjskih stanja sa fermionskim poljima, i pomnožiti rezultat sa 2 (definicija dvofermionskog "bra" stanja je $\langle \vec{p}\vec{k}' | = \langle 0 | a_{\vec{k}'} a_{\vec{p}}$: uoči da to daje dodatni predznak članovima u izračunavanju doljnje amplitude),

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= (-ig)^2 \langle \vec{p}\vec{k}' | \int d^4x \bar{\psi}_I \psi_I \phi_I \int d^4y \bar{\psi}_I \psi_I \phi_I | \vec{p}\vec{k} \rangle_0 \\
&+ (-ig)^2 \langle \vec{p}\vec{k}' | \int d^4x \bar{\psi}_I \psi_I \phi_I \int d^4y \bar{\psi}_I \psi_I \phi_I | \vec{p}\vec{k} \rangle_0 \\
&= -(-ig)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_\phi^2} (2\pi)^4 \delta(p' - p - q) \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta(k' - k + q) \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k) \\
&\quad + (-ig)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_\phi^2} (2\pi)^4 \delta(k' - p - q) \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta(p' - k + q) \bar{u}(k') u(p) \bar{u}(p') u(k) \\
&= \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \\
&\quad \times \left(\frac{ig^2}{(p' - p)^2 - m_\phi^2} \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k) \right. \\
&\quad \left. - \frac{ig^2}{(k' - p)^2 - m_\phi^2} \bar{u}(k') u(p) \bar{u}(p') u(k) \right) \tag{750}
\end{aligned}$$

Dva doprinosa amplitudi mogu se prikazati Feynamovim dijagramima



Dva doprinosa amplitudi mogu se prikazati Feynamovim dijagramima



DZ. Nađite kvadrate amplituda i diferencijalni udarni presjek za proces (750).

Pojedinim dijelovima dvaju amplituda mogu se pridružiti sljedeća Feynmanova pravila,

1. Propagatori:

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = \text{---} \xrightarrow{q} \text{---} = \frac{i}{q^2 - m_\phi^2 + i\varepsilon}, \quad (751)$$

$$\overline{\psi(x)\psi(y)} = \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (752)$$

2. Vrhovi:

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \text{---} = -ig. \quad (753)$$

3. Kontrakcije vanjskih nogu/linija (valne funkcije vanjskih čestica):

$$\overline{\phi|\vec{q}} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \text{---} \xrightarrow{q} \text{---} = 1, \quad \langle \vec{q}|\phi = \text{---} \xrightarrow{q} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = 1, \quad (754)$$

$$\overline{\psi|\vec{p}, s} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} = u^s(p), \quad \langle \vec{p}, s|\psi = \text{---} \xrightarrow{p} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = \bar{u}^s(p), \quad (755)$$

$$\overline{\psi|\vec{k}, s}_a = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} = \bar{v}^s(k), \quad \langle \vec{k}, s|\psi = \text{---} \xrightarrow{k} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = v^s(k). \quad (756)$$

4. Sačuvanje impulsa u svakom vrhu.
5. Integracija po svakom neodređenom 4-impulsu.
6. Određivanje predznaka dijagrama.

Primjedbe uz Feynmanova pravila

1. U amplitudi nema faktora $1/n!$ zato jer se identične amplitude **uvijek** javljaju $n!$ puta. To je posljedica toga što u H_I za Yukawinu teoriju nema identičnih polja. (Napomena: izuzetak je zatvorena petlja s n vrhova: tada se javlja faktor $1/n$.)

2. I kod fermionskih i kod bozonskih linije **impuls ulazi u vrh za ulazne čestice** (faza $e^{-ip \cdot x}$ uz $a_{\vec{p}}$ i $b_{\vec{p}}$), a **izlazi iz vrha za izlazne čestice** (faza $e^{ip \cdot x}$ uz $a_{\vec{p}}^\dagger$ i $b_{\vec{p}}^\dagger$). Međutim, **smjer strelice na liniji podudara sa smjerom toka fermionskog broja (npr. leptonskog broja, kod leptona (ili negativnog naboja))**. On se za čestice podudara sa smjerom impulsa čestice, dok je za antičestice suprotan smjeru impulsa antičestice. Ilustrirajmo to na primjeru raspršenja dva fermiona u dva bozona.

Amplituda raspršenja dva fermiona u dva bozona također ima dva doprinosa, opisana

Feynmanovim dijagramima

$$(757)$$

Koncentrirajmo se na amplitudu koja odgovara prvom od tih dijagrama

$$\begin{aligned}
 & \langle \vec{k}, \vec{k}' | \int d^4 y \phi \bar{\psi} \psi \int d^4 x \phi \psi \psi | \vec{p}, \vec{p}' \rangle \\
 & \sim \int d^4 y \int d^4 x \bar{v}(p') e^{-ip' \cdot y} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2} e^{-iq \cdot (y-x)} u(p) e^{-ip \cdot x} e^{ikx} e^{ik'y} . \quad (758)
 \end{aligned}$$

Impuls q teče od x ($e^{iq \cdot x}$) prema y ($e^{-iq \cdot y}$), i podudara se sa smjerom fermionskog toka u propagatoru. Impuls p' teče smjerom koji je suprotan smjeru fermionskog toka, tj. suprotno strelici na dijagramu (nije naznačen smjer toka impulsa već smjer toka fermionskog broja).

3. Kontrakcija fermionskih indeksa ide duž fermionske linije ako se gleda od početnog stanja ka konačnom ili suprotno smjeru ako se gleda od konačnog stanja prema početnom. Npr.

$$\sim \bar{u}(p_3) \cdot \frac{i(\not{p}_2 + m)}{p_2^2 - m^2} \cdot \frac{i(\not{p}_1 + m)}{p_1^2 - m^2} \cdot u(p_0) . \quad (759)$$

4. Fermionski predznaci:

-Sve veličine koje se javljaju u matricnim elementima mogu se izraziti preko operatora stvaranja i poništenja, vakuumske stanja i valnih funkcija.

- Definicija stanja (i za fermione i za bozone) je standardna,

$$|\vec{p}, \vec{k}\rangle \sim a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle, \quad \langle \vec{p}', \vec{k}' | \sim \langle 0 | a_{\vec{k}'} a_{\vec{p}'} . \quad (760)$$

Stoga je ugrubo $(|\vec{p}, \vec{k}\rangle)^\dagger = \langle \vec{p}, \vec{k} |$. Primjetite da najljeviji operator stvaranja generira u stanju česticu koja je lijevo od/ispred svih ostalih.

- Prikaz polja preko operatora stvaranja i poništenja je dan jednadžbama (155) (odnosno (1504)) i (441).

- Zbog fermionske statistike, zamjenom bilo koja dva fermionska operatora dobija se nova veličina koja se razlikuje za predznak od polazne. Zbog toga je npr. za dvo-fermionska

stanja i za bilo koja dva polja do na moguće kontrakcije (njih nema za normalno uređena polja)

$$\begin{aligned} |\vec{p}, \vec{k}\rangle &= -|\vec{k}, \vec{p}\rangle, \\ \psi_1(x)\psi_2(y) &= -\psi_2(y)\psi_1(x). \end{aligned} \quad (761)$$

- To je razlog zašto se npr. u amplitudi za fermion-fermion raspršenje u Yukawinoj teoriji (750) javlja relativni (-1) predznak između dva doprinosa koji se jedan od drugog mogu dobiti zamjenom dvaju fermionskih linija. Ta zamjena fermionskih linija odgovara zamjeni bilo dva fermionska stanja u početnom ili konačnom stanju, ili bilo koja dva fermionska polja u izrazu za S matricni element.

- Relativni predznak u amplitudi se javlja samo ako je **nužno** zamjeniti dva **fermionska** stanja ili dva fermionska polja da bi se provela kontrakcija fermionskih operatora. Za sve druge slučajeve nema relativnog predznaka. U amplitudi za fermion-antifermion raspršenje u dva bozona dvije se amplitude razlikuju do na zamjenu dvaju bozonskih linija. Drugim riječima zamjenom dvaju (skupina) bozonskih operatora stvaranja/poništenja se kontrakcija operatora stvaranja i poništenja u jednoj amplitudi svodi na drugu. Stoga nema relativnog (-1) predznaka u ukupnoj amplitudi (757).

DZ. Nadite kvadrate amplituda i diferencijelni udarni presjek za proces (757).

- Primjetite nadalje da **zamjena dva fermionska polja** ne daje nikakav relativni predznak. Npr.,

$$\begin{aligned} \dots (\bar{\psi}\psi)_x (\bar{\psi}\psi)_y (\bar{\psi}\psi)_z (\bar{\psi}\psi)_w \dots &= (+1) \dots (\bar{\psi}\psi)_x (\bar{\psi}\psi)_z (\bar{\psi}\psi)_y (\bar{\psi}\psi)_w \dots \\ &= \dots S_F(x-z) S_F(z-y) S_F(y-w) \dots \end{aligned} \quad (762)$$

- Poseban slučaj se javlja ako se u amplitudi javlja zatvorena fermionska petlja, struktura u kojoj su fermionski indeksi ciklički povezani (javlja se trag po tim indeksima), npr.

$$\begin{aligned} \text{---} \circ \text{---} &= \overbrace{\bar{\psi}\psi \bar{\psi}\psi \bar{\psi}\psi \bar{\psi}\psi} \\ &= (-1) \overbrace{\psi \bar{\psi}\psi \bar{\psi}\psi \psi \bar{\psi}} \\ &= (-1) \text{tr}[S_F S_F S_F S_F]. \end{aligned} \quad (763)$$

Kako se Diracova polja u \mathcal{H}_I javljaju uvijek u $\bar{\psi}\psi$ parovima nužno je da cijeli izraz dobije predznak (-1) zbog zamjene fermionskih polja, jer je ukupan broj tih zamjena uvijek neparan.

3.8 Feynmanova pravila za kvantnu elektrodinamiku (QED)

- Feynmanova pravila za QED je teže naći zbog baždarnosti invarijantnosti te teorije (Maxwellovih jednadžbi). Baždarna invarijantnost onemogućava direktno nalaženje fotonskog propagatora iz jednadžbi gibanja za slobodno fotonsko polje, odnosno Lagrangijana za fotonsko polje. Nasuprot tome propagator skalarnog odnosno Diracovog polja se može naći direktno iz pripadnih jednadžbi gibanja za slobodno polje odnosno pripadnih Lagrangijana. Primjetite da je osnovni problem QED definicija propagatora, koji je u biti svojstvo slobodne teorije (slobodnih Maxwellovih jednadžbi).

Ilustracija problema

Klein-Gordonova, Diracova i Maxwellove jednadžbe (nisu uključene dvije Maxwellove jednadžbe u kojima se ne javljaju izvori; izvori su za slobodnu teoriju jednaki nuli) glase (vidi (151), (321) i (248)),

$$0 = (\square + m^2)\phi(x), \quad (764)$$

$$0 = (i\rlap{/}\partial - m)\psi(x), \quad (765)$$

$$0 = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = (g^{\nu\mu}\square - \partial^\nu\partial^\mu)A_\mu. \quad (766)$$

Pripadne jednadžbe za propagatore (Greenove funkcije) su

$$(\square_x + m^2)D_F(x-y) = -\delta^{(4)}(x-y), \quad (767)$$

$$(i\rlap{/}\partial_x - m)S_F(x-y) = \mathbf{1}\delta^{(4)}(x-y), \quad (768)$$

$$(g^{\nu\mu}\square_x - \partial_x^\nu\partial_x^\mu)D_{\mu\rho;F}(x-y) = g^\nu_\rho\delta^{(4)}(x-y). \quad (769)$$

Indeks F samo označava da smo u Greenove funkcije ugradili kauzalni rubni uvjet. Jednadžbe vrijede i za Greenove funkcije sa drugim rubnim uvjetima. Predznaci uz δ -funkcije su odabrani tako da fizikalni stupnjevi slobode imaju propagatore $+1/(p^2 - m^2)$, do na spinorne/tenzorske strukture. Fourierov transformat tih jednadžbi daje jednadžbe za Fourierove komponente Greenovih funkcija

$$(p^2 - m^2)D_F(p) = 1, \quad (770)$$

$$(\rlap{/}p - m)S_F(p) = 1, \quad (771)$$

$$(g^{\nu\mu}p^2 - p^\nu p^\mu)D_{\mu\rho;F}(p) = -g^\nu_\rho. \quad (772)$$

Dok jednadžbe (770) i (771) imaju jednostavna rješenja

$$D_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (773)$$

$$S_F(p) = \frac{1}{\rlap{/}p - m + i\varepsilon} = \frac{\rlap{/}p + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (774)$$

jednadžba (772) nema rješenja. To je lako provjeriti pretpostavljajući najopćenitiji Lorentz kovarijantni oblik za $D_{\mu\rho;F}(p)$ koji se može izgraditi od $g_{\mu\nu}$ i impulsa p_μ ,

$$D_{\mu\rho;F}(p) = a(p^2)g_{\mu\rho} + b(p^2)p_\mu p_\rho, \quad (775)$$

uvrštavajući ga u (772) i pokušavajući naći rješenja za $a(p^2)$ i $b(p^2)$. Takvih rješenja nema.

DZ. Pokažite da ne postoje rješenja za Lorentz invarijantne funkcije $a(p^2)$ i $b(p^2)$ kada se (775) uvrsti u (772).

Ne postojanje tih rješenja je posljedica baždarnosti invarijantnosti Maxwellovih jednadžbi (766). Problem se rješava tako da se postavi uvjet na fotonsko polje, tzv. baždarni uvjet, npr. Lorentzov ili Coulombov uvjet,

$$0 = \partial_\mu A^\mu(x), \quad (776)$$

$$0 = \nabla \vec{A}(x), \quad (777)$$

koji modificira jednadžbe (766) i time se omogućava rješavanje jednadžbe (772). Naravno, time rješenje za propagator postaje ovisno o pretpostavljenom baždarnom uvjetu.

- Feynmanova pravila za QED ćemo naći na nekoliko načina:

1. Peskinov "izvod" po analogiji sa Feynmanovim pravilima za Yukawinu teoriju.
2. Bjorken Drellov izvod za fotonski propagator u Coulombovom baždarenju.
3. Mandl-Shaw i Itzykson-Zuber izvod za fotonski propagator u Lorentzovom baždarenju uporabom Gupta-Bleulerovog mehanizma.
4. Peskinov izvod fotonskog propagatora preko integrala po putevima u općem kovarijantnom baždarenju.

3.8.1 Peskinov "izvod" po analogiji sa Feynmanovim pravilima za Yukawinu teoriju

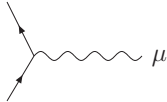
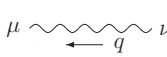
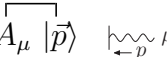
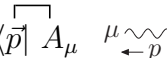
- U Yukawinoj vežu se dva fermionska polja i skalar. U QED je na mjestu skalara bezmasena vektorska čestica, foton, koja se zbog Lorentz invarijantnosti gustoće Hamiltonijana mora vezati na vektorsku struju, dakle

$$\mathcal{H}_I = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu, \quad (778)$$

$$H_I = \int d^3x e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu. \quad (779)$$

- Nadalje, foton je bezmaseni vektorski bozon, pa ako postoji raspis tog polja preko operatora stvaranja i poništenja, koeficijentna funkcija uz njega, tzv. **polarizacijski vektor**, mora nositi Lorentzov indeks. Nadalje, propagator, koji je kontrakcija ta dva polja mora

nositi dva Lorenzova indeksa. Uzimajući sve to u obzir Peskin "pogoda" Feynmanova pravila za QED,

Vrh(ovi):		= $-ie\gamma^\mu$
Fotonski propagator:		= $\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon}$
Vanjska fotonska linija:		= $\epsilon_\mu(p)$
		= $\epsilon_\mu^*(p)$

U gornjoj tablici je $\epsilon_\mu(p)$ polarizacijski vektor fotona.

- Sada Peskin "opravdava" gore navedena Feynmanova pravila. On pretpostavlja da je zadovoljen Lorentzov baždarni uvjet (776), $\partial \cdot A = 0$, čime se Maxwellove jednadžbe svode na četiri bezmasene KG jednadžbe,

$$\partial^2 A_\mu = 0. \quad (780)$$

Rješenja te jednadžbe u impulsnom prostoru su oblika

$$\epsilon_\mu(p)e^{-ip \cdot x}, \quad (781)$$

gdje je $p^2 = 0$, a $\epsilon_\mu(p)$ je polarizacijski vektor sa četiri komponente. Iako ima 4 Lorentzove komponente, $\epsilon_\mu(p)$ nije četverovektor – pri Lorentzovim transformacijama polja A_μ (vidi Weinberg I poglavlje 5.9) ima transformaciju

$$\epsilon_\mu(p) \rightarrow \Lambda_\mu^\nu \epsilon_\nu(p) + ap^\mu, \quad (782)$$

koja pored Lorentzove transformacije ima i dodatni član proporcionalan impulsu fotona (a je ili Lorentz invarijantna funkcija p^2). On je posljedica promjene baždarenja pri Lorentzovim transformacijama.

Razvoj elektromagnetskog polja po rješenjima (781) glasi

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{r=0}^3 \left(a_{\vec{p}}^r \epsilon_\mu^r(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^{r\dagger} \epsilon_\mu^{r*}(p) e^{ip \cdot x} \right), \quad (783)$$

gdje $r = 0, 1, 2, 3$ predstavlja bazu polarizacijskih vektora.

Vanjske fotonske linije u tablici QED Feynmanovih pravila su direktna posljedica ovog raspisa, do na jednu finesu. Naime polarizacijski vektori imaju samo transverzalne komponente, tj. imaju oblik $(0, \vec{\varepsilon})$, gdje je $\vec{p}\vec{\varepsilon} = 0$. Ako je \vec{p} duž pozitivne z osi lijevo i desno polarizirani vektor glase $\varepsilon^\mu = (0, 1, \pm i, 0)$. Primjetite da iz oblika polarizacijskih vektora direktno slijedi da oni ne mogu biti četverovektori.

QED vrh iz tabele sa Feynmanovim pravilima za QED je takoder lako opravdati. Zapravo to smo već napravili pod "ilustracija problema" – vrh mora sadržavati 4-struju koja bi se vezala na foton, dakle strukturu u impulsnom prostoru strukturu $\bar{u}\gamma^\mu u$. Jakost vezanja $|e|$ je također definiran Hamiltonijanom. Predznak je definiran "minimalnom supstitucijom", koje je definirana tako da klasične Hamiltonove jednadžbe gibanja za točkastu česticu daju Lorentzovu silu na točkastu česticu u elektromagnetskom polju (Supek I, str 300),

$$\ddot{\vec{x}} = e\vec{E} + e\dot{\vec{x}} \times \vec{B}. \quad (784)$$

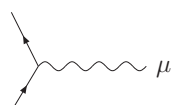
DZ. Pokažite da iz Hamiltonovih jednadžbi gibanja sa česticu u elektromagnetskom polju, uz Hamiltonijan

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m}, \quad (785)$$

slijedi Lorentzova sila i izraz za kanonski impuls

$$\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}. \quad (786)$$

Tu je $e = -|e|$ naboj elektrona. Minimalna supstitucija za česticu naboja $Q|e|$ glasi $\vec{\pi} = \vec{p} - |e|Q\vec{A}$. U teoriji polja pripadni vrh za takvu česticu je,



$$= +i|e|Q\gamma^\mu. \quad (787)$$

Na kraju spomenimo opću preskripciju za nalažanje vrhova iz gustoće Lagrangijana \mathcal{L} . **Ako nema derivacija polja** (derivativnih vezanja) kao kod QED iz $i\mathcal{L}$ se izbrišu sva polja. Ono što ostane je vrh međudjelovanja. **Ako postoje derivacije polja** onda se uzme ili preskripcija da sva polja ulaze u vrh ili da sva polja izlaze iz vrha. Polje koje ulazi u vrh odgovara fazi uz operator poništenja čestice $e^{-ip \cdot x}$, a polje koje izlazi iz njega fazi uz operator poništenja čestice $e^{ip \cdot x}$. Izvrše se derivacije uz čestične komponente polja i ti se impulsi pridjele vrhu; polja se "poskidaju" iz $i\mathcal{L}$. Ono što ostaje je vrh međudjelovanja.

DZ. Pokažite da gornja preskripcija sa "skidanjem" polja iz $i\mathcal{L}$ daje vrh dan u tablici QED Feynmanovih pravila (podsjetnik : ako nema derivativnih vezanja vrijedi $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I$).

Fotonski propagator : Samo je fotonski propagator ostao nerazjašnjen i Peskin ga

ovdje i ne objašnjava u detalje, ali daje niz primjedbi koje opravdavaju oblik fotonskog propagatora:

- Kako u Lorentzovom baždarenju EM polje zadovoljava bezmasenu KG jednadžbu, za očekivati je da fotonski propagator ima oblik bezmasenog KG propagatora.
- Objašnjenje faktora $-g_{\mu\nu}$: Lorentz invarijantnost zahtjeva da fotonski propagator bude izotropni tenzor drugog reda koji se veže na struje sa matricama γ^μ i γ^ν . Najjednostavniji kandidat za to je $g_{\mu\nu}$.
- Predznak uz $g_{\mu\nu}$ se može shvatiti iz Fourierovog raspisa propagatora,

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} e^{-iq \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\vec{q}|} (-g_{\mu\nu}) [e^{-iq \cdot (x-y)} \theta(x^0 - y^0) + e^{iq \cdot (x-y)} \theta(y^0 - x^0)] . \end{aligned} \quad (788)$$

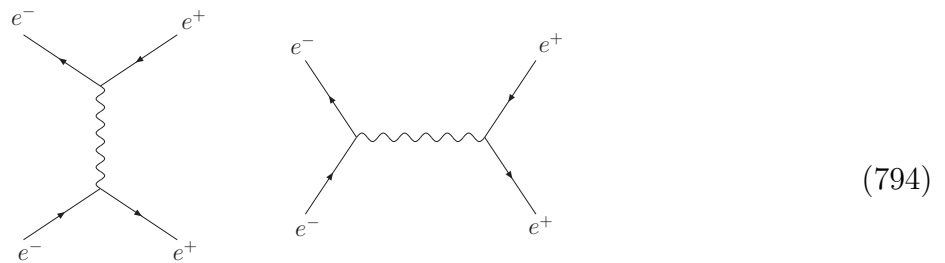
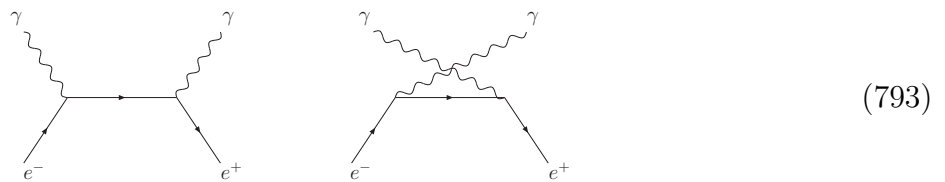
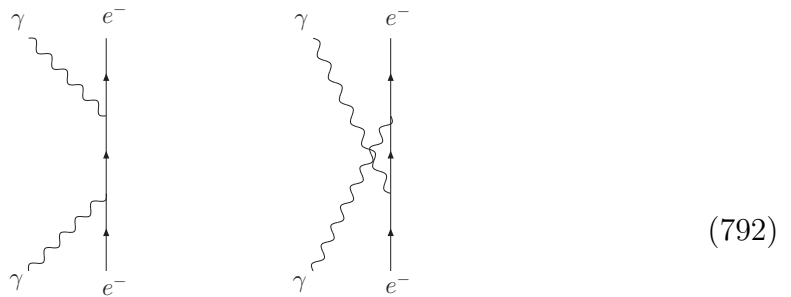
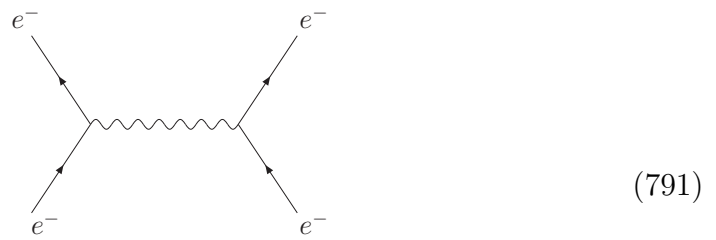
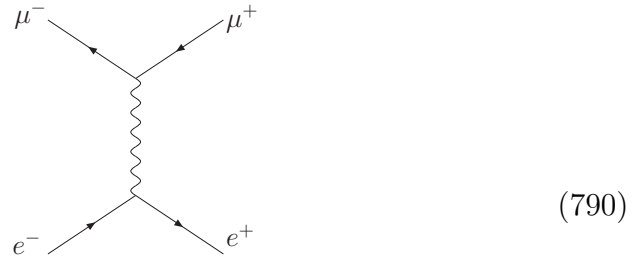
Za očekivati je da je propagator jednak vakuumskoj očekivanoj vrijednosti vremenskog uređenja dvaju fotonskih polja $\langle 0|T[A_\mu(x), A_\nu(y)]|0\rangle$. Ako se u tom izrazu stavi $\mu = \nu$ i uzme se limes $x^0 \rightarrow y^0$ on prelazi u normalizaciju za stanje $A_\mu(x)|0\rangle$ (???), koja mora biti pozitivna.

- Prema (788) za stanja nastalo iz A_i poljima normalizacija je pozitivna, ali za stanje nastalo iz A_0 polja normalizacija je negativna.
- Rješenje tog problema je da se stanja koja nastaju iz A_0 polja ne javljaju u fizikalnim procesima (to je osnova tzv. Gupta-Bleulerovog formalizma u kvantizaciji EM polja u Lorenzovom baždarenju).

Sada imamo formalizam potreban za nalaženje amplituda u QED i u x prostoru i u p prostoru. U p prostoru je dovoljno nacrtati Feynmanove dijagrame i primjeniti Feynmanova pravila za QED (fotonski propagator, fermionski propagator, foton-fermion-fermion vrh). U x prostoru je dovoljno primjeniti formulu (730) u kojoj se za Hamiltonijan međudjelovanja uzima (779). **Napomena:** Ako u teoriji ima više fermiona onda za \mathcal{H}_I , odnosno H_I sadrži za svaki fermion po jedan član,

$$\mathcal{H}_I = \sum_f |e| Q_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f A_\mu . \quad (789)$$

DZ. Rabeći Feynmanova pravila u impulsnom prostoru, nađite amplitude sa procese opisane sljedećim dijagramima



DZ. Rabeći jednadžbe (730) i (789) nađite moguće dijagrame raspršenja dvije čestice u dvije čestice i identificirajte pri tome amplitude koje odgovaraju gornjim dijagramima. Pri izračunavanju amplituda kontrakcije dva ju fotonskih polja identificirajte sa fotonskim

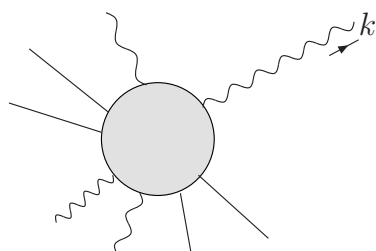
propagatorima.

$$\begin{aligned} D_{F;\mu\nu}(x-y) &= \overline{A_\mu(x)A_\nu(y)} \\ &= \langle 0|T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\}|0\rangle. \end{aligned} \quad (795)$$

FOTONSKE POLARIZACIJSKE SUME

□ Suma kvadrata fizikalnih amplituda

- Razmotrimo fizikalni proces sa slobodnim izlaznim fotonom u kojem ne mjerimo polarizaciju fotona.



$$= i\mathcal{M}(k) \equiv i\mathcal{M}^\mu \varepsilon_\mu^*. \quad (796)$$

- Amplitudu smo razdvojili na polarizaciju fotona i ostatak koji ne ovisi o polarizaciji fotona.

- Udarni presjek je proporcionalan sumi kvadrata amplituda određene polarizacije,

$$\sigma \propto \sum_{\varepsilon} |\mathcal{M}^\mu \varepsilon_\mu^*|^2 = \sum_{\varepsilon} \varepsilon_\mu^* \varepsilon_\nu \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{\nu*}, \quad (797)$$

gdje suma ide po fizikalnim stanjima fotona.

- Ako je foton u početnom stanju onda treba usrednjiti, dakle posumirati po polarizacijama fotona i podijeliti s brojem polarizacija.

- Zbog jednostavnosti računa uzet ćemo da je impuls fotona u pozitivnom smjeru z osi, tj. da 4-impuls fotona glasi

$$k^\mu = (k, 0, 0, k). \quad (798)$$

- Tada za linearne polarizacije, koje tvore fizikalna stanja po kojima sumiramo, možemo izabrati polarizacije u x i y smjeru

$$\varepsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0), \quad \varepsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0). \quad (799)$$

- Time suma kvadrata amplitude (797) postaje,

$$\left| \sum_{\varepsilon} \mathcal{M}^\mu(k) \varepsilon_\mu^* \right|^2 = |\mathcal{M}^1(k)|^2 + |\mathcal{M}^2(k)|^2. \quad (800)$$

□ Sačuvanje struje, Ward-ov identitet, relacija među nefizikalnim polarizacijama fotona, polarizacijske sume za foton

- Fotoni su generirani Hamiltonijanom međudjelovanja oblika,

$$H_I = \int d^3x e j_\mu A^\mu, \quad (801)$$

gdje je j_μ sačuvana struja (u QED ona je oblika $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$),

$$\partial^\mu j_\mu = 0. \quad (802)$$

- Sačuvanje struje je klasično: ono slijedi direktno iz antisimetričnosti jakosti elektromagnetskog polja i Maxwellovih jednadžbi s izvorom

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = e j_\nu. \quad (803)$$

- Za matrični element $\mathcal{M}(k)$ očekujemo da sadrži matrični element struje j_μ između početnog stanja i konačnog stanja bez fotona,

$$\mathcal{M}_\mu(k) = \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle f | j_\mu(x) | i \rangle, \quad (804)$$

drugim riječima da je $\mathcal{M}(k)$ Fourierov transformat matričnog elementa struje impulsa k .

- Ako sačuvanje vrijedi i u kvantnoj teoriji, tj. za operator $j_\mu(x)$ onda mora vrijediti

$$k^\mu \mathcal{M}_\mu(k) = 0. \quad (805)$$

- Ta relacija se zove **Ward-ov identitet**. Ona predstavlja sačuvanje kvantne struje u impulsnom prostoru. Formalno, ako zamijenimo polarizacijski vektor fotona sa 4-vektorom fotona k u izrazu za ukupnu amplitudu \mathcal{M} (796) dobijamo nulu.

- Za foton impulsa u z smjeru (798) Wardov identitet glasi

$$k\mathcal{M}^0 - k\mathcal{M}^3 = 0, \quad (806)$$

odakle slijedi

$$\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}^3. \quad (807)$$

- Odatle pak slijedi

$$\begin{aligned} \sum_\varepsilon \varepsilon_\mu^* \varepsilon_\nu \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{\nu*} &= |\mathcal{M}^1(k)|^2 + |\mathcal{M}^2(k)|^2 \\ &= |\mathcal{M}^1(k)|^2 + |\mathcal{M}^2(k)|^2 + |\mathcal{M}^3(k)|^2 - |\mathcal{M}^0(k)|^2 \\ &= -g_{\mu\nu} \mathcal{M}^\mu(k) \mathcal{M}^{\nu*}(k). \end{aligned} \quad (808)$$

Drugim riječima efektivno u svakom kvadratu matičnog elementa u kojem dio matičnog elementa neovisan o fotonu ($\mathcal{M}^\mu(k)$) zadovoljava Wardov identitet, možemo zamjeniti sumu po polarizacijama sa $-g_{\mu\nu}$

$$\sum \varepsilon_\mu^* \varepsilon_\nu \rightarrow -g_{\mu\nu} \quad (809)$$

- **Komentari :**

1. Zbog Wardovog identeta se nefizikalni stupnjevi slobode fotona (longitudinalna i vremenolika polarizacija) mogu zanemariti u ukupnoj amplitudi kada se računa sa $-g_{\mu\nu}$. Time se doprinosi negativne norme od vremenolike polarizacije poništavaju u ukupnom matičnom elementu i on je uvijek pozitivan.
2. U propagatorima se javljaju sume po polarizacijama u raznim kombinacijama zavisno u kojem se baždarenju radi račun. Uvijek se javljaju fizikalne (transverzalne polarizacije). Zahvaljujući Wardovom identitetu ta se suma uvijek može zamjeniti sa $-g_{\mu\nu}$, što daje efektivni fotonski propagator u impulsnom prostoru

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (810)$$

3.8.2 Mandl-Shaw-ov izvod: kvantizacija EM polja i fotonski propagator u Lorentzovom baždarenju

• Klasična polja

Antisimetrični tenzor jakosti elektromagnetskog polja

- Električno polje (\vec{E}) i magnetsko polje (\vec{B}) se miješaju međusobno pri Lorentzovim transformacijama. To pokazuje da ta dva polja čine Lorentzovu reprezentaciju dimenzije 6. Takva reprezentacija odgovara samo antisimetričnom tenzoru ranga 2.

- Uvedimo antisimetrični tenzor ranga 2, $F_{\mu\nu}$ koji sadrži električno i magnetsko polje,

$$\begin{aligned} E^i(x) &= F^{i0} , \\ B^i(x) &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk} . \end{aligned} \quad (811)$$

DZ. Napišite $F_{\mu\nu}$ kao 4×4 matricu i odredite njene komponente rabeći (811).

Maxwellove jednadžbe

- Maxwellove jednadžbe

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad \nabla \times \vec{B} - \dot{\vec{E}} = \vec{j}, \quad (812)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0, \quad (813)$$

izražene preko tenzora F glase,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (814)$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \quad (815)$$

DZ. Provjerite jednakost jednadžbi (812) i jednadžbe (814), te jednadžbi (813) i jednadžbe (815).

Sačuvanje struje

- Iz antisimetričnosti $F_{\mu\nu}$ i (814) slijedi sačuvanost struje j_μ ,

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (816)$$

DZ. Provjerite (816).

KG jednadžba za F - Iz jednadžbi (814), (815) i (816) slijedi da slobodno polje $F^{\mu\nu}$ ($j^\mu = 0$) zadovoljava bezmasenu KG jednadžbu,

$$\square F^{\mu\nu} = 0. \quad (817)$$

DZ. Provjerite (817). Nađite također KG jednadžbu za $F^{\mu\nu}$ ako je j_μ različit od nule.

F preko 4-potencijala

- Polje $F^{\mu\nu}$ se može izraziti preko 4-potencijala $A^\mu = (\phi, \vec{A})$,

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x), \quad (818)$$

odnosno, električno i magnetsko polje se može izraziti preko komponenti 4-potencijala,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \dot{\vec{A}}. \quad (819)$$

DZ. Provjerite ekvivalentnost (818) i (819)

- Uz definiciju (818) jednačba (815) je identički zadovoljena dok jednačba (814) postaje

$$\square A^\mu(x) - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu(x)) = j^\mu(x). \quad (820)$$

Lorentz i baždarna invarijantnost Maxwellovih jednačbi

- Jednačba (820) je manifestno Lorentz kovarijantna. Ona je također invarijantna na baždarne transformacije

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x). \quad (821)$$

Lagrangijan

- Jednačbe (820) se mogu izvesti iz Lagrangijana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu, \quad (822)$$

uz pretpostavku da se sve četiri komponente A^μ nezavisne na varijacije.

- Lagrangijan je manifestno Lorentz invarijantan.

- Baždarna invarijantnost akcije je osigurana sačuvanjem struje j^μ ,

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - j_\mu \partial^\mu f = \mathcal{L} - \partial^\mu(j_\mu f). \quad (823)$$

- Površinski član koji se javlja pri baždarnoj transformaciji Lagrangijana ne mijenja jednačbe gibanja.

Problem s kvantizacijom

- Lagrangijan (822) nije pogodan za kvantizaciju. Naime iz izraza za kanonske impulse pridružene poljima A_μ ,

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -F^{0\mu}, \quad (824)$$

i antisimetrije $F^{\mu\nu}$ slijedi, ako je $j_\mu = 0$, da je $\pi^0 = 0$. Prema tome nije moguće provesti kanonsku kvantizaciju, jer komutator $[\pi^0(x), A^0(y)]$ identički iščezava.

Lagrangijan uz Lorentzov uvjet

- Ako se na A_μ postavi Lorentzov uvjet (776)

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (825)$$

i odbace se u Lagrangijanu članovi koji pri parcijalnoj derivaciji dobijaju faktore proporcionalne $\partial_\mu A^\mu$, dobija se Lagrangijan (prvi ga je u kvantizaciji primjenio Fermi)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu - j_\mu A^\mu. \quad (826)$$

- Taj Lagrangijan je podesan za kvantizaciju jer su svi kanonski impulsi,

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\dot{A}^\mu, \quad (827)$$

različiti od nule.

- Lagrangijan je Lorentz invarijantan ali više nije baždarno invarijantan.

DZ. Nađi kako se Lagrangijan (827) transformira na opću baždarnu transformaciju. Pokaži da on nije invarijantan na opću baždarnu transformaciju. Pokaži da je Lagrangijan invarijantan samo na baždarne transformacije koje zadovoljavaju uvjet

$$\square f(x) = 0. \quad (828)$$

Baždarne transformacije kod kojih je Lorentzov uvjet (825) sačuvan zovu se Lorentzove baždarne transformacije.

Prije nego nastavimo s kvantizacijom proučit ćemo Fourierovu dekompoziciju fotonskog polja, te svojstva polarizacijskih vektora.

Raspis fotonskog polja po Fourierovim komponentama

- Lorentzovo baždarenje svodi slobodne Maxwellove jednačbe (jednačbe (820) uz $j^\mu = 0$) na četiri nezavisne bezmasene KG jednačbe,

$$\square A^\mu(x) = 0. \quad (829)$$

Iz tih jednačbi slijedi da se one mogu raspisati preko potpunog skupa rješenja valne jednačbe, e^{ikx} ,

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= A^{\mu+}(x) + A^{\mu-}(x) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_{r=0}^3 [\varepsilon_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) e^{-ikx} + \varepsilon_r^{*\mu}(\vec{k}) a_r^\dagger(\vec{k}) e^{ikx}]. \end{aligned} \quad (830)$$

Integracija ide po svim 3-impulsima bezmasene čestice koja je na ljusci mase,

$$k^0 = \omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|, \quad (831)$$

a suma po polarizacijama $r = 0, 1, 2, 3$.

Relacije ortonormiranosti polarizacijskih vektora

Polarizacija ima 4 jer A_μ ima indeks μ , koji ima 4 vrijednosti, pa bi za danu vrijednost 4-impulsa i valna funkcija morala imati 4 nezavisne komponente. Za bazu uzimamo polarizacijske vektore $\varepsilon_r^\mu(k)$ koji zadovoljavaju sljedeće relacije ortonormiranosti i potpunosti,

$$\varepsilon_s^*(\vec{k}) \cdot \varepsilon_r(\vec{k}) = \varepsilon_{s\mu}^*(\vec{k}) \varepsilon_r^\mu(\vec{k}) = -\zeta_r \delta_{rs}, \quad r, s = 0, 1, 2, 3 \quad (832)$$

$$\sum_r \zeta_r \varepsilon_r^{*\mu}(\vec{k}) \varepsilon_r^\nu(\vec{k}) = -g_{\mu\nu}, \quad (833)$$

gdje je

$$\zeta_0 = -1, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1. \quad (834)$$

Fizikalna interpretacija polarizacijskih vektora

- Jedna od mogućih odabira nezavisnih polarizacijskih vektora $\varepsilon_s(k)$ koji zadovoljavaju relacije (832) i (833) (odabir ovisi o referentnom Lorentzovom sustavu) je

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^\mu(\vec{k}) &= n^\mu = (1, 0, 0, 0), \\ \varepsilon_r^\mu(\vec{k}) &= (0, \vec{\varepsilon}_r(\vec{k})), \quad r = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (835)$$

gdje

$$\vec{\varepsilon}_3(\vec{k}) = \vec{k}/|\vec{k}|, \quad (836)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}_r(\vec{k}) = 0, \quad r = 1, 2, \quad (837)$$

$$\vec{\varepsilon}_s^*(\vec{k}) \vec{\varepsilon}_r(\vec{k}) = \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2, 3, \quad (838)$$

tj. $\vec{\varepsilon}_r(\vec{k})$ su ortonormirani 3-vektori, s time da je za $\vec{\varepsilon}_3(\vec{k})$ uzeto da je proporcionalan 3-impulsu fotona. $\varepsilon_1^\mu(\vec{k})$ i $\varepsilon_2^\mu(\vec{k})$ su tzv. transverzalne polarizacije, $\varepsilon_3^\mu(\vec{k})$ je tzv. longitudinalna polarizacija, a $\varepsilon_0^\mu(\vec{k})$ skalarna ili vremenolika polarizacija.

Ako je \vec{k} u smjeru pozitivne z osi tada polarizacije možemo zapisati u vrlo jednostavnom obliku,

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^\mu(\vec{k}) &= n^\mu = (1, 0, 0, 0), \\ \varepsilon_1^\mu(\vec{k}) &= (0, 1, 0, 0), \\ \varepsilon_2^\mu(\vec{k}) &= (0, 0, 1, 0), \\ \varepsilon_3^\mu(\vec{k}) &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \quad (839)$$

- Napomenimo da dok su $\varepsilon_0^\mu(\vec{k})$ i $\varepsilon_3^\mu(\vec{k})$ stanja određene projekcije kutne količine gibanja, $\varepsilon_1^\mu(\vec{k})$ i $\varepsilon_2^\mu(\vec{k})$ nisu (to u linearne polarizacije), ali su to njihove linearne kombinacije,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(-\varepsilon_1^\mu(\vec{k}) - i\varepsilon_2^\mu(\vec{k})) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, -i, 0), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1^\mu(\vec{k}) - i\varepsilon_2^\mu(\vec{k})) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0). \end{aligned} \quad (840)$$

- Primjetimo da se $\varepsilon_3^\mu(\vec{k})$ može zapisati u kovarijantnom obliku,

$$\varepsilon_3^\mu(\vec{k}) = \frac{k^\mu - (k \cdot n)n^\mu}{[(k \cdot n)^2 - k^2]^{1/2}}. \quad (841)$$

Taj oblik će nam kasnije omogućiti Lorentz invarijantnu analizu propagatora, čak i za slučaj kada 4-impuls fotona nije na ljusci mase ($k^2 \neq 0$).

- Na kraju napomenimo da su fotonska polja realna polja, što se očituje u tome što su $A^{\mu+}$ i $A^{\mu-}$ dijelovi ukupnog polja međusobno hermitski konjugirani.

• Kovarijantna kvantizacija

Zahtjev je provesti kvantizaciju EM polja, tako da su na kraju zadovoljene Maxwellove jednačbe.

Kanonska kvantizacija

- Krećemo od Lagrangijana (826) kojeg smo dobili iz Lagrangijana (822) primjenjujući Lorentzov baždarni uvjet (776) odnosno (825). Zanimarujemo baždarni uvjet i iz Lagrangijana (826) nalazimo kanonske impulse (827), te provodimo kanonsku kvantizaciju polja. Baždarni uvjet ćemo kroz Gupta Bleulerovu metodu ugraditi naknadno u teoriju.

$$\begin{aligned} [A^\mu(\vec{x}, t), A^\nu(\vec{x}', t)] &= 0, & [\dot{A}^\mu(\vec{x}, t), \dot{A}^\nu(\vec{x}', t)] &= 0, \\ [A^\mu(\vec{x}, t), \dot{A}^\nu(\vec{x}', t)] &= -ig^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \quad (842)$$

- Do na faktor $-g^{\mu\nu}$ ta se pravila podudaraju sa kanonskim kvantizacijskim pravilima skalarnog polja.

Izrazi za operatore poništenja i stvaranja, i komutacijske relacije tih operatora

- Rabeći Fourierov raspis fotonskog polja (830), te relacije ortonormiranosti polarizacijskih vektora dobija se sljedeći izraz za operator poništenja,

$$\begin{aligned} a_r(\vec{k}) &= -\frac{\zeta_r}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \varepsilon_r^{*\mu}(\vec{k}) \int d^3x e^{ikx} i \overleftrightarrow{\partial}^0 A_\mu(x) \\ &= -\frac{\zeta_r}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \varepsilon_r^{*\mu}(\vec{k}) \int d^3x e^{ikx} (i \dot{A}_\mu(x) + k^0 A_\mu(x)), \end{aligned} \quad (843)$$

gdje je $a \overleftrightarrow{\partial} b = a \partial b - (\partial a) b$.

- Operator $a_k^{r\dagger}$ se dobija hermitskom konjugacijom operatora a_k^r .

Rabeći izraz za operator poništenja (843) i pripadni izraz za stvaranja, kanonska komutacijska pravila (842) i relacije ortonormiranosti (832) dobijaju se komutacijska pravila za operatore stvaranja i poništenja,

$$\begin{aligned} [a_r(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')] &= \zeta_r \delta_{rs} (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \\ [a_r(\vec{k}), a_s(\vec{k}')] &= 0, & [a_r^\dagger(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')] &= 0. \end{aligned} \quad (844)$$

DZ. Provjerite komutacijske relacije (844) upotrebom izraza (843) za a_k^r i $a_k^{\dagger r}$. Konzistentnost komutacijskih relacija (844) s kanonskim komutacijskim relacijama za fotonsko polje (842) može se provjeriti i raspisom polja u kanonskim kvantizacijskim reakcijama (842) po Fourierovim komponentama i upotrebom komutacijskih relacija za operatore stvaranja i poništenja (844). Kao rezultat moraju se dobiti desne strane sve tri jednadžbe (842). Provjerite i na taj način da li su jednadžbe (842) ispravne.

Komutator dva fotonska polja – "homogena" Greenova funkcija

- Rabeći komutacijske relacije (844) i relaciju potpunosti (833) može se dobiti komutator dva fotonska polja u dvije prostorno-vremenske točke po volji,

$$\begin{aligned}
 [A^\mu(x), A^\nu(x')] &= D^{\mu\nu}(x-x') - D^{\mu\nu}(x'-x) \\
 &= -g^{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} (e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')}) \\
 &= -g^{\mu\nu} \lim_{m \rightarrow 0} (D(x-x') - D(x'-x)). \tag{845}
 \end{aligned}$$

Dobiveni komutator je Greenova funkcija koja je homogeno rješenje bezmasene KG jednadžbe, $\square_x D^{\mu\nu}(x-x') = 0$, i može se dobiti kao limes "homogene" Greenove funkcije za skalarno polje $D(x-x')$, kao što je naznačeno u jednadžbi (845). Dani propagator predstavlja amplitudu za nalaženje jednog polja u točki x a drugog u točki x' , odnosno amplitudu nastajanja fotona u točki x i anihilaciju u točki x' ili obratno.

DZ. Dokazati jednadžbu (845).

Propagator fotonskog polja

- Propagator fotonskog polja se dobiva uporabom homogenog rješenja jednadžbe gibanja (ovdje su to bezmasene KG jednadžbe) i ugrađivanjem kauzalnih rubnih uvjeta,

$$\begin{aligned}
 D_F^{\mu\nu}(x-x') &= D^{\mu\nu}(x-x')\theta(x^0-x'^0) + D^{\mu\nu}(x'-x)\theta(x'^0-x^0) \\
 &= \langle 0|A^\mu(x)A^\nu(x')|0\rangle\theta(x^0-x'^0) + \langle 0|A^\nu(x')A^\mu(x)|0\rangle\theta(x'^0-x^0) \\
 &= \langle 0|T[A^\mu(x)A^\nu(x')]|0\rangle \\
 &= -g^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik(x-x')}}{k^2 + i\varepsilon} \\
 &= \lim_{m \rightarrow 0} [-g^{\mu\nu} D_F(x-x')] . \tag{846}
 \end{aligned}$$

- U prvom redu imamo prikaz $D_F^{\mu\nu}$ preko homogenih Greenovih funkcija, u drugom preko vakuumskih očekivanih vrijednosti polja, u trećem smo uveli T -uređenje polja, u četvrtom smo rabili integralnu formu homogenih Greenovih funkcija (845) i θ funkcija (16) i cijeli izraz prikazali preko 4-integrala (vidi npr. (167)-(169)), a u petom smo prikazali fotonski

propagator preko skalarnog u limesu kada masa teži k nuli.

Napomena : Uočite da smo za propagator dobili upravo izraz koji je našao Peskin.

DZ. Provjerite sve korake u jednadžbi (846).

Problem s kvantizacijom operatora stvaranja i poništenja

- Komutacijske relacije (844) imaju standardni oblik za prostorne polarizacije, $r = 1, 2, 3$, međutim skalarna/vremenolika polarizacija ima suprotan predznak od uobičajenog. Izgleda kao da treba zamjeniti uloge $a_0(\vec{k})$ i $a_0^\dagger(\vec{k})$ da bi se popravio predznak. To međutim vodi na probleme. Jedno od mogućih rješenja tog problema je procedura koju su uveli Gupta i Bleuler.

□ Gupta-Bleulerova teorija/procedura

Postavke Gupta-Bleulerove teorije

- U Gupta-Bleulerovoj teoriji operatori $a_r(\vec{k})$, $r = 1, 2, 3, 0$ se tretiraju kao operatori poništenja a $a_r^\dagger(\vec{k})$, $r = 1, 2, 3, 0$ kao operatori stvaranja za transverzalne, longitudinalne i skalarne fotone.

- Vakuumsko stanje je definirano kao stanje bez fotona,

$$a_r(\vec{k})|0\rangle = 0, \quad \forall \vec{k}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \quad (847)$$

ili ekvivalentno

$$A^{\mu+}(x)|0\rangle = 0, \quad \forall x, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (848)$$

- Operatori $a_r^\dagger(\vec{k})$ djelujući na vakuum tvore jednočestična stanja,

$$|1_{\vec{k}r}\rangle = a_r^\dagger(\vec{k})|0\rangle. \quad (849)$$

Konzistentnost formalizma

- Konzistentnost formalizma se može provjeriti razmatranjem djelovanja operatora Hamiltonijana na jednočestično ili višečestično stanje. Svojstvena energija Hamiltonijana mora uvijek biti veća od nule. Hamiltonijan dobijamo standardnom procedurom iz Lagrangijana (vidi (90), (91), (1477))

$$H = \int d^3x : \pi^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) - \mathcal{L}(x) : . \quad (850)$$

- Pretpostavljeno je da je Hamiltonijan normalno uređen, tj. da je $H|0\rangle = 0$.

- Primjenom izraza za slobodni Lagrangijan ((826) sa $j_\mu = 0$) i za fotonsko polje (830) te

relacija ortonormiranosti polarizacijskih vektora (832) nalazimo

$$\begin{aligned}
H &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} \sum_{r=0}^3 : \zeta_r (a_r(\vec{k}) a_r^\dagger(\vec{k}) + a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k})) : \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{r=0}^3 \zeta_r \omega_{\vec{k}} a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) .
\end{aligned} \tag{851}$$

DZ. Provjerite jednadžbu (851).

DZ. Rabeći relaciju za impuls fotonskog polja (analognu relaciji za skalarno polje (92)),

$$P^i = \int d^3x T^{0i} = \int d^3x \sum_{\mu} : \pi_{\mu} \partial^i A^{\mu} : , \tag{852}$$

pokažite da operator impulsa ima oblik

$$\vec{P} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{r=0}^3 \zeta_r \vec{k} a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) . \tag{853}$$

- Djelovanje Hamiltonijana (851) na jednočestično stanje daje uvijek pozitivnu svojstvenu vrijednost,

$$\begin{aligned}
H|1_{\vec{k}r}\rangle &= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \sum_{s=0}^3 \zeta_s \omega_{\vec{k}'} a_s^\dagger(\vec{k}') a_s(\vec{k}') a_r^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \\
&= \omega_{\vec{k}} a_r^\dagger(\vec{k}) |0\rangle .
\end{aligned} \tag{854}$$

Time je konzistentnost Gupta-Bleulerove procedure provjerena.

- Nadalje oblik Hamiltonijana zahtjeva da se operator broja čestica definira na sljedeći način,

$$N_r(k) = \zeta_r a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) . \tag{855}$$

Problem s normalizacijom stanja

- U Gupta-Bleulerovoj teoriji se javlja problem normalizacije stanja. Ako se pretpostavi da je vakuumsko stanje normalizirano na jedinicu, $\langle 0|0\rangle = 1$ tada normalizacija jednočestičnih stanja,

$$\langle 1_{\vec{k}r} | 1_{\vec{k}'r} \rangle = \langle 0 | a_r(\vec{k}) a_r^\dagger(\vec{k}') | 0 \rangle = (2\pi)^3 \zeta_r \delta(\vec{k} - \vec{k}') , \tag{856}$$

pokazuje da je norma skalarnih fotona negativna. To je naizgled veliki problem jer probabilistička interpretacija kvantne mehanike ovisi o pozitivnosti normi stanja.

- Oba problema (probabilistička interpretacija QM i pozitivnost normi) povezana su s time da u teoriju još nije ugrađen Lorentzov uvjet. U vezi s time je i činjenica da eksperimentalno nikada nije opažen foton longitudinalne ili skalarne/vremenolike polarizacije.

Ugradnja Lorentzovog uvjeta

- Lorentzov uvjet (825) se ne može postaviti kao operatorska jednakost. Naime (825) nije kompatibilan sa komutacijskim relacijama (842) jer

$$[\partial_\mu A^\mu(x), A^\nu(x')] = \partial_\mu D^{\mu\nu}(x - x') \quad (857)$$

nije identički jednako nuli.

- Gupta i Bleuler su problem riješili zamjenjujući operatorsku jednakost $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ slabijim uvjetom koji uključuje samo operatore poništenja,

$$\partial_\mu A^{\mu+}(x)|\Psi\rangle = 0. \quad (858)$$

$|\Psi\rangle$ su fizikalna stanja - stanja koja su dozvoljena u teoriji. Konjugirana relacija relacije (858) glasi

$$\langle\Psi|\partial_\mu A^{\mu-}(x) = 0. \quad (859)$$

Iz (858) i (859) slijedi da je Lorentzov uvjet zadovoljen za očekivane vrijednosti s obzirom na stanja koja su dozvoljena teorijom,

$$\langle\Psi|\partial_\mu A^\mu(x)|\Psi\rangle = \langle\Psi|\partial_\mu A^{\mu-}(x) + \partial_\mu A^{\mu+}(x)|\Psi\rangle = 0. \quad (860)$$

Fizikalno značenje uvjeta (858)

- Fizikalno značenje uvjeta se dobija razmatranjem (858) u impulsnom prostoru,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu A^{\mu+}(x)|\Psi\rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} e^{-ikx} \sum_{r=0}^3 -ik_\mu \varepsilon_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) |\Psi\rangle \\ &\equiv 0 = a_3(\vec{k}) - a_0(\vec{k}) |\Psi\rangle \quad \forall \vec{k}, \end{aligned} \quad (861)$$

gdje smo upotrijebili sljedeća svojstva polarizacijskih vektora definiranih u (835), (838) i (841),

$$\begin{aligned} k_\mu \varepsilon_0^\mu(\vec{k}) &= k, & k_\mu \varepsilon_3^\mu(\vec{k}) &= -k, \\ k_\mu \varepsilon_r^\mu(\vec{k}) &= 0, & r &= 1, 2, \end{aligned} \quad (862)$$

i linernu nezavisnost Fourierovih komponenti.

- Posljedica uvjeta jest da u teorijom dozvoljenim stanjima nema pobuđenja oblika $a_3(\vec{k}) -$

$a_0(\vec{k})$.

- Iz (861) nadalje slijedi

$$\langle \Psi | a_3^\dagger(\vec{k}) a_3(\vec{k}) - a_0^\dagger(\vec{k}) a_0(\vec{k}) | \Psi \rangle = \langle \Psi | a_3^\dagger(\vec{k}) (a_3(\vec{k}) - a_0(\vec{k})) | \Psi \rangle = 0 . \quad (863)$$

- Iz relacije (863) proizlazi da za očekivanu vrijednost Hamiltonijana vrijedi

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \langle \Psi | \int d^3k \sum_{r=1}^2 \omega_{\vec{k}} a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) | \Psi \rangle . \quad (864)$$

- Dakle posljedica dodatog uvjeta (858) odnosno (861) je da se samo transverzalni fotoni javljaju u izrazu za očekivanu vrijednost Hamiltonijana slobodnih fotona. Isto vrijedi za sve druge fizikalne operatore slobodnih fotona (operator impulsa, naboja, itd.) To pokazuje da se **zbog dodatnog uvjeta** (858) odnosno (861) u slobodnoj kvantiziranoj teoriji fotona javljaju samo samo observable koje sadrže transverzalne fotone. To objašnjava zašto fotoni longitudinalne i skalarne polarizacije nisu eksperimentalno opaženi. Napomenimo da dodatni uvjet definira dozvoljena **fizikalna stanja**.

- **Napomena** : Lorentzov uvjet uklanja samo jednu linearnu kombinaciju longitudinalnih i skalaranih fotona. Druga, $a_3(\vec{k}) + a_0(\vec{k})$ je prisutna u teoriji i u stanjima. Promjena broja fotona tipa $a_3(\vec{k}) + a_0(\vec{k})$ u stanima $|\Psi\rangle$ je ekvivalentna promjeni baždarenja koja zadovoljavaju Lorentzovo baždarenje. Ti dodatni fotoni u stanjima $|\Psi\rangle$ ne mijenjaju observable za slobodne fotone.

- **Napomena** : Za teoriju s fotonima u međudjelovanju s nabojima, longitudinalni i transverzalni fotoni se ne mogu zanemariti. Oni se manifestiraju kao Coulombovo međudjelovanje među nabojima. Međutim u početnim i konačnim stanjima još se uvijek javljaju samo transverzalni fotoni.

3.8.3 Interpretacija fotonskog propagatora

- Sada ćemo analizirati fotonski propagator. Cilj je naći u njemu dijelove koji odgovaraju transverzalno polariziranim fotonima i Coulombovom međudjelovanju.

- Uporabom izraza za propagator dobivenog kvantizacijom u Lorentzovom baždarenju (846), te izraza za transverzalne, longitudinalnu i skalarne polarizacije (vidi (835) i (838)) dobijamo

$$D_F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k D_F^{\mu\nu}(k) e^{-ikx}$$

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \sum_{r=0}^3 \zeta_r \varepsilon_r^{*\mu}(\vec{k}) \varepsilon_r^\nu(\vec{k}) \quad (865)$$

$$= \frac{-1}{k^2 + i\varepsilon} \left\{ \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^{*\mu}(\vec{k}) \varepsilon_r^\nu(\vec{k}) + \frac{[k^\mu - (kn)n^\mu][k^\nu - (kn)n^\nu]}{(kn)^2 - k^2} - n^\mu n^\nu \right\} \quad (866)$$

$$= {}_T D_F^{\mu\nu}(k) + {}_C D_F^{\mu\nu}(k) + {}_R D_F^{\mu\nu}(k) . \quad (867)$$

- Prvi član u vitičastim zagradama u (866) odgovara izmjeni transverzalnih fotona, (tj. fizikalnih fotona), a preostala dva odgovaraju izmjeni longitudinalnog i skalarnog fotona.

- U jedn. (867) smo razdvojili transverzalne komponente ${}_T D_F^{\mu\nu}(k)$ a longitudinalnu i skalarnu smo razdijelili na dio proporcionalan $n_\nu n_\nu$, ${}_C D_F^{\mu\nu}(k)$, i ostatak, ${}_R D_F^{\mu\nu}(k)$

$${}_T D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-1}{k^2 + i\varepsilon} \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^{*\mu}(\vec{k}) \varepsilon_r^\nu(\vec{k}),$$

$${}_C D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{n_\nu n_\nu}{(kn)^2 - k^2},$$

$${}_R D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left[\frac{k^\mu k^\nu - (kn)(k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)}{(kn)^2 - k^2} \right] . \quad (868)$$

- Interpretacija ${}_C D_F^{\mu\nu}(k)$ se dobija prijelazom u x prostor u sustavu gdje je $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$,

$${}_C D_F^{\mu\nu}(x) = \frac{g^{\mu 0} g^{\nu 0}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^3k e^{ik \cdot \vec{x}}}{|\vec{k}|^2} \int dk^0 e^{-ik^0 x^0}$$

$$= g^{\mu 0} g^{\nu 0} \frac{1}{4\pi |\vec{x}|} \delta(x^0) . \quad (869)$$

Očigledno ${}_C D_F^{\mu\nu}(k)$ odgovara Coulombovom međudjelovanju. Uočimo da Coulombovom međudjelovanju odgovara kombinacija skalarnih i longitudinalnih fotona. Isto tako je i ${}_R D_F^{\mu\nu}(k)$ kombinacija skalarnih i longitudinalnih fotona.

- Na kraju, budući da se fotonski propagator veže na sačuvane struje (Maxwellova jednadžba, Wardov identitet), a ${}_R D_F^{\mu\nu}(k)$ sadrži u sebi impuls fotona, taj dio propagatora iščezava u fizikalnim (observabilnim) veličinama.

3.9 Veza nerelativističke kvantne mehanike i teorije polja : potencijali

- (Neobrađene teme !!)
- Yukawin potencijal : privlačan
- Coulombov potencijal : privlačan i odbojan

4 Radijativne korekcije : Osnove I

U ovom poglavlju potvrdit ćemo formulu (730) odnosno formulu (731) za S matrični element.

4.1 Renormalizacija jakosti polja

- Započet ćemo analizom analitičke strukture korelacijskih funkcija dva polja, npr.

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle \quad \text{ili} \quad \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle . \quad (870)$$

Pitanje interpretacije

- **Interpretacija u slobodnoj teoriji polja:** amplituda širenja čestice iz točke y u točku x . Pitanje je u kojoj mjeri ta interpretacija vrijedi u teoriji s međudjelovanjem.

Postavke analize - Analizu baziramo na **općim svojstvima spec. teorije relativnosti i kvantne mehanike**. Ona **neće zavisiti o perturbativnom razvoju**. Analizu ćemo napraviti za **skalarna polja**.

Ubacivanje potpunog skupa stanja

- Da bismo dobili strukturu korelacijske funkcije $\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$ između dva polja ubacit ćemo potpun skup svojstvenih stanja ukupnog Hamiltonijana H . Kako operator impulsa \vec{P} komutira sa H , za stanja možemo izabrati istovremena svojstvena stanja \vec{P} i H . $\lambda_{\vec{p}}$. Nadalje možemo rabiti Lorent invarijantnost teorije. Ako je $|\lambda_0\rangle$ svojstveno stanje H impulsa nula, $\vec{P}|\lambda_0\rangle = 0$ to su i sva stanja koje se dobijaju boostiranjem stanja $|\lambda_0\rangle$. Stoga sumaciju po stanjima možemo razdvojiti na integraciju po impulsima i sumaciju po stanjima u mirovanju λ_0 . Stanja koja se boostiranjem dobijaju is danog λ_0 stanja u dijagramu impulsa i energije tvore hiperboloide (vidi Sl. 7.1 – nije nacrtana – vidi Peskin pogl. 7.1).

- Za jednočestična stanja relacija potpunosti glasi (tu imamo samo jedno stanje u mirovanju; sva ostala se dobijaju boostiranjem polaznog stanja)

$$\mathbf{1}_{1\text{-čest.}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| , \quad (871)$$

dok za potpuni Hilbertov prostor analogna relacija glasi

$$\mathbf{1} = |\Omega\rangle \langle \Omega| + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} |\lambda_{\vec{p}}\rangle \langle \lambda_{\vec{p}}| , \quad (872)$$

gdje suma ide po svim stanjima ukupnog impulsa $\vec{p} = 0$ stanja $|\lambda_0\rangle$ (Primjeti da $|\lambda\rangle$ može biti i jednočestično i višečestično stanje. \vec{p} je ukupni impuls stanja $|\lambda_{\vec{p}}\rangle$ a $E_{\vec{p}}$ pripadna energija. m_{λ} je (efektivna) masa stanja, tj. energija stanja $|\lambda_0\rangle$).

Izraz za Greenovu funkciju

- Pretpostavimo da je $x^0 > y^0$. Ubacimo potpun skup stanja (872) izmađu skalarnih polja,

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{p}} \rangle \langle \lambda_{\vec{p}} | \phi(y) | \Omega \rangle . \quad (873)$$

- Zanimljivo član $\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle \langle \Omega | \phi(y) | \Omega \rangle$. On se javlja samo ako polja ϕ ima vakuumsku očekivanu vrijednost i nije interesantan za ovu analizu. Kod spinornih polja takav je član zabranjen zbog netrivialnih Lorentzovih transformacija spinornog polja.

- Uporabom **translacijske transformacije polja i Lorentz invarijantnosti vakuuma** a zatim **Lorentz transformacije stanja** nalazimo

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{p}} \rangle &= \langle \Omega | e^{iP \cdot x} \phi(0) e^{-iP \cdot x} | \lambda_{\vec{p}} \rangle \\ &= \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-ip \cdot x} \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}} . \end{aligned} \quad (874)$$

- Zadnja jednakost je posljedica **Lorentz invarijantnosti** $\psi(0)$ i $\langle \Omega |$: umetanjem $U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)$ faktora ($U(\Lambda)$ je boost koji transformira stanje $\lambda_{\vec{p}}$ u stanje λ_0) te uporabom spomenutih invarijantnosti transformirat će se samo $\lambda_{\vec{p}} \rightarrow \lambda_0$.

- Uvođenjem integracije po p^0 (za $x^0 > y^0$) nalazimo,

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle \stackrel{x^0 > y^0}{=} \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2 . \quad (875)$$

Primjetite da izraz sadrži Feynmanov propagator $D_F(x-y)$ s time da je masa m zamjenjena sa m_{λ} .

- Za $x^0 < y^0$ nalazimo isti rezultat. Sumarno oba rezultata daju tzv. *Källén-Lehmannovu spektralnu reprezentaciju* propagatora

$$\begin{aligned} &\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) \theta(x^0 - y^0) + \phi(y) \phi(x) \theta(y^0 - x^0) | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y, M^2), \\ \rho(M^2) &= \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2 . \end{aligned} \quad (876)$$

Tu je $\rho(M^2)$ tzv. **funkcija spektralne gustoće**.

Interpretacija veličina jednočestičnih stanja u funkciji spektralne gustoće

- Funkcija spektralne gustoće je uvijek pozitivna. Prikazana je na Sl. 7.2 iz Peskina pogl. 7.1 – ovdje nije nacrtana. Jednočestična stanja daju doprinos tipa delta funkcije spektralnoj funkciji,

$$\rho(M^2) = 2\pi \delta(M^2 - m^2) \cdot Z + (\text{doprinosi iznad } M^2 \gtrsim (2m)^2), \quad (877)$$

gdje je Z broj, tzv. *renormalizacija jakosti polja*. m je fizikalna masa čestice, tj. njena energija u sustavu mirovanja čestice. m nije jednak parametru mase koji se javlja u Lagrangijanu, m_0 , koji se zove ogoljena masa (engl. "bare"). Masa m^2 je mjerljiva, dok m_0^2 nije.

Spektralna dekompozicija Greenove funkcije dva polja

Uporabom spektralne dekompozicije (877) i izraza za Greenovu funkciju dva skalarna polja (876) dobija se sljedeći izraz za Fourierov transformat spektralne funkcije,

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega T | \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle &= \int \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} \\ &= \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \int_{\sim 4m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (878)$$

Analitička struktura te funkcije dana je na Sl. (5). Ona sadrži **izolirani singularitet**, te

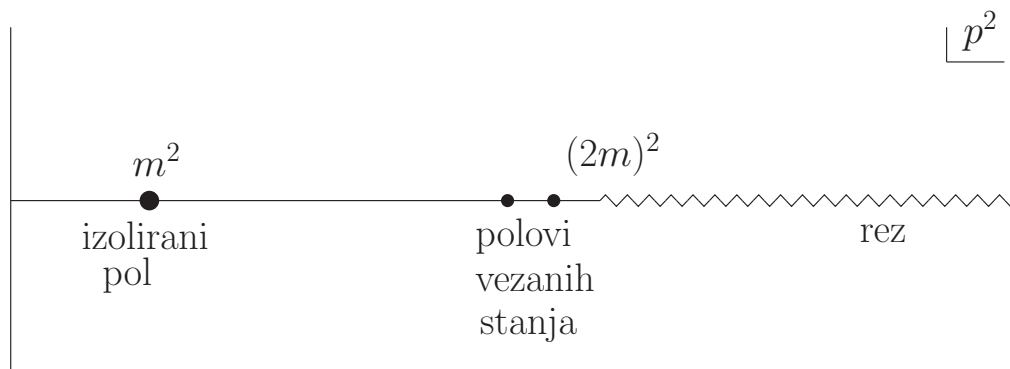


Figure 5: 7.3 Analitička struktura Fourierovog transformata korelacijske funkcije dva skalarna polja u kompleksnoj p^2 ravlini. Jednočestična stanja daju pol u $p^2 = m^2$, stanja sa dva i više stanja rez koji započinje u $p^2 = (2m)^2$, a vezana stanja polove malo ispod $p^2 = (2m)^2$.

rez koji počinje za $p^2 = (2m)^2$ i eventualno polove vezanih stanja malo ispod $p^2 = (2m)^2$.

Usporedba sa Greenovom funkcijom za dva slobodna polja

Fourierov transformat korelacijske funkcije dva slobodna polja,

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (879)$$

sadrži samo **jednočestičnu komponentu**. Za $x^0 > 0$ (879) interpretiramo kao amplitudu širenja čestice iz točke 0 u točku x , tj. Fourierov transformat te amplitude. Izraz (878) iako ima vrlo sličnu strukturu, se **razlikuje** od (879) u dvije bitne stvari:

a. (878) sadrži u jednočestičnoj komponenti **faktor renormalizacije jakosti polja**

$Z = |\langle \lambda_0 | \phi(0) | \Omega \rangle|^2$, koji predstavlja vjerojatnost da polje $\phi(0)$ stvori jednočestično stanje iz vakuuma. U slobodnoj teoriji polja je $Z = 1$.

b. (878) sadrži doprinose više **čestičnih** stanja sa **kontinuiranim masenim spektrom**. U slobodnoj teoriji polja $\phi(0)$ može stvoriti samo jednočestična stanja.

- Ono što možemo uočiti jest da u Fourierovom transformatu Greenove funkcije dva skalarna polja **jednočestična** stanja daju **polove** u p^2 , dok **višečestična** stanja daju slabije singularitete, **rezove** (integracija po M^2 pretvara $1/(p^2 - M^2 + i\varepsilon)$ u slabiji singularitet — $\rho(M^2)$ je obično analitička funkcija). Ovo pravilo da polovi odgovaraju jednočestičnim stanjima a rezovi višečestičnim je opće pravilo u teoriji polja. Ono vrijedi ne samo za skalarna polja nego za sva polja kao što ćemo sada objasniti.

Generalizacija (878) za polja sa spinom

- Gornja analiza se može generalizirati na polja sa spinom.

- Tu se javlja problem sa višečestičnim stanjima zato jer se za polje sa spinom ϕ_A , $\langle \Omega | \phi_A(x) | 0 \rangle$ netrivialno transformira na Lorentzove transformacije pa je za opis višečestičnih stanja potrebno više spektralnih funkcija ($\rho(M^2) \rightarrow \sum_{\alpha} (\text{struktura})_{\alpha} \rho_{\alpha}(M^2)$, gdje su α indeksi koji odgovaraju određenu spinsko-Lorentzovu strukturu dva $\langle \Omega | \phi_A(x) | 0 \rangle$ matricna elementa).

- Taj se problem ne javlja kod jednočestičnih doprinosa jer je matricni element $\langle \Omega | \phi_A(0) | \lambda_{\vec{p}} \rangle$ proporcionalan koeficijentnoj funkciji u slobodnom polju (to je posljedica Lorentzove strukture matricnog elementa). Npr. za 1-čestično stanje spina 1/2 i projekcije spina s

$$\langle \Omega | \psi(x) | \lambda_{\vec{p}} \rangle \sim u^s(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (880)$$

odakle slijedi

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle = \frac{i Z_2 \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \dots \quad (881)$$

Točkice u (881) predstavljaju doprinose višečestičnih stanja koji imaju singularitete tipa reza, a Z_2 je faktor renormalizacije spinornog polja, odnosno vjerojatnost da kvantno polje $\psi_A(0)$ iz vakuuma stvori jednočestično svojstveno stanje ukupnog Hamiltonijana H . Stoga matricni element (880) glasi

$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p) \quad (882)$$

(za antičestično stanje treba zamijeniti $u^s(p)$ sa $\bar{v}^s(p)$.) Za $p^2 = m^2$ tj. u singularnoj točki Greenova funkcija (881) se podudara sa koeficijentnom funkcijom slobodnog polja za fizikalnom masom m do na faktor Z_2 .

4.2 LSZ redukcijaska formula

- Pokazali smo da Fourierov transformat korelacijske funkcije dvaju polja ima jednostavni pol kada je p^2 jednak masi jedno-čestičnog stanja,

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle \underset{p^2 \rightarrow m^2}{\sim} \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (883)$$

U ovom poglavlju "sim" će označavati identičnost polova lijeve i desne strane u danoj jednadžbi. Npr. (883) daje informaciju da je pol $\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle$ jednak polu funkcije $\frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$. Primjetite da je Z reziduum dane funkcije.

Ciljevi ovog poglavlja

- Generalizirat ćemo relaciju (883) na korelacijske funkcije više polja. Izvest ćemo opću relaciju između korelacijskih funkcija polja i S matričnih elemenata, koju su izveli Lehman, Symanzik i Zimmerman i poznat je pod imenom LSZ redukcijaska formula. Time ćemo opravdati osnovnu formulu za prikaz S -matričnih elemenata preko Feynmanovih pravila (731) odnosno (730). Dokaz ćemo provesti za skalarna polja.

Strategija dokaza

- Cilj je naći izraz za S matricu za proces 2 čestice $\rightarrow n$ čestica. Dokaz provodimo u par koraka:

1. Krećemo od korelacijske funkcije za $n + 2$ Heisenbergovih polja.
2. Fourier transformiramo korelacijsku funkciju s obzirom na koordinatu jednog od tih polja i nalazimo pol oblika (883).
3. Pokazuje se da se jedno-čestična stanja pridružena takvim polovima mogu interpretirati kao asimptotska stanja, tj. stanja dana sa limesom dobro odvojenih valnih paketa koncentriranih oko određenih 4-impulsa.
4. U limesu kada su sve $n + 2$ vanjske čestice na ljusci mase, koeficijent $(n + 2)$ -strukog pola može se interpretirati kao S -matrični element raspršenja 2 čestice u n čestica.

1. Analiza korelacijske funkcije $n + 2$ polja Fourier transformirane s obzirom na jednu od 4-koordinata

- Analiziramo integral

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(z_1) \phi(z_2) \dots | \Omega \rangle. \quad (884)$$

- Da bismo našli polove u varijabli p^0 razdvajamo integral po x^0 na tri dijela

$$\int dx^0 = \underbrace{\int_{T_+}^{\infty} dx^0}_I + \underbrace{\int_{T_-}^{T_+} dx^0}_{II} + \underbrace{\int_{-\infty}^{T_-} dx^0}_{III}, \quad (885)$$

gdje je T_+ mnogo veći od svih z_i^0 a T_- mnogo manji od svih z_i^0 . U sva tri integrala I , II i III podintegralna funkcija p^0 zavisnost dobija preko analitičke funkcije $e^{ip^0x^0}$. Kako je područje II ograničeno, integral II je analitička funkcija p^0 . Međutim područja I i III nisu ograničena, pa stoga se u tim integralima mogu pojaviti singulariteti u p^0 .

Integral I

- U integralu I x^0 je **najveće vrijeme** koje se javlja u $n + 2$ polja pa je $\phi(x)$ već u vremenski uređenom poretku u (884). Stoga ga možemo izdvojiti iz T produkta u (884).
- Ubacujemo **potpun skup stanja** (872) između polja $\phi(x)$ i ostalih polja. Time integral I postaje jednak

$$I = \int_{T_+}^{\infty} dx^0 e^{ip^0x^0} \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \sum_{\lambda} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{q}}(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{q}} \rangle \langle \lambda_{\vec{q}} | T \{ \phi(z_1) \phi(z_2) \dots \} | \Omega \rangle . \quad (886)$$

- Upotrebom (874),

$$(874) \equiv \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{p}} \rangle = \underbrace{\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle}_{\sqrt{Z}} e^{-ip\cdot x} \Big|_{p^0=E_{\vec{p}}} ,$$

i ubacujući faktor $e^{-\varepsilon x^0}$ da bismo osigurali konvergenciju integrala, integral postaje jednak

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} dx^0 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{q}}(\lambda)} e^{ip^0x^0 - iq^0x^0 - \varepsilon x^0} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \\ &\quad \times \underbrace{\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle}_{\sqrt{Z}} \langle \lambda_{\vec{q}} | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \Omega \rangle \\ &= \sum_{\lambda} \frac{1}{E_{2\vec{p}}(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_{\vec{p}}(\lambda) + i\varepsilon} \underbrace{\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle}_{\sqrt{Z}} \langle \lambda_{\vec{p}} | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (887)$$

(faza $e^{(ip^0 - iE_{\vec{p}}(\lambda) - \varepsilon)T_+}$ je zanemarena).

- **Singularitet** : U blizini singulariteta vrijedi (Weinberg pogl. 9)

$$\frac{1}{2E_{\vec{q}}(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_{\vec{p}}(\lambda) + i\varepsilon} \rightarrow \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\varepsilon} . \quad (888)$$

Iz Lorentz invarijantnosti (kovarijantnosti) integrala I slijedi da ta zamjena vrijedi i dalje od singulariteta (u blizini drugih singulariteta bit će dominantni drugi doprinosi, ali doprinos je za svaki p oblika propagatora). Stoga za integral I dobijamo,

$$\begin{aligned} I &= \int_{T_+}^{\infty} d^4x e^{ip\cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(z_1) \dots | \Omega \rangle \\ &\underset{p^0 \rightarrow +E_{\vec{p}}}{\sim} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{p} | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \Omega \rangle . \end{aligned} \quad (889)$$

- **Višečestični doprinosi** vode na isti "propagatorski" oblik singulariteta, ali tada se javlja dodatni integral po masi, jer je maseni parametar za višečestična stanja sada kontinuiran. To vodi na singularitet tipa reza. Nas u formuli (889) ne zanimaju doprinosi tipa reza, već samo izolirani singulariteti koji dolaze od jednočestičnih stanja.

- **Faktor \sqrt{Z}** je isti faktor renormalizacije jakosti polja koji se javlja i u izrazu za korelacijsku funkciju dva skalarna polja, (883) odnosno (878).

Integral III

- U integralu III, polje $\phi(x)$ ima najmanje vrijeme pa ga se može izvući iz T produkta i staviti desno od svih preostalih polja.

- Ubacivanjem potpunog skupa stanja (872) između polja $\phi(x)$ i ostalih polja, primjenom (874) (translacijska transformacija $\phi(x)$ i Lorentz invarijantnost $|\Omega\rangle$ i $\phi(0)$), ubacivanjem faktora $e^{\varepsilon x^0}$ da bi se postigla konvergencija integrala po x^0 dobijamo (rabimo $E_{\vec{p}} = E_{-\vec{p}}$)

$$\begin{aligned}
III &= \int_{x^0=-\infty}^{T^-} d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \dots \} | \Omega \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{T^-} dx^0 e^{ip^0 x^0 + \varepsilon x^0 + iq^0 x^0} \int d^3x \sum_{\lambda} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{q}}} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x} - i\vec{q} \cdot \vec{x}} \\
&\times \langle \Omega | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \lambda_{\vec{q}} \rangle \underbrace{\langle \lambda_{\vec{q}} | \phi(0) | \Omega \rangle}_{\sqrt{Z}} \\
&= \sum_{\lambda} \frac{1}{2E_{\vec{p}} p^0 + E_{\vec{p}} - i\varepsilon} \frac{-i}{\sqrt{Z}} \langle \Omega | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \lambda_{-\vec{p}} \rangle \\
&\underset{p^0 \rightarrow -E_{\vec{p}}}{\sim} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \langle \Omega | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \lambda_{-\vec{p}} \rangle . \tag{890}
\end{aligned}$$

U trećem redu je zanemarena faza $e^{(ip^0 + \varepsilon + iq^0)T^-}$ i faza $\langle \lambda_{\vec{q}} | \phi(0) | \Omega \rangle$.

U zadnjem redu smo napravili dvije stvari:

1. Izvukli smo samo jednočestični doprinos iz sume u predzadnjem redu.
2. Rabeći Lorentz kovarijantnost amplitude zamjenili $\frac{1}{2E_{\vec{p}} p^0 + E_{\vec{p}} - i\varepsilon}$ sa propagatorom $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$.

2. Analiza korelacijske funkcije $n + 2$ polja Fourier transformirane s obzirom na više (sve) koordinate polja x, z_1, \dots

- Da bismo onemogućili interferenciju vanjskih čestica moramo ih izolirati u prostoru. Zbog toga obični Fourierov transformat koji vrijedi za ravni val moramo zamijeniti sa **Fourierovim transformatom u kojem se javlja test funkcija valnog paketa**,

$$\int d^4x e^{ip^0 x^0} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{ip^0 x^0} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \phi(\vec{k}) . \tag{891}$$

Tu je $\phi(\vec{k})$ test funkcija koja ima oštri maksimum oko $\vec{k} = \vec{p}$. Ta test funkcija ograničava vrijednosti x na prostorne dimenzije valnog paketa oko trajektorije čestice impulsa \vec{p} .

- S tom modifikacijom desna strana integrala I , (887) dobija **kompliciraniju strukturu singulariteta**,

$$I \rightarrow \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}) \frac{1}{2E_{\vec{k}}(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_{\vec{k}}(\lambda) + i\varepsilon} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_{\vec{k}} | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \Omega \rangle$$

$$\underset{p^0 \rightarrow +E_{\vec{p}}}{\sim} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}) \frac{i}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{k} | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \Omega \rangle, \quad (892)$$

gdje je $\tilde{p} = (p_0, \vec{k})$. Singularitet je sada rez čija je duljina definirana širinom paketa $\phi(\vec{k})$. U limesu kada širina paketa teži k nuli, preciznije ako $\phi(\vec{k}) \rightarrow (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{p})$ rez prelazi u pol (točkasti singularitet) i dobija se izraz (889).

- Analogno se za integral III , (890), dobija

$$III \rightarrow \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}) \frac{1}{-2E_{\vec{k}}(\lambda)} \frac{i}{p^0 + E_{\vec{k}}(\lambda) - i\varepsilon} \langle \Omega | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \lambda_{-\vec{k}} \rangle \langle \lambda_0 | \phi(0) | \Omega \rangle$$

$$\underset{p^0 \rightarrow -E_{\vec{p}}}{\sim} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}) \frac{i}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \langle \vec{k} | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \Omega \rangle. \quad (893)$$

Integracija svih koordinata, veza korelacijske funkcije sa S matričnim elementom

- Razmotrimo Fourierov transformat s valnim paketima, (891), svih $n + 2$ koordinata u korelacijskoj funkciji s $n + 2$ polja

$$J = \prod_i \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \int d^4 x_i e^{i\tilde{p}_i \cdot x_i} \phi_i(\vec{k}_i) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \} | \Omega \rangle. \quad (894)$$

(Naziv J smo uveli zbog kasnije analize)

- **Valne pakete** biramo tako da se preklapaju u području oko $x = 0$ i da su razdvojeni u dalekoj prošlosti i budućnosti.

- Odaberimo veliko pozitivno vrijeme \mathbf{T}_+ tako da su svi valni paketi jako razdvojeni za $x_i^0 > T_+$ i negativno vrijeme \mathbf{T}_- velikog negativnog iznosa, tako da su svi valni paketi jako razdvojeni za $x_i^0 < T_-$. Svaki od integrala možemo razdvojiti na tri dijela kao u (884). Integrali po ograničenim područjima II su **analitički** u energijama p_i^0 , tj. ne daju singularitete. Stoga ćemo se koncentrirati samo na integrale u dalekoj prošlosti, $x_i^0 < T_-$, ili budućnosti $x_i^0 > T_+$.

- Analizu ćemo provesti na **primjeru** koji sadrži sva svojstva općeg primjera - na slučaju kada imamo **dva polja u području integracije I**.

- Ubacujemo potpun skup stanja i $\lambda_{\vec{k}}$ i integriramo po koordinatama dvaju polja

$$J' = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 K}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{K}}} \left(\prod_{i=1,2} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \int_I d^4 x_i e^{i\tilde{p}_i \cdot x_i} \phi_i(\vec{k}_i) \right)$$

$$\times \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_{\vec{K}} \rangle \langle \lambda_{\vec{K}} | T \{ \phi(x_3) \dots \} | \Omega \rangle. \quad (895)$$

- Stanja $|\lambda_{\vec{k}}\rangle$ su anihilirana s dva operatora polja, pa stoga moraju sadržavati (barem) **dva različita buđenja**. Ta su pobuđenja su prema konstrukciji međusobno jako udaljena, pa stoga moraju biti **nezavisna** (princip dekompozicije nakupina). Stoga možemo rabiti **aproksimaciju** u kojoj su stanja $\lambda_{\vec{k}}$ prikazana preko produkta nezavisnih stanja, odnosno u kojoj suma po potpunom skupu stanja ima oblik

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda} \frac{d^3 K}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{K}}} \langle \Omega | \phi(x_1) \phi(x_2) | \lambda_{\vec{K}} \rangle \langle \lambda_{\vec{K}} | \\ &= \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{q}_1}} \int \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{q}_2}} \langle \Omega | \phi(x_1) | \lambda_{\vec{q}_1} \rangle \langle \Omega | \phi(x_2) | \lambda_{\vec{q}_2} \rangle \langle \lambda_{\vec{q}_1} \lambda_{\vec{q}_2} | . \end{aligned} \quad (896)$$

- Suma po $\lambda_{\vec{q}_1}$ i $\lambda_{\vec{q}_2}$ ide po svim stanjima 3-impulsa nula, međutim samo jednočestična stanja doprinose **polovima** (koji nas interesiraju). Za jednočestična stanja integracije po x_1^0 i \vec{q}_1 odnosno x_2^0 i \vec{q}_2 daju istaknute singularitete oblika (892) odnosno (893). Član sa dva (jednočestična) singulariteta u (896) glasi

$$\left(\prod_{i=1,2} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \phi_i(\vec{k}_i) \frac{i}{\vec{p}_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \right) \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \} | \Omega \rangle . \quad (897)$$

- U **limesu kada valni paketi teže δ -funkcijama** koncentriranim oko 3-impulsa \vec{p}_1 i \vec{p}_2 , $\phi_i(\vec{k}_i) \rightarrow (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_i - \vec{k}_i)$, izraz (897) teži k

$$\left(\prod_{i=1,2} \frac{i}{p_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \right)_{out} \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T \{ \phi(x_3) \dots \} | \Omega \rangle . \quad (898)$$

Stanje $\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 |$ je jednako **"out" stanju** definiranom poglavlju 3.5 (vidi jednadžbe (683) i (682) i tekst uz njih): u limesu kada promatrački sustav ide u $t \rightarrow +\infty$ sadrži čestice koje se nalaze u jako razdvojenim valnim paketima.

- Primjenom **iste analize na koordinate polja u dalekoj prošlosti**, dobijamo izraz za najsingularniji član amplitude (894) u energijama p_i^0 , koje odgovaraju vremenskim koordinatama $x_i^0 < T_-$. U **limesu kada valni paketi ulaznih polja postaju δ -funkcije** dobija se **"in" stanje** na isti način kao što smo za polja iz polja sa velikim vremenima dobili "out" stanje. U tom limesu ukupni **najsingularniji član** u amplitudi (894) glasi

$$\left(\prod_{i=1, \dots, n} \frac{i}{p_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \right) \left(\prod_{j=1,2} \frac{i}{k_j^2 - m_j^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \right)_{out} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | - \vec{k}_1 - \vec{k}_2 \rangle_{in} . \quad (899)$$

Zadnji faktor u (899) nije ništa drugo nego **S matični element**.

-Time smo pokazali da **vodeći singularitet** u p_i^0 koordinatama u "valno-paketnom" Fourier transformatu amplitude (894) po koordinatama svih polja proporcionalan **S matičnom elementu** u limesu kada valni paketi u Fourierovom transformatu teže δ -funkcijama impulsa p_i koji se javljaju u Fourierovom transformatu.

Mogućnost zaobilaženja upotrebe valnih paketa - LSZ formula

- U gornjoj proceduri za nalaženje S matričnog elementa smo prvo proveli integraciju u Fourierovom transformatu korelacijske funkcije $n+2$ polja sa valnim paketima, a onda smo pustili da valni paketi teže δ -funkcijama. Bilo bi puno zgodnije kada bi se **prvo mogao provesti limes u kojem valni paketi teže δ -funkcijama a onda provesti običan Fourierov transformat i onda izvući dominantne singularne članove**. Pokazuje se da je to moguće. To vodi na tzv. **LSZ redukcijску formulu**, koja daje preciznu vezu između Fourierovog transformata korelacijske funkcije i S matričnog elementa,

$$\prod_1^n \int d^4x_i e^{ip_i \cdot x_i} \prod_1^m \int d^4y_i e^{-ik_i \cdot y_i} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle$$

$$\underset{\substack{p_i^0 \rightarrow +E_{\vec{p}_i} \\ k_j^0 \rightarrow +E_{\vec{k}_j}}}{\sim} \left(\prod_{i=1}^n \frac{i\sqrt{Z}}{p_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^2 \frac{i\sqrt{Z}}{k_j^2 - m_j^2 + i\varepsilon} \right) \text{out} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | -\vec{k}_1 - \vec{k}_2 \rangle_{\text{in}} .$$

(900)

Z je faktor renormalizacije jakosti polja - isti faktor koji se javlja kao reziduum jednočestičnog pola u korelacijskoj funkciji dva polja. Svaki tip polja (tip polja odgovara česticama koje grade polje) ima zasebni faktor Z . Za polja sa spinom se uz faktor \sqrt{Z} javlja i polarizacijski faktor $u^s(p)$. Po polarizacijama se mora sumirati u drugom redu formule (900).

(Neperturbativno) izračunavanje S matričnog elementa preko LSZ formule

Iz onoga što smo naučili slijedi procedura za (neperturbativno) izračunavanje matričnog elementa preko LSZ formule:

1. Izračuna se Fourierov transformat korelacijske funkcije (određenog broja polja).
2. Pogleda se limes u su kojem vanjske čestice blizu masene ljuske ($p_i^2 \rightarrow 0$).
3. Koeficijent uz višestruki pol identificira se sa S matričnim elementom.
4. Za polja sa spinom dodaje se polarizacijski vektor za svaku česticu, da bi se isprojiciralo dano spinsko stanje.

LSZ formula preko Feynmanovih dijagrama

- Slijedeći cilj nam je izraziti gornju proceduru nalaženja S matrice preko Feynmanovih dijagrama.

- Analizu ćemo ilustrirati na korelacijskoj funkciji za 4 polja i S matričnim elementom za raspršenje 2 čestice \rightarrow 2 čestice.

- Razmatrat ćemo doprinose samo potpuno povezanih dijagrama. Nepovezani dijagrami se mogu zanemariti jer oni nemaju strukturu singulariteta kao u (900). (jedan S matrični element puta singulariteti vanjskih nogu — ili se ne javljaju singulariteti vanjskih nogu

(vakuumski dijagrami) ili se S matrični element može napisati kao produkt dva ili više faktora).

- Točna korelacijska funkcija 4 polja,

$$\prod_1^2 \int d^4 x_i e^{ip_i \cdot x_i} \prod_1^2 \int d^4 y_i e^{-ik_i \cdot y_i} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) | \Omega \rangle, \quad (901)$$

ima opći oblik prikazan na Sl. 3 (7.4). Dijagramatske korekcije vanjskih linija su eksplicite naznačene. Sjenčani krug u sredini predstavlja sumu svih **amputiranih korelacijskih funkcija** 4 polja.

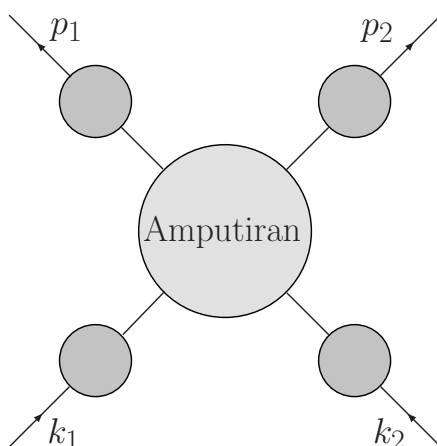


Figure 6: 7.4 Struktura točne korelacijske funkcije 4 skalarna polja

Analiza perturbativnih korekcija vanjskih linija

- Označimo sa $-iM^2(p^2)$ sumu svih jednočestično ireducibilnih umetaka u skalarni propagator

$$-iM^2(p^2) = \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \dots = \text{---} \text{1PI} \text{---} . \quad (902)$$

- Ukupni propagator može se napisati kao geometrijski red

$$\begin{aligned} \text{---} \text{Amputiran} \text{---} &= \text{---} + \text{---} \text{1PI} \text{---} + \text{---} \text{1PI} \text{---} \text{1PI} \text{---} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-iM^2(p^2)) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)} . \end{aligned} \quad (903)$$

- Fazna konvencija (902) osigurava da pozitivnan $M^2(p^2)$ daje pozitivan doprinos skalarnoj masi.

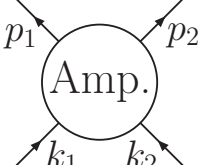
- Prema (883) svaki se ukupni propagator ima dominantni član oblika

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)} \underset{p^0 \rightarrow E_{\vec{p}}}{\sim} \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + (\text{regularni člano}) . \quad (904)$$

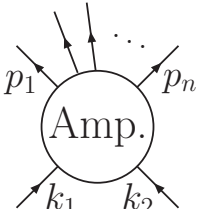
Stoga dominantni član sume dijagrama sadrži član s četiri pola,

$$\frac{iZ}{p_1^2 - m^2} \frac{iZ}{p_2^2 - m^2} \frac{iZ}{p_3^2 - m^2} \frac{iZ}{p_4^2 - m^2} . \quad (905)$$

- Uspoređujući tu strukturu sa LSZ formulom za korelacijsku funkciju (900) nalazimo da se S -matrični element može preko Feynmanovih dijagrama napisati kao amputirana povezana korelacijska funkcija pomnožena za faktorom $(\sqrt{Z})^4$

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | S | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = (\sqrt{Z})^4 \times \text{Amp.} . \quad (906)$$


- Analogna analiza za Fourierov transformat korelacijske funkcije $n + 2$ polja u općoj teoriji polja daje sljedeći prikaz S -matrični element za raspršenje 2 čestice u n čestica preko Feynmanovih dijagrama,

$$\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | S | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = (\sqrt{Z})^{n+2} \times \text{Amp.} . \quad (907)$$


- Formula (907) se podudara sa formulom (731) odnosno (730) do na dodatne renormalizacijske faktore \sqrt{Z} . Ti faktori se ne javljaju u najnižem redu računa smetnje, ali su bitni u višim redovima računa smetnje. **Time smo ispunili zadatak koji smo si postavili: potvrdili smo ispravnost formule (731) odnosno (730).**

Uočimo nadalje:

- Ako su čestice/polja koje ulaze/izlaze u područje međudjelovanja različite svaka ima svoj (drugačiji) **renormalizacijski faktor** \sqrt{Z} .

- Ako čestice imaju **spin** javlja se dodatni **polarizacijski faktor** $u^s(p)$ za svaku česticu.

- Primjetite da S matrica

a. **ne sadrži vakuumske dijagrame** (dijagrame koji nemaju vanjskih linija)

b. **ne sadrži "punoglavac" dijagrame** – informacija o njima sadržana je u faktoru \sqrt{Z} , što se i tvrdilo kada predložili formulu za S matricu (731).

5 Radijativne korekcije : Osnove II

5.1 Pregled tema i pojmova

U ovom poglavlju ćemo navesti osnovne divergentne QED dijagrame s jednom petljom: **vršni dijagram**, **dijagram korekcije vanjske linije** (ili self-energy dijagram), i **dijagram vakuumske polarizacije**. Analizirat ćemo divergentne dijagrame koji se javljaju zbog nisko-energetskih fotona (**infra-crvene divergencije**; engl. infra red (**IR**) divergencies). Pri tome ćemo naučiti da niti jedan eksperimentalni uređaj ne može detektirati sve fotone (općenito nisko energetske čestice), već da postoji neki **energetski prag** ispod kojeg detektor ne detektira čestice. Svi doprinosi koji se ne mjere moraju se teorijski uključiti pri usporedbi s eksperimentano mjerenim fizikalnim veličinama. Izračunat ćemo zatim te IR divergentne dijagrame upotrebljavajući **regularizaciju uvodeći za foton vrlo malu masu**. Pri tome ćemo naučiti kako se emisija mekanih (nisko-energetskih) fotona iz vanjskih linija može uvijek prikazati kao jedan **dodatni faktor osnovnoj amplitudi**, naučit ćemo da se mekani fotoni ispod eksperimentalnog praga specifičnog za dani eksperimentalni uređaj ne može opaziti, susrest ćemo se sa pojmom **Sudakovih dvostrukih logaritama**. Analizirat ćemo u detalje vršni dijagram. Prvo ćemo naći nje-govu **form faktorsku strukturu iz simetrija QED** (Lorentz, baždarana i paritetna invarijantnost). U tu svrhu ćemo se morati malo upoznati i sa **pojmom pariteta**. Zatim ćemo analizirati visoko-energetske divergencije (tzv. **ultra-violetne divergencije** ili **UV divergencije**) vršnog dijagrama. Tu ćemo se upoznati sa **Feynmanovom parametrizacijom** nazivnika u Feynmanovim dijagramima, **Wickovom rotacijom**, **prostornim kutom u d -dimezijskom prostoru**, **Pauli-Villars-ovom regularizacijom** UV divergencija, primjeniti prvi puta (ad-hoc) **renormalizaciju** divergentnog izraza, naći **anomalni magnetski moment fermiona** u najnižem redu računa smetnje kao što je to napravio Schwinger 1948. Zatim ćemo analizirati i **IR divergencije virtualnog fotona** u vršnom dijagramu. Pokazat ćemo da mekani virtualni foton daje samo dodatni faktor fizikalnoj veličini (udarnom presjeku), koji ima istu divergentnu strukturu kao faktor koji se javlja pri emisiji mekanog fotona. Pokazat ćemo da se **doprinosi virtualnog fotona i emisije mekanih fotona krate**, ostavljajući konačni doprinos s konačnim Sudakovim dvostrukim logaritmima, koji ovisi o najnižoj energiji koju eksperimentalni uređaj može detektirati. Zatim ćemo pokazati kako se **dominantne IR divergencije krate u bilo kojem redu računa smetnje**. Tu ćemo naučiti kako se mogu **kombinirati sve permutacije emisije uzastopnih realnih mekanih fotona** u jednostavniji izraz. Sličnu analizu ćemo napraviti i za virtualne fotone. Kombiniranjem tih izraza naći ćemo dominantne IR korekcije bilo kojeg broja realnih i virtualnih fotona, pokazati da se sve divergencije krate i dobiti **reinterpretaciju značenja amplitude emisije mekanog fotona** – ne kao vjerojatnosti emisije jednog mekanog fotona, već kao kao očekivani broj izračenih fotona.

U podpoglavlju 5.8 ćemo potvrditi neperturbativne rezultate analitičke strukture propagatora: postojanje pola i reza propagatora na primjeru ireducibilne korelacijske funkcije dvaju fermionskih polja, Σ . Izračunat ćemo Σ u najnižem redu računa smetnje, Σ_2 , i

regularizirati njenu divergeniju Pauli Villarsovom metodom. Analizirat ćemo njenu analitičku strukturu i naći rez i pol Σ_2 u varijabli p^2 . Naći ćemo formalni izraz za ukupnu korelacijsku funkciju dvaju fermionskih polja izražen je preko Σ . Dobit ćemo izraz za fizikalnu masu m i renormalizaciju fermionske valne funkcije Z_2 . Naći ćemo eksplicitni izraz za korekciju mase δm i faktor renormalizacije valne funkcije Z_2 u najnižem redu računa smetnje. Pokazat ćemo da je u tom redu $\delta F_1(0) + Z_2 = 0$, što ćemo kasnije pokazati da je posljedica Wardovog identiteta.

U potpoglavlju 5.9 ćemo pokazati da relacija $\delta F_1(0) + Z_2 = 0$ vodi na jednakost između renormalizacijskog faktora valne funkcije Z_2 i renormalizacijskog faktora vrha Z_1 : $Z_1 = Z_2$. Također ćemo opravdati prvu ad hoc renormalizaciju vršnog form faktora $F_1(q^2) \rightarrow F_1(q^2) - F_1(0)$.

U podpoglavlju 5.10 ćemo analizirati posljedice optičkog teorema. Prvo ćemo neperutativno, iz unitarnosti S matrice izvesti poopćeni optički teorem. Iz njega kao specijalni slučaj kada su početno i konačno stanje jednaka slijedi optički teorem. Iz optičkog teorema slijedi veza između imaginarnog dijela $2 \rightarrow 2$ amplitude raspršenja i totalnog udarnog presjeka $2 \rightarrow$ bilo što. Analizom optičkog teorema za amplitude dobivene preko Feynmanovih dijagrama naći ćemo diskontinuitet preko reza u jednoj od Mandelstamovih varijabli. Uvest ćemo Cutkoskijeva pravila za izračunavanje takvih diskontinuiteta i na primjeru pokazati da daju isti rezultat kao direktni račun iz amplitude. Zatim ćemo analizirati maseni pol za nestabilne čestice i upotrebom optičkog teorema dokazati formulu za širinu raspada koju smo prije uveli ad hoc.

U podpoglavlju 5.11 dokazat ćemo Ward-Takahashijev identitet za opću amplitudu u QED. Wardov identitet se iz njega dobija u limesu kada impuls razmatranog fotona teži k nuli. Primjenom Ward-Takahashijevog identiteta za amplitudu vrha u limesu kada impuls teži k nuli dokazat ćemo jednakost $Z_1 = Z_2$ u bilo kojem redu računa smetnje.

Podpoglavlje 5.12 posvećeno je renormalizaciji električnog naboja. Naći ćemo form faktorsku strukturu ireducibilne amplitude vakuumske energije $\Pi_{\mu\nu}(q)$ rabeći Wardov identitet – sadrži samo jedan form faktor $\Pi(q^2)$. Naći ćemo strukturu ukupne amplitude vakuumske energije. Pokazat ćemo da je foton bezmasen i kada međudjeluje. Naći ćemo faktor renormalizacije fotonske valne funkcije. Uvest ćemo pojam renormaliziranog naboja. Naći ćemo izraz za renormalizirani naboj preko form faktora $\Pi(q^2)$. Izračunat ćemo $\Pi_{\mu\nu}(q)$ u najnižem redu računa smetnje. Da bismo to napravili morat ćemo se upoznati sa: dimenzijskom regularizacijom, svojstvima Γ funkcije, regularizacijskom skalom u dimenzijskoj regularizaciji, tenzorskim integralima u D dimenzija, γ_μ matricama u D dimenzija i nekim tipičnim integralima u D dimenzija. Nakon što izračunamo $\Pi(q^2)$ naći ćemo eksplicitni izraz za faktor renormalizacije fotonske valne funkcije i ujedno faktor renormalizacije naboja Z_3 . Naći ćemo i izraz za renormalizirani form faktor $\Pi(q^2)$, $\hat{\Pi}(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0)$. Naći ćemo imaginarni dio $\hat{\Pi}(q^2)$ i pokazati da je povezan s udarnim presjekom za Bhabba raspršenje. Naći ćemo modifikaciju Coulombovog potencijala u NR limesu, iz aproksimativnog izraza za nju naći pomak u energiji s stanja vodikovog atoma zbog vakuumske polarizacije, a iz točnijeg izraza za nju pokazati da se naboj povećava sa smanjenjem radijusa. Naći ćemo i $\hat{\Pi}(q^2)$ u limesu $-q^2 \gg m^2$ i pokazati da električni

naboj raste s povećanjem energije fotona.

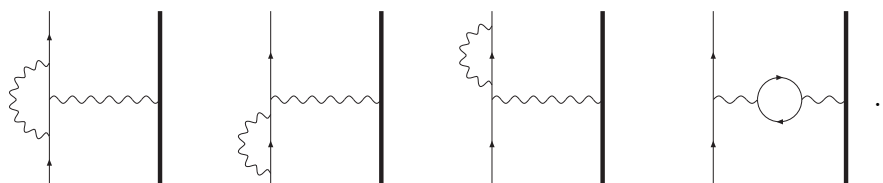
5.2 Uvod u radijativne korekcije

Na česticama upoznali sa drvastim dijagramima, dijagramima bez petlji, pa njih ovdje nećemo raditi, osim kroz domaće zadaće. Ovdje ćemo raditi na radijativnim korekcijama spomenutih drvastih dijagrama. Radijativne korekcije se javljaju bilo kao korekcije zbog dodatnih petlji (vidi jed. (909)), bilo kao korekcije zbog emisije dodatnih fotona u osnovnom drvastom procesu (tzv. zakočno zračenje). Vidjet ćemo da se petlja-procesi i procesi s emisijom dodatnih fotona ne mogu razmatrati odvojeno.

Ilustraciju radijativnih korekcija napraviti ćemo na najjedostavnijem primjeru – raspršenju elektrona na mionu. Dijagram koji odgovara najnižem redu razvoja u EM konstanti razvoja e je


(908)

U idućem redu razvoja po $\alpha = e^2/(4\pi)$ postoje 4 UV divergentna petlja-dijagrama.


(909)

Korekcija udarnom presjeku reda $\alpha = e^2/(4\pi)$ dolazi od interferencijskih članova između drvastog dijagrama i petlja-dijagrama iz jedn. (909). Korekcije za mion nisu uključene. Naime kako je mion mnogo teži od elektrona, to znači da se on puno sporije akcelerira kada elektromagnetsko polje djeluje na njega, pa stoga možemo zanemariti radijativne korekcije samoga miona spram radijativnih korekcija elektrona.

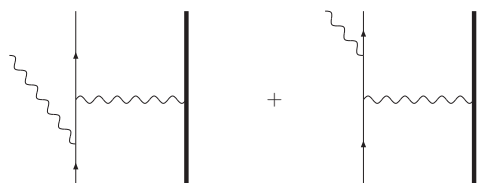
Prvi dijagram, tzv. vršni dijagram (ili dijagram vrha) daje najveći broj dodatnih efekata. On je i IR i UV divergentan, izvor je anomalnog magnetskog momenta elektrona.

Iduća dva dijagrama su tzv. korekcije vanjske (fermionske) linije (self-energy dijagram) su UV i IR divergentna. U podpoglavlju 5.9 ćemo pokazati da se divergencije self-energy dijagrama i vršnog dijagrama krata, što potvrđuje Wardov identitet na nivou jedne petlje i postupak renormalizacije oduzimanjem od formfaktora $F_1(q^2)$ njegovu vrijednost u $q^2 = 0$, $F_1(0)$. Tada ćemo naučiti i kako se renormalizira fermionski propagator.

Četvrti dijagram, tzv. dijagram vakuumske polarizacije, je UV divergentan. Njega ćemo razmatrati u podpoglavlju 5.12. Zbog Wardovog identiteta on daje jedini doprinos

renormalizaciji električnog naboja. Za njegovu regularizaciju uvest ćemo dimenzionalnu regularizaciju, i metode izračunavanje integrala petlji u $D \neq 4$ dimenzija.

Pored petlja-dijagramatskih radijativnih korekcija $e - \mu$ raspršenje ima i radijativne korekcije zbog emisije nisko-energetskih (mekanih) fotona danih sljedećim dijagramima zakočnog zračenja,



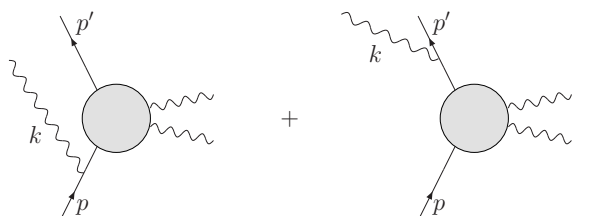
$$(910)$$

Ti dijagrami su divergentni u limesu kada impuls fotona teži k nuli. Takvi se fotoni ne mogu opaziti nikakvim detektorom, pa se sve pripadne amplitude moraju dodati osnovnoj drvastoj amplitudi pri usporedbi eksperimenta sa teorijskim izrazom za udarni presjek.

Glavni zadatak podpoglavlja 5.3-5.7 ovog poglavlja je analiza mekanog zakočnog zračenja i nisko-energetskih vršnih petlja-doprinosa, te dokaz kraćenja IR doprinosa tih dijagrama.

5.3 Mekano zakočno zračenje

Razmatramo proces emisije mekanog fotona tokom raspršenja elektrona



$$(911)$$

Neka \mathcal{M}_0 označava dio koji dolazi zbog međudjelovanja elektrona s vanjskim poljem. Tada amplitudu ukupnog procesa možemo napisati

$$i\mathcal{M} = -ie\bar{u}(p') \left(\mathcal{M}_0(p', p - k) \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p - k)^2 - m^2} \gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(k) + \gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(k) \frac{i(\not{p}' + \not{k} + m)}{(p' + k)^2 - m^2} \mathcal{M}_0(p' + k, p) \right) u(p). \quad (912)$$

Nas interesiraju mekani fotoni za koje vrijedi $|\vec{k}| \ll |\vec{p}' - \vec{p}|$. U tom limesu vrijedi

$$\mathcal{M}_0(p', p - k) \approx \mathcal{M}_0(p' + k, p) = \mathcal{M}_0(p', p), \quad (913)$$

i može se zanemariti \not{k} u brojnicima elektronskog propagatora. Brojnici se mogu još više pojednostavniti upotrebom Diracovih jednadžbi,

$$\begin{aligned} (\not{p} + m)\gamma^\mu \varepsilon_\mu^* u(p) &= (2p^\mu \varepsilon_\mu^* + \gamma^\mu \varepsilon_\mu^* (-\not{p} + m))u(p) = 2p^\mu \varepsilon_\mu^* u(p), \\ \bar{u}(p')\gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(\not{p}' + m) &= \bar{u}(p')2p'^\mu \varepsilon_\mu^*. \end{aligned} \quad (914)$$

Nazivnici se pojednostavljaju upotrebom relacija $p^2 = p'^2 = m^2$,

$$(p - k)^2 - m^2 = -2p \cdot k, \quad (p' + k)^2 - m^2 = 2p' \cdot k. \quad (915)$$

Tako dobijamo aproksimativan izraz za amplitudu (912) u aproksimaciji mekih fotona,

$$i\mathcal{M} = \underbrace{\bar{u}(p')[\mathcal{M}_0(p', p)]u(p)}_{\equiv \tilde{\mathcal{M}}_0(p', p)} \times \left[e \left(-\frac{2p \cdot \varepsilon^*}{2p \cdot k} + \frac{2p' \cdot \varepsilon^*}{2p' \cdot k} \right) \right]. \quad (916)$$

Prvi faktor predstavlja elastično raspršenje elektrona na vanjskom polju (bez mekanog zakočnog zračenja). Drugi faktor dolazi zbog zakočnog zračenja mekog fotona.

Udarni presjek za razmatrani proces može se izraziti preko udarnog presjeka za elastično raspršenje elektrona na vanjskom polju $d\sigma(p \rightarrow p')$, dodatnog faznog faktora zbog emisije (mekanog) fotona i kvadrata drugog faktora zbog zakočnog zračenja mekog fotona,

$$\begin{aligned} d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma) &= \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k} (2\pi)^4 \delta^4(p - p' - q) \\ &\times \overline{|\tilde{\mathcal{M}}_0(p', p)|} \sum_{\lambda=1,2} \left| e \left(-\frac{2p \cdot \varepsilon^*}{2p \cdot k} + \frac{2p' \cdot \varepsilon^*}{2p' \cdot k} \right) \right|^2 \\ &= d\sigma(p \rightarrow p') \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k} \sum_{\lambda=1,2} \left| e \left(-\frac{2p \cdot \varepsilon^*}{2p \cdot k} + \frac{2p' \cdot \varepsilon^*}{2p' \cdot k} \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (917)$$

Drugi faktor u (917) (za sada) interpretiramo kao integral diferencijalne vjerojatnosti (P) emisije (mekog) fotona impulsa k za $e(p) \rightarrow e(p')$ raspršenje na vanjskom polju. Taj se izraz može pojednostaviti primjenom zamjene (809) koja vrijedi zbog Wardovog identiteta,

$$\begin{aligned} dP &= \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k} \sum_{\lambda=1,2} \left| e \left(-\frac{2p \cdot \varepsilon^*}{2p \cdot k} + \frac{2p' \cdot \varepsilon^*}{2p' \cdot k} \right) \right|^2 \\ &= \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k} e^2 (-1) \left(\frac{p'}{p' \cdot k} - \frac{p}{p \cdot k} \right)^2. \end{aligned} \quad (918)$$

Rabeći

$$\begin{aligned} p' \cdot k &= E'(k - \frac{\vec{p}'}{E'} \vec{k}) = E'k(1 - \vec{v}' \hat{k}), \\ p \cdot k &= Ek(1 - \vec{v} \hat{k}), \\ p' \cdot p &= EE'(1 - \vec{v} \vec{v}'), \end{aligned} \quad (919)$$

te odabirući inercijalni sustav u kojem je $E = E'$, za diferencijalnu vjerojatnost dobijamo

$$dP = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{2k} \left(-\frac{m^2}{E'^2 k^2 (1 - \vec{v}' \hat{k})^2} - \frac{m^2}{E^2 k^2 (1 - \vec{v} \hat{k})^2} + \frac{2EE'(1 - \vec{v} \vec{v}')}{EkE'k(1 - \vec{v}' \hat{k})(1 - \vec{v} \hat{k})} \right)$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{E=E'} \frac{k^2 dk d\Omega_k}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{2k^3} \left(-\frac{m^2/E^2}{(1-\vec{v}'\hat{k})^2} - \frac{m^2/E^2}{(1-\vec{v}\hat{k})^2} + \frac{2(1-\vec{v}\vec{v}')}{(1-\vec{v}'\hat{k})(1-\vec{v}\hat{k})} \right) \\ &\xrightarrow{\int d\Omega_k} \underbrace{\frac{e^2}{(2\pi)^2}}_{\alpha/\pi} \frac{dk}{k} I(\vec{v}, \vec{v}') , \end{aligned} \quad (920)$$

gdje je

$$I(\vec{v}, \vec{v}') = \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \left(\frac{2(1-\vec{v}\vec{v}')}{(1-\vec{v}'\hat{k})(1-\vec{v}\hat{k})} - \frac{m^2/E^2}{(1-\vec{v}'\hat{k})^2} - \frac{m^2/E^2}{(1-\vec{v}\hat{k})^2} \right). \quad (921)$$

S izrazom za $d\sigma$ i dP imamo sljedeće probleme:

1. Integracija po dk vrijedi samo u aproksimaciji mekog fotona. Zbog toga ne možemo integrirati do beskonačnosti, već samo do neke razumne **gornje granice**, koju uzimamo da je $|\vec{q}| = |\vec{p} - \vec{p}'|$. Time ukupna vjerojatnost emisije jednog fotona postaje

$$P_{tot} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{|\vec{q}|} \frac{dk}{k} I(\vec{v}, \vec{v}'). \quad (922)$$

Kasnije ćemo vidjeti da gornju granicu \vec{q} treba zamijeniti s energijom E_ℓ ispod koje eksperimentalni uređaj ne može detektirati fotone.

2. Izraz $I(\vec{v}, \vec{v}')$ je neovisan o k , pa stoga integral divergira kada $k \rightarrow 0$, tj. ukupna vjerojatnost emisije mekog fotona je beskonačna. To je **problem** tzv. **IR (infra-crvene)** divergencije u QED. Problem IR divergencije se može riješiti uvodeći umjetno donju granicu integrala, npr. zamišljajući da **foton ima malu masu** μ (Općenito postupak pretvaranja beskonačnog integrala/izraza u konačni zove se **regularizacija** integrala/izraza),

$$\int_0^{|\vec{q}|} \frac{dk}{k} \rightarrow \int_\mu^{|\vec{q}|} \frac{dk}{k} = \ln \frac{|\vec{q}|}{\mu} = \frac{1}{2} \ln \frac{|\vec{q}|^2}{\mu^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{-q^2}{\mu^2}. \quad (923)$$

IR divergencija u (923) se javlja zbog malog $q^2 (= \mu^2)$ u donjoj granici.

Prvi korak u (923) je regularizacija izraza – kako je masa fotona μ , k koji shvaćamo kao energiju fotona mora biti veći od μ . Zadnji korak uzima u obzir da smo izabrali sustav u kojem je $E = E'$ (sada $E \approx E'$) pa je $(p - p') = (0, \vec{p} - \vec{p}')$.

Rabeći (923) za udarni presjek (917) dobijamo

$$d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma(k)) = d\sigma(p \rightarrow p') \times \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} I(\vec{v}, \vec{v}'). \quad (924)$$

Da bismo dobili zatvoren izraz **moramo analizirati integral** $I(\vec{v}, \vec{v}')$.

3. Treći problem koji se javlja je **interpretacija diferencijala** dP kao vjerojatnosti

emisije jednog mekog fotona. Vidjet ćemo kasnije da je ispravno interpretirati dP kao **diferencijal očekivanog broja mekih fotona**.

Vratimo se **problemu analize integrala** $I(\vec{v}, \vec{v}')$, koji je potreban za nalaženje zatvorenog izraza za $d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma(k))$.

- Za male brzine \vec{v} i \vec{v}' izraz je konvergentan.

- Za $|\vec{v}|, |\vec{v}'| \approx 1$ izraz divergira kada je $\hat{k} \approx \hat{v}$ ili $\hat{k} \approx \hat{v}'$. Tada se za male kuteve oko smjera \hat{v} odnosno \hat{v}' dobija glavni doprinos integralu. Stoga će u integralu po \vec{k} biti dovoljno uzeti u obzir samo doprinose \hat{k} smjerova bliske smjerovima \hat{v} odnosno \hat{v}' a druge dijelove integrala zanemariti. Primjetimo još da su u razmatranom limesu doprinosi prva dva člana u (921) zanemarivi prema trećem jer $m^2/E^2 \rightarrow 0$ odnosno $m^2/E'^2 \rightarrow 0$

- Definiramo kuteve θ za dva slučaja – kada je $\hat{k} \approx \hat{v} \approx \vec{v}$ ($\cos \theta = \hat{k}\hat{v}$) i kada je $\hat{k} \approx \hat{v}' \approx \vec{v}'$ ($\cos \theta = \hat{k}\hat{v}'$) – i integriramo od $\hat{k}\hat{v} = \hat{v}'\hat{v}$ do $\hat{k}\hat{v} = 1$ za prvi slučaj, odnosno od $\hat{k}\hat{v}' = \hat{v}\hat{v}'$ do $\hat{k}\hat{v}' = 1$ za drugi slučaj,

$$I(\vec{v}, \vec{v}') = \int_{\hat{v}'\hat{v}}^1 \frac{d \cos \theta (1 - \vec{v}'\vec{v})}{(1 - v \cos \theta)(1 - \vec{v}'\hat{v})} + \int_{\hat{v}\hat{v}'}^1 \frac{d \cos \theta (1 - \vec{v}\vec{v}')}{(1 - \vec{v}\hat{v}')(1 - v' \cos \theta)}. \quad (925)$$

Doljnje granice integracija $\cos \theta = \hat{k}\hat{v} = \hat{v}'\hat{v}$ i $\cos \theta = \hat{k}\hat{v}' = \hat{v}\hat{v}'$ nisu kritične. U prvom izrazu se kratae $1 - \hat{v}\vec{v}'$ i $1 - \vec{v}\vec{v}'$ jer su približno jednaki. Analogno se postupa u drugom integralu.

$$\begin{aligned} I(\vec{v}, \vec{v}') &\approx \left[-\frac{1}{v} \ln(1 - v \cos \theta) \right]_{\hat{v}'\hat{v}}^1 + \left[-\frac{1}{v'} \ln(1 - v' \cos \theta) \right]_{\hat{v}\hat{v}'}^1 \\ &= \ln \frac{1 - v\hat{v}'\hat{v}}{1 - |\vec{v}|} + \ln \frac{1 - v'\hat{v}\hat{v}'}{1 - |\vec{v}'|} \end{aligned} \quad (926)$$

$$\approx \ln \frac{(1 - \vec{v}\vec{v}')^2}{(1 - |\vec{v}|)(1 - |\vec{v}'|)} \quad (927)$$

$$= \ln \frac{(E^2 - \vec{p}\vec{p}')^2}{E^2(E - p)^2} = \ln \frac{(E^2 - \vec{p}\vec{p}')^2}{E(E - p)E(E - p)} \quad (928)$$

$$\approx \ln \frac{(p \cdot p')^2}{\frac{1}{4}(E^2 - p^2)^2} = 2 \ln \frac{p \cdot p'}{m^2/2} \approx 2 \ln \frac{-q^2}{m^2}. \quad (929)$$

U trećem retku (1068) smo rabili $v, v' \approx 1$. U četvrtom (928) smo izraz prikazali preko energija i impulsa. U zadnjem retku (929) rabimo $E \approx \frac{1}{2}(E+p)$, i $2p \cdot p' \approx -q^2$. Napomena: u gornjem računu javlja se "kolinearna divergencija" (?).

Uvrštavajući rezultat za $I(\vec{v}, \vec{v}')$ (929) u (924) dobijamo izraz za diferencijalni udarni presjek

$$d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma(k)) \stackrel{-q^2 \rightarrow \infty}{\approx} d\sigma(p \rightarrow p') \times \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \ln \frac{-q^2}{m^2}. \quad (930)$$

Ovisnost $d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma(k))$ o q^2 poznata je kao Sudakov-ljev dvostruki logaritam i ona je fizikalna. Ovisnost o μ je problem. Taj problem ćemo riješiti poslije kada ćemo pokazati da se divergentni doprinosi mekanog zakročnog zračenja i mekih virtualnih fotona krate.

5.4 Struktura elektronske funkcije vrha

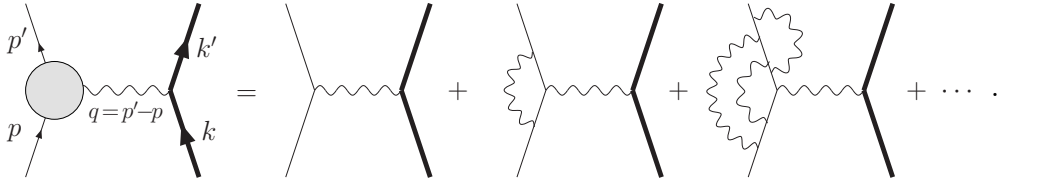
Sada ćemo proučavati korekciju elektronske vršne funkcije zbog dodatnog virtualnog fotona,


(931)

Tu se prvi puta susrećemo sa Feynamovim dijagramom koji sadrži petlju.

Račun pripadne amplitude je kompliciran i zato je jako dobro proanalizirati opća svojstva, odnosno strukturu vrha na osnovi simetrija QED: Lorentzove invarijantnosti, diskretnih simetrija (P , T , C) i Wardovog identiteta. Te simetrije jako ograničavaju oblik vrha.

Razmotrimo sljedeću klasu dijagrama


(932)

Sivi krug predstavlja sumu doprinosa najnižeg reda raspršenja i svih mogućih amputiranih korekcija elektronsko-fotonskog vrha. Označit ćemo tu sumu sa

$$-ie\Gamma^\mu(p', p) . \quad (933)$$

Prema jednadžbi (730) odnosno (731) amplitudu raspršenja elektrona na teškoj meti možemo pisati

$$i\mathcal{M} = ie^2\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p', p)u(p)\frac{1}{q^2}\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k) . \quad (934)$$

U analizi je izostavljen dijagram vakuumske polarizacije. On predstavlja korekciju EM polja, a ne korekciju na elektronski odgovor na elektromagnetsko polje, koji nas interesira i koji je uključen u (934) i konačni rezultat (937).

Funkcija $\Gamma^\mu(p', p)$ se također javlja u S matričnom elementu raspršenja elektrona na vanjskom elektromagnetskom polju. Kako ćemo taj slučaj trebati poslije i njega ovdje analiziramo. Hamiltonijan međudjelovanja za taj proces glasi

$$\Delta H_{int} = \int d^4x e A_\mu^c j^\mu , \quad (935)$$

gdje je $j_\mu(x)$ elektromagnetska struja, a A_μ^{cl} vremenski neovisni i prostorno slabo ovisni klasični potencijal. U vodećem redu računa smetnje S matrični element glasi

$$i\mathcal{M}(2\pi)\delta(p'^0 - p^0) = -ie\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p), \quad (936)$$

gdje je $\tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p)$ Fourieov transformat polja $A_\mu^{cl}(x)$. Korekcija vrha (odnosno viši redovi računa smetnje $e - e - \gamma$ vrha) modificiraju (936) tako da se umjesto γ^μ matrice javlja $\Gamma^\mu(p', p)$,

$$i\mathcal{M}(2\pi)\delta(p'^0 - p^0) = -ie\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p', p)u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p). \quad (937)$$

Primjetimo da su izostavljeni doprinosi dijagrama vakuumske polarizacije. Oni predstavljaju korekciju EM polja a ne korekciju na odgovor elektrona na elektromagnetsko polje koji nas ovdje zanimaju.

O paritetu

Prije nego počnemo s analizom $\Gamma^\mu(p', p)$ na osnovi simetrija teorije moramo navesti neka svojstva paritetne transformacije.

1. Paritetna transformacija u x prostoru transformira

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) \rightarrow \mathcal{P}^\mu_\nu x^\nu = (x^0, -\vec{x}), \quad (938)$$

odnosno

$$\mathcal{P}^\mu_\nu = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (939)$$

tj. mijenja predznak prostorne komponente koordinate. Analogno djeluje u p prostoru

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}) \rightarrow \mathcal{P}^\mu_\nu p^\nu. \quad (940)$$

2. U Hilbertovom prostoru se zamišlja da postoji operator $P = U(\mathcal{P})$, tako da je P zadovoljava parametarsko množenje Poincareove grupe,

$$(U(\Lambda_1, a_1)U(\Lambda_2, a_2) = U(\Lambda_1\Lambda_2, a_1 + \Lambda a_2)), \quad (941)$$

npr.

$$PU(\Lambda, a) = U(\mathcal{P})U(\Lambda, a) = U(\mathcal{P}\Lambda, \mathcal{P}a), \quad (942)$$

$$PU(\Lambda, a)P^{-1} = U(\mathcal{P})U(\Lambda, a)U(\mathcal{P}^{-1}) = U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a). \quad (943)$$

Za infinitezimalnu Poincareovu transformaciju iz (943) slijedi (vidi Dodatak 7 jedn. (1547) i (1548))

$$\begin{aligned} PiJ^{\rho\sigma}P^{-1} &= \mathcal{P}^\rho_\mu \mathcal{P}^\sigma_\nu iJ^{\mu\nu}, \\ PiP^\rho P^{-1} &= \mathcal{P}^\rho_\mu iP^\mu, \end{aligned} \quad (944)$$

gdje su $P^\mu = (H, \vec{P})$ i $J^{\mu\nu}$ generatori Lorentzovih transformacija u Hilbertovom prostoru. Konkretno za operator Hamiltonijana

$$PiHP^{-1} = iH . \quad (945)$$

P u principu može biti ili unitaran ($PiP^{-1} = i$) ili antiunitaran ($PiP^{-1} = -i$) operator i to je razlog zašto smo u relacijama (944) i (945) zadržali imaginarnu jedinicu i . Zahtjev pozitivnosti svih energetske stanja i relacija (945) pokazuje da je P unitaran, odakle

$$PHP^{-1} = H, \quad \text{odnosno} \quad [P, H] = 0 . \quad (946)$$

Drugim riječima spomenuti zahtjev vodi na komutativnost operatora Hamiltonijana i operatora pariteta.

3. Za masivna jednočestična stanja $\Psi_{p\sigma n}$ (p je 4-impuls stanja, σ je projekcija kutne količine gibanja na z os, a n su svi drugi kvantni brojevi kao npr. naboj itd.) se može pokazati (vidi Weinberg I poglavlje 2.6, str. 76-77) da vrijedi

$$P\Psi_{p\sigma n} = \eta_n \Psi_{p\sigma n} , \quad (947)$$

gdje je η faza za koju se može pokazati da je neovisna σ . Kako se svako jednočestično stanje može prikazati preko operatora stvaranja $a_{p\sigma n}^\dagger$ i vakuuma Ψ_0 , i kako je vakuum invarijantan na sve transformacije uključivši i paritet

$$\begin{aligned} \Psi_{p\sigma n} &= a_{p\sigma n}^\dagger \Psi_0 , \\ P\Psi_0 &= \Psi_0 , \end{aligned} \quad (948)$$

za operatore stvaranja i poništenja vrijedi

$$Pa_{p\sigma n}^\dagger P^{-1} = \eta_n a_{p\sigma n}^\dagger , \quad (949)$$

$$Pa_{p\sigma n} P^{-1} = \eta_n^* a_{p\sigma n} . \quad (950)$$

Druga se relacija dobija Hermitskom konjugacijom prve. Antičestice (imaju kvantne brojeve \bar{n}) bi u principu mogle imati nezavisne faze $\eta_{\bar{n}}$,

$$Pa_{p\sigma \bar{n}}^\dagger P^{-1} = \eta_{\bar{n}} a_{p\sigma \bar{n}}^\dagger , \quad (951)$$

$$Pa_{p\sigma \bar{n}} P^{-1} = \eta_{\bar{n}}^* a_{p\sigma \bar{n}} . \quad (952)$$

Faze η_n i $\eta_{\bar{n}}$ se zovu intrinzični (svojtveni) pariteti čestice n i pripadne antičestice \bar{n} .

4. Sada ćemo analizirati kako paritetna transformacija djeluje na Diracovo polje. Analogna analiza se može napraviti za druga polja. Diracovo polje u notaciji formule (487) glasi

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a_p^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_p^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right) . \quad (953)$$

Identificirajući $a_{p\sigma n} \rightarrow a_{\vec{p}}^s$, $a_{p\sigma\bar{n}}^\dagger \rightarrow b_{\vec{p}}^{s\dagger}$ i uvodeći uz to prirodnije oznake za faze u novoj notaciji $\eta_n \rightarrow \eta$, $\eta_{\bar{n}} \rightarrow \bar{\eta}$ primjenimo paritetnu transformaciju na Diracovo polje (953) i pokušajmo je izraziti preko polaznog polja $\psi(x)$,

$$\begin{aligned}
P\psi(x)P^{-1} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(\eta^* a_{-\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + \bar{\eta} b_{-\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right) \\
&= \eta^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s u^s(\mathcal{P}p) e^{-i\mathcal{P}p \cdot x} + \eta \bar{\eta} b_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(\mathcal{P}p) e^{i\mathcal{P}p \cdot x} \right) \\
&= \eta^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s \gamma^0 u^s(p) e^{-ip \cdot \mathcal{P}x} - \eta \bar{\eta} b_{\vec{p}}^{s\dagger} \gamma^0 v^s(p) e^{ip \cdot \mathcal{P}x} \right) \\
&= \eta^* \gamma^0 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot \mathcal{P}x} - \eta \bar{\eta} b_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot \mathcal{P}x} \right). \quad (954)
\end{aligned}$$

U prvom retku smo primijenili jednadžbe (950) i (951) na operatore $a_{\vec{p}}^s$ i $b_{\vec{p}}^{s\dagger}$ u Diracovom polju. U drugoj smo izlučili η^* iz polja i napravili zamjenu varijabli $\mathcal{P}p = p' \rightarrow p$. U trećoj smo u eksponentima prebacili \mathcal{P} za p na x rabeći Lorentz invarijantnost i upotrijebili jednakosti

$$\begin{aligned}
u(\mathcal{P}p) &= \gamma^0 u(p), \\
v(\mathcal{P}p) &= -\gamma^0 v(p). \quad (955)
\end{aligned}$$

koje slijede iz izraza za slobodna rješenja Diracove jednadžbe u impulsnom prostoru (386) i (387) relacija $\sigma_\mu p^\mu = \bar{\sigma}_\mu(\mathcal{P}p)^\mu$ i eksplicitnog izraza za γ^0 matricu (292) (sve u kiralnoj reprezentaciji γ^μ matrica).

DZ. Provjerite relacije (955).

U četvrtom retku smo izlučili γ^0 iz polja. Kada ne bi bilo faze $-\eta\bar{\eta}$ polja (953) i (954) bi bila proporcionalna. Faza $\eta\bar{\eta}$ bi promijenila antikomutacijske relacije originalnog polja (953) tako da se ona ne smije javljati (Preciznije, zbog komutacijskih relacija niti jedna transformacija polja ne smije mijenjati relativne faze dijelova polja). Zbog toga nužno vrijedi sljedeća relacija između intrističnih pariteta

$$\eta\bar{\eta} = -1. \quad (956)$$

Drugim riječima fermionska čestica i pripadna antičestica nužno imaju suprotne paritete. Time (954) postaje jednaka

$$P\psi(x)P^{-1} = \eta^* \gamma^0 \psi(\mathcal{P}p). \quad (957)$$

Primjetimo još da iz jednadžbi (955) slijedi

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\mathcal{P}p) &= \bar{u}(p) \gamma^0, \\
\bar{v}(\mathcal{P}p) &= -\bar{v}(p) \gamma^0. \quad (958)
\end{aligned}$$

Time se paritetna transformacija struja $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$, $\Gamma = 1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu\gamma_5, \gamma_5$ efektivno svodi na "paritetnu transformaciju" Γ matrica

$$\Gamma \rightarrow \gamma^0\Gamma\gamma^0. \quad (959)$$

Pri toj transformaciji predznak ne mijenjaju matrice $1, \gamma^0, \sigma^{ij}, \gamma^i\gamma_5$, dok matrice $\gamma^i, \sigma^{0i}, \gamma^0\gamma_5$ i γ_5 mijenjaju predznak.

Simetrije i oblik $\Gamma^\mu(p, p')$ vrha

Sada ćemo primjeniti simetrije QED da bismo ograničili oblik $\Gamma^\mu(p', p)$.

1. U najnižem redu računa smetnje je

$$\Gamma^\mu(p, p') = \gamma^\mu. \quad (960)$$

2. Lorentzova simetrija dozvoljava zavisnost $\Gamma^\mu(p, p')$ o p, p', γ^μ te o fizikalnim parametrima m i e

$$\Gamma^\mu = \Gamma^\mu(p, p', \gamma^\mu; m, e). \quad (961)$$

3. Paritetna invarijantnost struje zahtjeva da se struja $\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p, p')u(p)$ transformira na sljedeći način

$$\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p, p')u(p) \rightarrow \bar{u}(p')(\Gamma^0(p, p'), -\Gamma^i(p, p'))u(p). \quad (962)$$

Kombinacija Lorentzove i paritetne invarijantnosti dozvoljava sljedeće strukture u $\Gamma^\mu(p, p')$ (Weinberg str. 454)

$$\begin{aligned} & p^\mu, p'^\mu, \\ & \gamma^\mu, p^\mu\not{p}, p^\mu\not{p}', p'^\mu\not{p}, p'^\mu\not{p}', \\ & \sigma^{\mu\nu}p_\nu, \sigma^{\mu\nu}p'_\nu, \sigma^{\alpha\beta}p_\alpha p'_\beta p_\mu, \sigma^{\alpha\beta}p_\alpha p'_\beta p'_\mu, \\ & \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu p'_\rho \gamma_\sigma \gamma_5. \end{aligned} \quad (963)$$

Upotrebom jednadžbe gibanja lako je pokazati da se strukture $p^\mu\not{p}, p^\mu\not{p}', p'^\mu\not{p}, p'^\mu\not{p}', \sigma^{\mu\nu}p_\nu, \sigma^{\mu\nu}p'_\nu, \sigma^{\alpha\beta}p_\alpha p'_\beta p_\mu, \sigma^{\alpha\beta}p_\alpha p'_\beta p'_\mu, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu p'_\rho \gamma_\sigma \gamma_5$ mogu prikazati preko γ^μ, p^μ i p'^μ . Npr.

$$\begin{aligned} p^\mu\not{p} & \sim mp^\mu, \quad (964) \\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu p'_\rho \gamma_\sigma \gamma_5 & \sim \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu p'_\rho \gamma_\sigma \frac{i}{6} \varepsilon_{\sigma\alpha\beta\gamma} \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \\ & = \begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\mu_\beta & \delta^\mu_\gamma \\ \delta^\nu_\alpha & \delta^\nu_\beta & \delta^\nu_\gamma \\ \delta^\rho_\alpha & \delta^\rho_\beta & \delta^\rho_\gamma \end{vmatrix} p_\nu p'_\rho \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \frac{i}{6} \\ & = p_\nu p'_\rho (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho + \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu + \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho - \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu) \\ & \rightarrow \text{lin komb } p^\mu, p'^\mu, \gamma^\mu. \end{aligned} \quad (965)$$

DZ. Pokažite da se zbog jednadžbi gibanja sve ostale strukture u (963) svode na doprinose $p^\mu, p'^\mu, \gamma^\mu$.

Time smo pokazali da je najopćenitija struktura $\Gamma^\mu(p, p')$

$$\Gamma^\mu(p, p') = \gamma^\mu A + (p^\mu + p'^\mu)B + (p^\mu - p'^\mu)C . \quad (966)$$

Pri tome A, B i C mogu biti samo funkcije skalarnih produkata 4-impulsa. Međutim $p^2 = m^2$ i $p'^2 = m^2$ su konstante, a $p \cdot p' = m^2 - q^2$ ($q = p - p'$) je funkcija q^2 . Stoga su A, B i C funkcije samo q^2 .

4. Wardov identitet postavlja dodatni uvjet na $\Gamma^\mu(p, p')$,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \langle \alpha | j^\mu(x) | \beta \rangle &= 0 \quad \Rightarrow \quad q_\mu \mathcal{M}^\mu(q) = 0 \\ \Rightarrow q_\mu \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p, p') u(p) &= 0 \\ \Rightarrow \bar{u}(p') [\not{q} \cdot A + 0 \cdot B + q^2 C] u(p) &= 0 . \end{aligned} \quad (967)$$

Koeficijent člana A je jednak nuli zbog jednadžbe gibanja, tako da samo koeficijent C člana nije jednak nuli. Stoga C mora biti jednak nuli. Odatle slijedi

$$\bar{u}(p') \Gamma^\mu(p, p') u(p) = \bar{u}(p') [\gamma^\mu A + (p^\mu + p'^\mu)B] u(p) . \quad (968)$$

Rabeći Gordonov identitet (radili ste ga na vježbama)

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{p^\mu + p'^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p), \quad (969)$$

nalazimo

$$\bar{u}(p') \Gamma^\mu(p, p') u(p) = \bar{u}(p') [\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)] u(p), \quad (970)$$

gdje je

$$F_1(q^2) = A(q^2) + 2mB(q^2) \quad \text{i} \quad F_2(q^2) = -2mB(q^2) . \quad (971)$$

Time $\Gamma^\mu(p, p')$ postaje funkcija samo q ,

$$\Gamma^\mu(q) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) . \quad (972)$$

Tu su funkcije F_1, F_2 nepoznate funkcije q^2 koje se zovu **form faktori** (također su i A, B, C form faktori ali uz druge Lorentzove strukture).

Fizikalno značenje form faktora

U najnižem redu računa smetnje je $\Gamma^\mu(q) = \gamma^\mu$ pa mora vrijediti

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 0. \quad (973)$$

Kasnije ćemo izračunati korekcije form faktora zbog doprinosa jedne petlje (red α). U principu mogu se izračunati u bilo kojem redu računa smetnje.

Nadalje F_1 i F_2 moraju sadržavati kompletnu informaciju o djelovanu elektromagnet-skog polja na elektron. Npr. moraju sadržavati cjelokupna električna i magnetska vezanja elektrona.

Električni naboj

Da bismo našli električni naboj elektrona razmotrit ćemo elastično raspršenje nerelativističkog elektrona na statičkom električnom potencijalu rabeći jednadžbu (937). To odgovara odabiru potencijala

$$A_\mu^{cl}(x) = (\phi(\vec{x}), \vec{0}) \quad (974)$$

odnosno

$$\tilde{A}_\mu^{cl}(q) = 2\pi\delta(q^0)(\tilde{\phi}(\vec{q}), \vec{0}). \quad (975)$$

(Napomena : vrijedi $0 = q^0 \ll |\vec{q}| \approx 0$.) Ubacivanjem tog izraza u (937) nalazimo ($2\pi\delta(q^0)$ je izvučen s lijeve i desne strane jednadžbe (976))

$$i\mathcal{M} = -ie\bar{u}(p')\Gamma^0(q)u(p)\tilde{\phi}(\vec{q}). \quad (976)$$

Pretpostavljamo da se statičko polje polako mijenja u makroskopskom području, pa je stoga $\tilde{\phi}(\vec{q})$ koncentriran oko $\vec{q} = 0$. Zbog toga možemo uzeti da $\vec{q} \rightarrow 0$ u spinornom matričnom elementu, pa stoga možemo aproksimirati $\vec{p} = \vec{p}'$. Nadalje, kako je $\vec{A}(\vec{x}) = 0$, samo F_1 form faktor doprinosi. U nerelativističkoj aproksimaciji je $(\sigma \cdot p, \bar{\sigma} \cdot p = m + \mathcal{O}(\vec{p}^0)$

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\gamma^0 u(p) &= u^\dagger(p')u(p) \\ &= (\xi'^\dagger \sqrt{\sigma \cdot p}, \xi'^\dagger \sqrt{\bar{\sigma} \cdot p}) \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma \cdot p} \xi \\ \sqrt{\bar{\sigma} \cdot p} \xi \end{pmatrix} \stackrel{NR}{\approx} 2m\xi'^\dagger \xi, \end{aligned} \quad (977)$$

pa je stoga

$$i\mathcal{M} = -ieF_1(0)\tilde{\phi}(\vec{q})2m\xi'^\dagger \xi. \quad (978)$$

U Bornovoj aproksimaciji ta amplituda odgovara potencijalu (u Peskinovoj notaciji treba odbaciti faktor $-i2m$ iz amplitude i Fourier transformirati \vec{q} zavisne dijelove),

$$V(\vec{x}) = eF_1(0)\phi(\vec{x}). \quad (979)$$

Stoga je $F_1(0)$ naboj elektrona u jedinicama e . Budući da je $F_1(0) = 1$ već u vodećem redu perturbativnog razvoja, radijativne korekcije form faktora $F_1(q^2) = 1$ moraju iščezavati u $q^2 = 0$.

Magnetski dipolni moment

Analizom kao za električni ali sada za statični vektorski potencijal

$$A^{cl}(x) = (0, \vec{A}^{cl}(\vec{x})), \quad (980)$$

odnosno

$$\vec{A}^{cl}(\vec{q}) = (2\pi)\delta(p^0 - p^0)(0, \vec{A}^{cl}(\vec{q})). \quad (981)$$

može se dobiti relacija između form faktora i anomalnog magnetskog momenta. Uvrštavajući (981) u (970) (predznak desne strane se javlja zbog skalarnog produkta: $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$) dobijamo (faktor $2\pi\delta(p^0 - p^0)$ je izvučen)

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= ie\bar{u}(p')\Gamma^i(p', p)u(p)\vec{A}_{cl}^i(\vec{q}) \\ &= ie\left[\bar{u}(p')\left(\gamma^i F_1 + \frac{i\sigma^{i\nu}q_\nu}{2m}F_2\right)u(p)\right]\vec{A}^{cl}(\vec{q}). \end{aligned} \quad (982)$$

Rabeći sljedeće relacije i aproksimativne relacije

$$\sqrt{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}} = \sqrt{m}\sqrt{1 - \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{m}} = \sqrt{m}\left(1 - \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{2m}\right), \quad (983)$$

$$\sqrt{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}} = \sqrt{m}\left(1 + \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{2m}\right), \quad (984)$$

$$u(p) \approx \sqrt{m}\begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{2m}\right)\xi \\ \left(1 + \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{2m}\right)\xi \end{pmatrix}, \quad (985)$$

$$u^\dagger(p') \approx \sqrt{m}\left(\xi'^\dagger\left(1 - \frac{\vec{\sigma}\vec{p}'}{2m}\right), \xi'^\dagger\left(1 + \frac{\vec{\sigma}\vec{p}'}{2m}\right)\right), \quad (986)$$

$$\gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}, \quad (987)$$

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k, \quad (988)$$

$$\gamma^0 i\sigma^{i\nu}q_\nu = \gamma^0 i\sigma^{ij}q_j = i\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}q^k, \quad (989)$$

nalazimo

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\gamma^i u(p) &= \xi'^\dagger[(\vec{\sigma}\vec{p}')\sigma^i + \sigma^i(\vec{\sigma}\vec{p})]\xi, \\ &= \xi'^\dagger[(p'^i + p^i) + i(\vec{\sigma} \times \underbrace{(\vec{p}' - \vec{p})}_\vec{q})^i]\xi. \end{aligned} \quad (990)$$

$$\bar{u}(p')\frac{i\sigma^{i\nu}q_\nu}{2m}u(p) = \xi'^\dagger i(\vec{\sigma} \times \vec{q})^i \xi \quad (991)$$

Prvi član u (990) dolazi on NR kinetičkog člana nakon minimalne supstitucije $((\vec{p} - e\vec{A})^2/(2m) - \text{pažnja } \vec{p} \text{ je operator})$ i on ne daje doprinos magnetskom momentu. Zane-
marujući ga, iz (970) dobijamo

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)]u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(\vec{q}) \\ \stackrel{q \rightarrow 0}{\approx} 2m\xi^{\dagger}\left(\frac{-i}{2m}(\vec{\sigma} \times \vec{q})[F_1(0) + F_2(0)]\right)\xi\tilde{A}^{cl}(\vec{q}) . \end{aligned} \quad (992)$$

Rabeći Fourierov transformat klasičnog statičnog vektorskog polja i pripadne izraze za magnetsko polje u x i p prostoru,

$$\begin{aligned} \vec{A}^{cl}(\vec{x}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{x}} \vec{A}^{cl}(\vec{q}) \\ \vec{B}(\vec{x}) &= \nabla \times \vec{A}^{cl}(\vec{x}) \end{aligned} \quad (993)$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ \vec{B} &= i\vec{q} \times \vec{A}^{cl}(\vec{q}), \end{aligned} \quad (994)$$

dobijamo amplitudu (982) izraženu preko magnetskog polja

$$i\mathcal{M} = -i(2m)e\xi^{\dagger}\left(\frac{-1}{2m}\sigma^k[F_1(0) + F_2(0)]\right)\xi\tilde{B}^k(\vec{q}) . \quad (995)$$

Rabeći preskripciju za izvlačenje potencijalne energije iz (Bornove) amplitude (izvuče se faktor $-i2m$ i Fourier se transformiraju \vec{q} zavisni dijelovi) nalazimo amplitudi pridruženu potencijalnu energiju,

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= -\frac{e}{m}[F_1(0) + F_2(0)]\xi^{\dagger}\frac{\vec{\sigma}}{2}\xi \times \vec{B}(\vec{x}) \\ &= -\langle\vec{\mu}\rangle \cdot \vec{B}(\vec{x}) . \end{aligned} \quad (996)$$

Usporedbom sa klasičnim izrazom za potencijal međudjelovanja magnetskog polja sa magnetskim momentom $\vec{\mu}$,

$$V(\vec{x}) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad (997)$$

nalazimo da je očekivana vrijednost operatora magnetskog momenta $\vec{\mu}$

$$\langle\vec{\mu}\rangle = \frac{e}{m}[F_1(0) + F_2(0)]\underbrace{\xi^{\dagger}\frac{\vec{\sigma}}{2}\xi}_{\vec{S}} . \quad (998)$$

Uveli smo izraz za spin \vec{S} . Izraz za magnetski moment (998) može zapisati u standardnom obliku iz klasične elektrodinamike,

$$\vec{\mu} = g\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{S}, \quad (999)$$

gdje je koeficijent g tzv. **Landé-ov g -faktor**,

$$g = 2[F_1(0) + F_2(0)] = 2 + 2F_2(0) . \quad (1000)$$

U vodećem (nultom) redu računa smetnje je $F_2(0) = 0$, a $F_1(0) = 1$ (u svakom redu računa smetnje kao što ćemo vidjeti), to QED predviđa da je Landé-ov form faktor jednak

$$g = 2 + \mathcal{O}(\alpha) . \quad (1001)$$

Doprinosi $g/2$ višeg reda su mali i tvore tzv. **anomalni magnetski moment**. Njega ćemo izračunati u sljedećem podpoglavlju u najnižem redu računa smetnje.

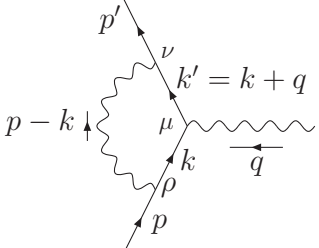
Gornja analiza rabi samo simetrije QED a ne rabi nigdje svojstva specifičnih fermiona. Zato zaključci vrijede za svaki fermion s elektromagnetskim međudjelovanjem. Npr. vrijedi i za proton. Međutim proton nije elementarna čestica pa se ne očekuje da $F_1(0) = 1$ i $F_2(0) = 0$ DAJU dobru aproksimaciju za form faktore protona. Zapravo nalazi se da vrijedi $F_1(0) = 1$ i za proton (to je očitavanje sačuvanja naboja), međutim $g_p = 2 + 2F_2(0)$ odstupa 40% od Diracove vrijednosti 2.

5.5 Račun elektronske funkcije vrha i njeno UV ponašanje

Sada ćemo pristupiti izračunavanju elektronske funkcije vrha. Znamo da vrh mora biti oblika (972). Za izračunavanje nam treba izraz za amplitudu i par tehnika: Feynmanova parametrizacija, integracija preko tenzora u 4-impulsu po kojem se integrira, Wickova rotacija, regularizacija UV divergencije - odabrat ćemo Pauli-Villarsovu, i po prvi puta renormalizacija.

Amplituda

Pridružimo linijama u dijagramu vrha 4-impulse



$$= -ie \bar{u}(p') \delta \Gamma^\mu(p', p) u(p) . \quad (1002)$$

Primjenom Feynmanovih pravila, u redu α dobijamo (uoči $q = p' - p$)

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta \Gamma^\mu , \quad (1003)$$

gdje je $\delta \Gamma^\mu$ korekcija prvog člana u redu α ,

$$-ie \bar{u}(p') \delta \Gamma^\mu(p', p) u(p)$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\nu\rho}}{(k-p)^2 + i\varepsilon} \\
&\quad \times \bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\varepsilon} (-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} (-ie\gamma^\rho) u(p) \\
&= (-ie) \times 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p')[\not{k}\gamma^\mu\not{k}' + m^2\gamma^\mu - 2m(k+k')^\mu]u(p)}{((k-p)^2 + i\varepsilon)(k'^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - m^2 + i\varepsilon)}. \quad (1004)
\end{aligned}$$

U zadnjem redu rabili smo

$$\begin{aligned}
\gamma_\nu(\not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu &= -2\not{k}\gamma^\mu\not{k}' + 4mk'^\mu + 4mk^\mu - 2m^2\gamma^\mu \\
&= -2(\not{k}\gamma^\mu\not{k}' - 2m(k' + k)^\mu + m^2\gamma^\mu). \quad (1005)
\end{aligned}$$

Integral (1004) je kompliciran. Za njegovo izračunavanje nam treba nova računaska metoda – **metoda Feynmanove parametizacije**.

FEYNMANOVA PARAMETRIZACIJA

Cilj Feynmanove parametrizacije je da tri (propagatorska) nazivnika svede na jedan kvadratični polinom u nazivniku na treću potenciju. Tada možemo napraviti pomak u k tako da svedemo izraz na standardni oblik propagatora. U toj proceduri se javljaju dodatni integracijski parametri.

- Produkt dva faktora

Vrijedi sljedeći identitet (vježbe)

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2}. \quad (1006)$$

x i y se zovu Feynmanovi parametri. Zadnji izraz je potpuno simetričan na zamjenu Feynmanovih parametara. Evo primjera upotrebe te relacije

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{[(k-p)^2 + i\varepsilon][k^2 + m^2 + i\varepsilon]} \\
&= \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[x(k-p)^2 + y(k^2 - m^2) + i\varepsilon]^2} \\
&= \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - ym^2 + i\varepsilon]^2} \\
&= \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[\ell^2 + (x-x^2)p^2 - ym^2 + i\varepsilon]^2}. \quad (1007)
\end{aligned}$$

U izraz u trećem retku stavili smo $\ell = k - xp$. Time se dobija izraz u kojem nazivnici ovise samo o ℓ^2 , pa je integraciju jednostavnije provesti (ako je moguće napraviti pomak

za $-xp$ u k varijabli).

Deriviranjem izraza (1006) po B nalazimo

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{ny^{n-1}}{[xA+yB]^{n+1}} . \quad (1008)$$

- Produkt n faktora

Međutim nama treba izraz za tri nazivnika (propagatora), odnosno općenito n nazivnika (propagatora). Traženi izraz je

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + \dots + x_n A_n]^n} \quad (1009)$$

i dokazuje se matematičkom indukcijom (vježbe).

Deriviranjem po A_1, \dots, A_n nalazimo (vježbe)

$$\frac{1}{A_1^{m_1} \dots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{\prod x_i^{m_i-1}}{[\sum x_i A_i]^{\sum m_i}} \frac{\Gamma(m_1 + \dots + m_n)}{\Gamma(m_1) \dots \Gamma(m_n)} . \quad (1010)$$

RAČUN FORM FAKTORA

- Nazivnik u (1004)

Primjenom (1009) na nazivnike (1004) nalazimo ($k' = k + q$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{((k-p)^2 + i\varepsilon)(k'^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - m^2 + i\varepsilon)} \\ &= \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} , \end{aligned} \quad (1011)$$

gdje je

$$\begin{aligned} D &= x(k^2 - m^2) + y(k'^2 - m^2) + z(k-p)^2 + i\varepsilon \underbrace{(x+y+z)}_{=1} \\ &= k^2 + 2k \cdot (yq - zp) + yq^2 + zp^2 - (x+y)m^2 + i\varepsilon . \end{aligned} \quad (1012)$$

Translatirajmo k da bismo dobili potpuni kvadrat (kao propagator),

$$\ell \equiv k + yq - zp . \quad (1013)$$

Time se D bitno pojednostavljuje (rabimo $p^2 = m^2$, $p'^2 = m^2$, $q^2 = 2m^2 - 2p \cdot p' = -2p \cdot q$, $x + y = 1 - z$),

$$\begin{aligned} D &= \ell^2 + m^2(-1 + z + z - z^2) + q^2(y - y^2 - zy) \\ &= \ell^2 + \underbrace{q^2xy - m^2(1 - z)^2}_{\equiv -\Delta}, \end{aligned} \quad (1014)$$

gdje smo uveli

$$\Delta \equiv -q^2xy + m^2(1 - z)^2. \quad (1015)$$

Budući da je $q^2 < 0$, slijedi $\Delta > 0$, pa Δ možemo shvaćati kao efektivnu masu.

- Brojnik u (1004)

Sada treba srediti i brojnik u (1004). Moramo ga izraziti preko ℓ . Integracija d^4k će pri tome prijeći u integraciju po $d^4\ell$ (pretpostavka jest da translacija ne daje površinske članove – to sigurno vrijedi ako je integral konvergentan). Pojavit će se tenzori u ℓ po kojima treba znati integrirati.

Integracije preko tenzora u ℓ

Prednost izražavanja brojnika po ℓ jest da nazivnik ovisi samo o ℓ^2 . Zbog toga vrijede sljedeće jednakosti (vježbe)

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu}{D^3} = 0, \quad (1016)$$

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{D^3} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{D^3}, \quad (1017)$$

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu \ell^\nu \ell^\rho}{D^3} = 0, \quad (1018)$$

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu \ell^\nu \ell^\rho \ell^\sigma}{D^3} = \frac{1}{24} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^4}{D^3}. \quad (1019)$$

Prva i treća relacija su posljedica parnosti i vrijede za sve neparne tenzore. Ostale su posljedica simetrije u ℓ -vima. Koeficijent (1/4, 1/24) je lako odrediti kontrahiranjem sa odgovarajućim g tenzorima).

Primjenjujući (1016), (1017), (1013) nalazimo

$$\begin{aligned} \text{Brojnik (1004)} &= \bar{u}(p') [k \gamma^\mu k' + m^2 \gamma^\mu - 2m(k + k')^\mu] u(p) \\ &= \bar{u}(p') [(\ell - y \not{q} + z \not{p}) \gamma^\mu (\ell + (1 - y) \not{q} + z \not{p}) \\ &\quad + m^2 \gamma^\mu - 2m(2\ell + q(1 - 2y) + 2zp)^\mu] u(p) \\ &\rightarrow \bar{u}(p') \left[-\frac{1}{2} \gamma^\mu \ell^2 + (-y \not{q} + z \not{p}) \gamma^\mu ((1 - y) \not{q} + z \not{p}) \right. \\ &\quad \left. + m^2 \gamma^\mu - 2m((1 - 2y)q^\mu + 2zp^\mu) \right] u(p). \end{aligned} \quad (1020)$$

Izraz (1020) želimo svesti na formu (972), odnosno (968) koju je lakše naći. Primjenom jednadžbi gibanja i relacija za impulse za kombinacije γ -matričnih struktura dobijamo (to riješite za **DZ**)

$$\begin{aligned}
\cancel{q}\gamma^\mu\cancel{q} &= 2q^\mu\cancel{q} - \gamma^\mu q^2 \rightarrow -\gamma^\mu q^2, \\
\cancel{p}\gamma^\mu\cancel{q} &\rightarrow q^2\gamma^\mu + 2mp'^\mu - 2m^2\gamma^\mu, \\
\cancel{q}\gamma^\mu\cancel{p} &\rightarrow 2\gamma^\mu m^2 - 2mp^\mu, \\
\cancel{p}\gamma^\mu\cancel{p} &\rightarrow 2mp^\mu - m^2\gamma^\mu,
\end{aligned} \tag{1021}$$

odakle dobijamo

$$\begin{aligned}
&\text{Brojnik (1004)} \\
&= \bar{u}(p') \left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu \ell^2 + (-y)(1-y)(-\gamma^\mu q^2) + z(1-y)(q^2\gamma^\mu + 2mp'^\mu - 2m^2\gamma^\mu) \right. \\
&\quad \left. + (-y)z(2\gamma^\mu m^2 - 2mp^\mu) + z^2(2mp^\mu - m^2\gamma^\mu) + m^2\gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. - 2m((1-2y)q^\mu + 2zp^\mu) \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2}\ell^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + (p+p')^\mu(-mz(1-z)) + (p'-p)^\mu(m(z-2)(x-y)) \right] u(p). \tag{1022}
\end{aligned}$$

Uvrštavajući izraz za brojnik (1022) i nazivnik (1011) i (1012) u izraz za korekciju vrha (1004) dobijamo (prvi faktor 2 zbog algebre Diracovih matrica, drugi faktor 2 zbog Feynmanove parametrizacije)

$$\begin{aligned}
&-ie\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p) \\
&= -ie\bar{u}(p')[A\gamma^\mu + B(p'+p)^\mu + C(p'-p)^\mu]u(p) \\
&= -ie(2ie^2) \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \delta(x+y+z-1) \frac{2}{[\ell^2 - \Delta + i\varepsilon]^3} \\
&\quad \times \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2}\ell^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + (p+p')^\mu(-mz(1-z)) + (p'-p)^\mu(m(z-2)(x-y)) \right] u(p). \tag{1023}
\end{aligned}$$

gdje je Δ , dan sa (1015), parna funkcija u ℓ i simetričan na zamjenu $x \leftrightarrow y$.

Iz analize u prošlom poglavlju znamo da koeficijent q^μ mora biti jednak nuli. Stvarno, podintegralna funkcija koeficijenta uz q^μ je neparna na zamjenu $x \leftrightarrow y$ i zbog toga mora biti jednaka nuli. Sve ostale podintegralne funkcije su parne na zamjenu $x \leftrightarrow y$.

Primjenom Gordonovog identiteta (969) iz kojeg slijede relacije među form faktorima (971), $F_1 = A + 2mB$, $F_2 = -2mB$, dobijamo za $\delta\Gamma(p',p)$ izraz u kojemu možemo eksplicitno identificirati α -doprinos form faktorima F_1 i F_2 ,

$$-ie\bar{u}(p')\delta\Gamma(p',p)u(p)$$

$$\begin{aligned}
&= -ie(2ie^2) \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{[\ell^2 - \Delta + i\varepsilon]^3} \\
&\times \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2}\ell^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} (2m^2z(1-z)) \right] u(p) .
\end{aligned} \tag{1024}$$

gdje je Δ , dan sa (1015).

Wickova rotacija

Sada moramo izvrijedniti $d^4\ell$ integral. Podintegralni izraz (propagator) zbog Minkowski metrike $g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ nema $\ell^0 \leftrightarrow \ell^i$ simetriju. Zbog toga bismo u principu morali posebno integrirati po $d\ell^0$ i $d^3\ell$. Srećom svojstva propagatora omogućuju primjenu tzv. **Wickove rotacije** koja propagator svodi na oblik u kojem se svi doprinosi integracijskih varijabli ℓ javljaju s istim predznakom (Euklidska metrika).

$$\tag{1025}$$

Wickova rotacija rabi svojstvo propagatora da je pozitivni pol ispod realne osi a negativni iznad realne osi u ℓ^0 . To omogućuje zatvaranje konture kao na slici (strelice na imaginarnoj osi je suprotna od one ne zatvorenoj konturi) na takav način da niti jedan reziduom nije obuhvaćen konturom. Jordanova lema osigurava iščezavanje četvrt-kružnih doprinosa kada pripadni radijus ide u beskonačnost pa se integracija $\int_{-\infty}^{\infty} d\ell^0$ može zamijeniti integracijom $\int_{-i\infty}^{i\infty} d\ell^0$. Na kraju uvodeći redefiniciju

$$\ell^0 \equiv i\ell_E^0, \quad \vec{\ell} \equiv \vec{\ell}_E, \tag{1026}$$

dobijamo $\ell^2 = -\ell_E^2$ s Euklidskom metrikom $(1, 1, 1, 1)$, mjeru $d^4\ell = id^4\ell_E$ i integracijske granice $\ell_E^0 \in (-\infty, \infty)$. Time integrali po $d^4\ell$ postaju jednostavniji.

Npr.,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^m} &= \frac{i}{(-1)^m} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4\ell_E \frac{1}{[\ell_E^2 + \Delta]^m} \\ &= \frac{i(-1)^m}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^3}{[\ell_E^2 + \Delta]^m} . \end{aligned} \quad (1027)$$

U izrazu (1027) javlja se integracija po prostornom kutu u 4 dimenzija, $\int d\Omega_4$, koje, zbog neovisnosti podintegralnog izraza o kutevima, daje konstantni faktor Ω_4 . Jedan način izračunavanja Ω_4 je uvođenjem 4-dimenzijskih sferičnih koordinata,

$$x = (r \sin \omega \sin \theta \cos \phi, r \sin \omega \sin \theta \sin \phi, r \sin \omega \cos \theta, r \cos \omega) \quad (1028)$$

iz koje za integracijsku mjeru slijedi (bit će napravljeno na vježbama)

$$d^4x = r^3 \sin^2 \omega \sin \theta d\phi d\theta d\omega dr . \quad (1029)$$

Odatle je pak lako pokazati da je

$$\Omega_4 = 2\pi^2 . \quad (1030)$$

Drugi način, koji je primjenjiv za mjeru $d^D\ell$ u proizvoljnom broju dimenzija D rabi svojstvo Gaussovog integrala

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} . \quad (1031)$$

Odatle

$$(\sqrt{\pi})^D = \int d^D x e^{-\sum_{i=1}^D x_i^2} = \int d\Omega_D \int_0^\infty x^{D-1} dx e^{-x^2} = \Omega_D \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{2}, \quad (1032)$$

što daje

$$\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})} . \quad (1033)$$

Evo nekoliko konkretnih vrijednosti

D	$\Gamma(D/2)$	$\int d\Omega_D$
1	$\sqrt{\pi}$	2
2	1	2π
3	$\sqrt{\pi}/2$	4π
4	1	$2\pi^2$

Primjetite da smo za Ω_4 dobili istu vrijednost, $2\pi^2$, kao prije. Sada možemo izvrijedniti integral (1027),

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^m} &= \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \int_{x=l_E^2=0}^{\infty} \frac{dxx}{[x + \Delta]^m} \\ &= \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \underbrace{\frac{1}{(m-1)(m-2)}}_{=\Gamma(m-2)/\Gamma(m)} \frac{1}{\Delta^{m-2}}. \end{aligned} \quad (1034)$$

Analogno nalazimo

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^m} &= \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2} \int_{x=l_E^2=0}^{\infty} \frac{dxx^2}{[x + \Delta]^m} \\ &= \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2} \underbrace{\frac{2}{(m-1)(m-2)(m-3)}}_{=2\Gamma(m-3)/\Gamma(m)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}. \end{aligned} \quad (1035)$$

U izrazu za $\delta\Gamma$, (1024), integrali (1034) i (1035) se javljaju za $m = 3$. Integral (1034) je konvergentan za $m = 3$, međutim integral (1035) nije definiran za $m = 3$, preciznije divergentan je.

Pauli-Villars-ova regularizacija

Fizikalno značenje divergencije ćemo kasnije razmotriti. Sada dajemo preskripciju (jednu od brojnih) koja divergentni integral čini konvergentnim. Zamjenjujemo u polaznom izrazu za $\delta\Gamma$ (1004) fotonski propagator sa

$$\frac{1}{(p-k)^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{(p-k)^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon}. \quad (1036)$$

gdje je Λ jako velika masa. Drugi dio propagatora se može zamišljati kao doprinos teškog fotona. Za mali k podintegralna funkcija (1004) se ne mijenja, ali za $k \geq \Lambda$ ona blago trne k nuli. Iz izraza za D (1012) i odgovarajućeg izraza za teški foton, D_Λ

$$\begin{aligned} D &= x(k^2 - m^2) + y(k'^2 - m^2) + z(k-p)^2 + i\varepsilon, \\ D_\Lambda &= x(k^2 - m^2) + y(k'^2 - m^2) + z((k-p)^2 - \Lambda^2) + i\varepsilon, \end{aligned} \quad (1037)$$

vidimo da veličini Δ , (1015) odgovara veličina

$$\Delta_\Lambda = \underbrace{-xyq^2 + (1-z)^2m^2}_{=\Delta} + z\Lambda^2. \quad (1038)$$

Također divergentni integral (1035) se zamjenjuje konvergentnim integralom

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \left(\frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right) \\
&= \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\ell_E^2 \left(\frac{\ell_E^4}{[\ell_E^2 + \Delta]^3} - \frac{\ell_E^4}{[\ell_E^2 + \Delta_\Lambda]^3} \right) \\
&= \frac{i}{(4\pi)^2} \log \left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right)
\end{aligned} \tag{1039}$$

S druge strane konvergentni integral (1034) dobija dodatni član reda $1/\Lambda^2$ koji se može zanemariti,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{1}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right) \\
&= \frac{-i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\ell_E^2 \left(\frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2 + \Delta]^3} - \frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2 + \Delta_\Lambda]^3} \right) \\
&= \frac{-i}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{2\Delta} - \frac{1}{2\Delta_\Lambda} \right) \approx \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2\Delta} .
\end{aligned} \tag{1040}$$

Gornja preskripcija zamjene propagatora dodavanjem teških fiktivnih čestica zove se Pauli-Villarsova regularizacija. U fizikalnim veličinama ne bi se smjela pojavljivati fiktivna masa Λ .

Uporabom preskripcije (1036) odnosno njenih posljedica (1038), (1039) i (1040) izraz (1024) postaje jednak

$$\begin{aligned}
& -ie\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p', p)u(p) \\
&= -ie(2ie^2) \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \int dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \left(\frac{2}{[\ell^2 - \Delta + i\varepsilon]^3} - \frac{2}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda + i\varepsilon]^3} \right) \\
&\times \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2}\ell^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \left(2m^2z(1-z) \right) \right] u(p) \\
&= -ie\frac{\alpha}{2\pi} \int dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \\
&\times \bar{u}(p') \left(\gamma^\mu \left[\ln \frac{z\Lambda^2}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} \left((1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \left[\frac{1}{\Delta} \left(2m^2z(1-z) \right) \right] \right) u(p) .
\end{aligned} \tag{1041}$$

Izraz (1041) je modifikacija (1024) zbog (1038), iz kojeg se integracijom po $d^4\ell$ dobija (1041). Izrazi u uglatim zagradama daju form faktore F_1 i F_2 .

Renormalizacija form faktora F_1

UV divergencija vršnog dijagrama se javlja samo u F_1 . S druge strane analiza u prošlom poglavlju je pokazala da mora biti $F_1(q^2 = 0) = 1$ i on ima značenje naboja čestice. Zbog toga mora biti $\delta F_1(q^2 = 0) = 0$. Da bismo to osigurali uvodimo **ad hoc** preskripciju renormalizacije δF_1 ,

$$F_1(q^2) \rightarrow F_1(q^2) - F_1(0), \quad (1042)$$

koju ćemo objasniti kasnije. Postupak je moguć jer se divergencija javlja samo u $\delta F_1(q^2)$

IR divergencija F_1 form faktora, konačni izraz za F_1 form faktor

F_1 form faktor ima također i IR divergenciju sadržanu u $1/\Delta$ članu u F_1 izrazu u (1041). U tu svrhu analizirajmo F_1 za $q^2 = 0$,

$$\begin{aligned} \delta F_1(0) \Big|_{(1041)} &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ &\quad \times \left(\ln \frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2} + \frac{(1-4z+z^2)}{(1-z)^2} \right) \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (1-z) \left(\ln z - 2 \ln(1-z) + \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{\overbrace{(1-4z+z^2)}^{=-2+(1-z)(3-z)}}{(1-z)^2} \right) \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \left(\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + \underbrace{\left(\frac{5}{2} - \int_0^1 dz \frac{2}{1-z} \right)}_{\frac{1}{\Delta} \text{ član}} \right). \end{aligned} \quad (1043)$$

Divergencija dolazi zbog $z \approx 0$ ponašanja $1/\Delta$ člana. Ona se regularizira uvodeći za foton malu masu,

$$\frac{1}{(k-p)^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{(k-p)^2 - \mu^2 + i\varepsilon}, \quad (1044)$$

čime Δ (vidi analizu u jednadžbama (1037) - (1038)) dobija $+z\mu^2$ član,

$$\Delta \rightarrow -xyq^2 + (1-z)^2 m^2 + z\mu^2. \quad (1045)$$

Uvrštavajući tu zamjenu u (1042) za renormalizirani form faktor F_1 dobijamo

$$\begin{aligned} F_1(q^2) &= 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ &\quad \times \left[\ln \left(\frac{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z}{m^2(1-z)^2 - q^2 xy + \mu^2 z} \right) + \frac{m^2(1-4z+z^2) + q^2(1-x)(1-y)}{m^2(1-z)^2 - xyq^2 + \mu^2 z} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2(1-4z+z^2)}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z} \right] + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned} \quad (1046)$$

U logaritamskom članu $\ln \frac{\Delta(0)}{\Delta(q^2)}$ se $\mu^2 z$ doprinosi mogu zanemariti jer i bez njih pripadni integral nije divergentan. Dajemo i IR regularizirani form faktor $F_1(q^2)$ koji nije renormaliziran zato jer će nam trebati kasnije u dokazu relacije $\delta Z_2 + \delta F_1(0) = 0$ (vidi (1142)),

$$F_1(q^2) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2 z}{m^2(1-z)^2 - q^2 xy} \right) + \frac{m^2(1-4z+z^2) + q^2(1-x)(1-y)}{m^2(1-z)^2 - xyq^2 + \mu^2 z} \right] + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (1047)$$

F_2 form faktor

$F_2 = \delta F_2$ form faktor

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2m^2 z(1-z)}{-xyq^2 + m^2(1-z)^2}. \quad (1048)$$

nema ni UV ni IR divergencija, odnosno konačan je, i jednostavno ga je izračunati za $q^2 = 0$,

$$F_2 = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (1049)$$

Odatle za α korekciju g faktora elektrona (1001), $g = 2[F_1(0) + F_2(0)] = 2 + 2F_2(0)$ (tzv. anomalni magnetski moment) dobijamo

$$\begin{aligned} a_e &= \frac{g-2}{2} = F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \\ &= 0.0011614\dots \end{aligned} \quad (1050)$$

Taj je izraz prvi dobio Schwinger 1948. Eksperimentalni rezultat je $a_e = 0.0011597\dots$

Dodatak :

Za $q^2 < 0$ form factor $F_2(q^2)$ se također može točno izračunati:

$$F_2\left(\frac{q^2}{m^2}\right) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{4\text{cth}^{-1}\left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)}{\left(\frac{q^2}{m^2}\left(\frac{q^2}{m^2} - 4\right)\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (1051)$$

5.6 IR divergencija elektronske funkcije vrha

Nalaženje IR divergencije u $\delta F_1(q^2)$

U razmatranju IR divergencije elektronske vršne funkcije (1046) logaritamski član možemo zanemariti jer on ne daje IR divergenciju,

$$\begin{aligned} \delta F_1(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ &\times \left[\frac{m^2(1-4z+z^2) + q^2(1-x)(1-y)}{m^2(1-z)^2 - xyq^2 + \mu^2 z} \right. \\ &\left. - \frac{m^2(1-4z+z^2)}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z} \right] + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned} \quad (1052)$$

Pojednostavnimo izraz (1052). Kao prvo uočimo da divergenciju za $\mu^2 = 0$ imamo kada je $z \approx 1$, dakle kada je $x \approx y \approx 0$. Stoga analizirajući IR divergenciju možemo u brojnici staviti $z = 1$ i $x = y = 0$ i $z = 1$ uz μ^2 član (ionako je samo bitno da imamo malu masu koja regularizira integral),

$$\delta F_1(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left[\frac{-2m^2 + q^2}{m^2(1-z)^2 - q^2 y(1-z-y) + \mu^2} - \frac{-2m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2} \right]. \quad (1053)$$

Uvodeći zamjenu varijabli

$$y = (1-z)\xi, \quad w = (1-z), \quad (1054)$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \delta F_1(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\xi \frac{1}{2} \int_0^1 dw^2 \left[\frac{-2m^2 + q^2}{[m^2 - q^2\xi(1-\xi)]w^2 + \mu^2} - \frac{-2m^2}{m^2w^2 + \mu^2} \right] \\ &= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 d\xi \left[\frac{-2m^2 + q^2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} \ln \frac{m^2 - q^2\xi(1-\xi)}{\mu^2} + 2 \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right], \end{aligned} \quad (1055)$$

gdje smo u brojnicima u logaritmima, koji su veliki, zanemariti μ^2 . Nadalje, u limesu $\mu \rightarrow 0$ možemo zanemariti detalje brojnika logaritama. Oni su proporcionalni ili m^2 (ako je $m^2 > -q^2$, sjetimo se $q^2 < 0$) ili $-q^2$ (ako je $m^2 < -q^2$),

$$\begin{aligned} \delta F_1(q^2) &= -\frac{\alpha}{2\pi} \left[\int_0^1 d\xi \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} \ln \left(\frac{m^2 - q^2\xi(1-\xi)}{\mu^2} \right) - \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] \\ &\approx -\frac{\alpha}{2\pi} \left[\int_0^1 d\xi \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} \ln \left(\frac{-q^2 \text{ ili } m^2}{\mu^2} \right) - \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] \\ &\approx -\frac{\alpha}{2\pi} \left[\int_0^1 d\xi \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} \ln \left(\frac{-q^2 \text{ ili } m^2}{\mu^2} \right) - \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] \\ &\approx -\frac{\alpha}{2\pi} \ln \left(\frac{-q^2 \text{ ili } m^2}{\mu^2} \right) \left[\int_0^1 d\xi \left(\frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} - 1 \right) \right] \\ &\equiv -\frac{\alpha}{2\pi} \ln \left(\frac{-q^2 \text{ ili } m^2}{\mu^2} \right) f_{IR}(q^2). \end{aligned} \quad (1056)$$

Napomenimo da je uvijek $f_{IR}(q^2) > 0$ jer je $0 \leq \xi(1 - \xi) \leq 1/4$ i $-q^2 > 0$.

Efekti IR divergencije na udarni presjek

Budući da $F_1(q^2)$ množi samo γ^μ u matricnom elementu, da bi se dobio IR efekt u udarnom presjeku, treba samo napraviti zamjenu

$$e \rightarrow eF_1(q^2) = e(1 + \delta F_1(q^2)) \quad (1057)$$

u izrazu za tree-level udarni presjek (koji sadrži e^2),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \ln\left(\frac{-q^2 \text{ ili } m^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right]. \quad (1058)$$

Gdje je $(d\sigma/d\Omega)_0$ udarni presjek u najnižem α redu. Primjetimo da je korekcija udarnog presjeka reda α ne samo divergentna već i negativna, što je u suprotnosti s pozitivnošću udarnog presjeka.

Da bismo dobili ocjenu ponašanja integrala $f_{IR}(q^2)$ izračunat ćemo ga u limesu $-q^2 \rightarrow \infty$. Primjenit ćemo ocjenu integrala sličnu onoj u ocjeni izraza $I(\vec{v}, \vec{v}')$ (921) – u blizini singulariteta $\xi = 0$ aproksimirat ćemo $\xi(1 - \xi) \approx \xi$, a u blizini singulariteta $\xi = 1$ aproksimiramo $\xi(1 - \xi) \approx (1 - \xi)$ i tražimo samo dominantne doprinose (ostale zanemarujemo),

$$\begin{aligned} f_{IR}(q^2) &\xrightarrow{-q^2 \rightarrow \infty} \int_0^1 d\xi \frac{-q^2/2}{-q^2\xi(1 - \xi) + m^2} \\ &\approx \frac{1}{2} \int_0^a d\xi \frac{-q^2}{-q^2\xi + m^2} + \frac{1}{2} \int_b^1 d\xi \frac{-q^2}{-q^2(1 - \xi) + m^2} \\ &\approx \int_0^1 \frac{-q^2}{-q^2\xi + m^2} = \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (1059)$$

U gornjim izrazima je uzeto $0 < a, b < 1$. Tako za dominantni doprinos $F_1(q^2)$ u limesu $-q^2 \rightarrow \infty$ dobijamo,

$$F_1(-q^2 \rightarrow \infty) = 1 + \delta F_1(q^2) \approx 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (1060)$$

Uklanjanje IR divergencija iz udarnog presjeka; fizikalna interpretacija

Usporedbom formula za IR doprinose diferencijalnom udarnom presjeku zbog zakočnog zračenja (930) i zbog petlja-doprinosa dijagramu vrha (1060) u $-q^2 \rightarrow \infty$ limesu,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e(p) \rightarrow e(p')) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \underbrace{\ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)}_{f_{IR}(-q^2 \rightarrow \infty)} \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right)\right]; \quad (1061)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e(p) \rightarrow e(p') + \gamma) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[+ \frac{\alpha}{\pi} \underbrace{\ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)}_{\frac{1}{2}I(\vec{v}, \vec{v}')|_{-q^2 \rightarrow \infty}} \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \right]. \quad (1062)$$

se nalazi da iako su pojedini doprinosi imaju $\ln \mu$ divergenciju da se u sumi te divergencije krate. Primjetite da u limesu $-q^2 \rightarrow \infty$ vrijedi

$$I(\vec{v}, \vec{v}')|_{-q^2 \rightarrow \infty} = 2f_{IR}(-q^2 \rightarrow \infty). \quad (1063)$$

Fizikalno se kraćenje divergencija tumači na sljedeći način. Eksperimentalno se ne mogu mjeriti nezavisno doprinosi udarnom presjeku zbog elastičnog raspršenja i zbog raspršenja sa zakočnim zračenjem. Bilo koji realni detektor ne može mjeriti mekane fotone ispod neke energije E_ℓ koja je karakteristična za dani detektor. Vjerojatnost raspršenja bez detektiranja zakočnog fotona jednaka je sumi

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{mjereni}} \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega}(e(p) \rightarrow e(p')) + \frac{d\sigma}{d\Omega}(e(p) \rightarrow e(p') + \gamma(k < E_\ell)). \quad (1064)$$

IR divergentni dio $(d\sigma/d\Omega)_{\text{mjereni}}$ jednak je

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{mjereni}} &\approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \ln\left(\frac{-q^2 \text{ ili } m^2}{\mu^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2\pi} I(\vec{v}, \vec{v}') \ln\left(\frac{E_\ell^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right] \end{aligned} \quad (1065)$$

$$\stackrel{(1063)}{\approx} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \ln\left(\frac{-q^2 \text{ ili } m^2}{E_\ell^2}\right) \right]. \quad (1066)$$

U jednadžbi (1066) smo iskoristili jednakost (1063) za opću vrijednost $-q^2$ prije nego što smo je dokazali. Dokažimo je. Iz (921) slijedi

$$I(\vec{v}, \vec{v}') = \int \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{4\pi} \left(\frac{2p \cdot p'}{(\hat{k} \cdot p')(\hat{k} \cdot p)} - \frac{m^2}{(\hat{k} \cdot p')^2} - \frac{m^2}{(\hat{k} \cdot p)^2} \right), \quad (1067)$$

gdje je $\hat{k}^\mu = (1, \hat{k})$. Zadnja dva člana je lako izračunati,

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{4\pi} \frac{m^2}{(\hat{k} \cdot p)^2} &= \frac{m^2}{2} \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{1}{(p^0 - p \cos\theta)^2} \\ &= -\frac{m^2}{2p} \left(-y^{-1} \right)_{p^0+p}^{p^0-p} = \frac{m^2}{2p} \left(\frac{1}{p^0-p} - \frac{1}{p^0+p} \right) = \frac{m^2}{p^2} = 1 \end{aligned} \quad (1068)$$

Za izračunavanje prvog člana rabimo Feynmanovu parametrizaciju,

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{4\pi} \frac{p \cdot p'}{(\hat{k} \cdot p')(\hat{k} \cdot p)} &= \int_0^1 d\xi \int \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{4\pi} \frac{\frac{1}{2}(m^2 - q^2)}{[\hat{k} \cdot (\xi p' + (1-\xi)p)]^2} \\ &\stackrel{(1068)}{=} \int_0^1 d\xi \frac{\frac{1}{2}(m^2 - q^2)}{(\xi p' + (1-\xi)p)^2} = \int_0^1 d\xi \frac{\frac{1}{2}(m^2 - q^2)}{m^2 - \xi(1-\xi)q^2}. \end{aligned} \quad (1069)$$

U zadnjem retku smo upotrijebili relaciju $p \cdot p' = m^2 - q^2/2$. Iz (1068) i (1069) slijedi

$$I(\vec{v}, \vec{v}') = \int_0^1 d\xi \left(\frac{2m^2 - q^2}{m^2 - \xi(1-\xi)q^2} \right) - 2 = 2f_{IR}(q^2). \quad (1070)$$

Time je jednakost (1063) dokazana za bilo koju q^2 vrijednost, a time i jednačba (1066), tj. dokazano je poništenje IR divergencija za svaku q^2 vrijednost.

Ipak, budući da smo u izvrednjavanju integrala napravili niz aproksimacija, (1066) nije egzaktana formula, pa za bilo koji q^2 nema vrijednost za eksperimentaltalce, već samo daje teorijsku informaciju (da se IR divergencija poništavaju). S druge strane (1066) daje egzaktno ponašanje udarnog presjeka za $-q^2 \rightarrow \infty$ (jer su u tom limesu samo dominantni doprinosi bitni), pa za velike q^2 ima i eksperimentalnu vrijednost. U tom limesu vrijedi

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{mjereni}} \approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \ln \left(\frac{-q^2}{E_\ell^2} \right) \right]. \quad (1071)$$

Primjetimo da za malene E_ℓ udarni presjek opet u principu može postati negativan – taj problem ćemo riješiti u sljedećem podpoglavlju. Na kraju primjetimo da u $-q^2 \rightarrow \infty$ limesu sadrži Sudakove dvostruke logaritme, kao i u IR divergentnom slučaju – kao što je prije rečeno da će biti.

5.7 Sumacija i interpretacija IR divergencija

Iako smo u prošlom poglavlju riješili problem IR divergencija uočavajući da se IR divergentni doprinosi najnižeg reda zbog zakočnog zračenja i zbog korekcija vrha krate, još su tri problema ostali nerješena:

1. Nismo pokazali kraćenje IR divergencija u bilo kojem redu računa smetnje.
2. IR korekcija mjerenog udarnog presjeka (1071) i (1064) može u principu dati negativan predznak udarnom presjeku ako detektor ima dovoljno nizak prag detekcije fotona E_γ .
3. Još nismo reproducirali klasičan rezultat za broj emitiranih mekanih fotona N_γ pri raspršenju. (vidi vježbe ili Peskin pogl. 6.1),

$$N_\gamma = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{k_{max}} dk \frac{1}{k} I(\vec{v}, \vec{v}'). \quad (1072)$$

Odgovor na drugo i treće pitanje slijedi iz odgovora na prvo. Nadalje, ovdje će biti napravljena analiza samo kraćenja vodećih logaritamskih doprinosa u svim redovima računa smetnje, koji su u n-tom redu računa smetnje oblika

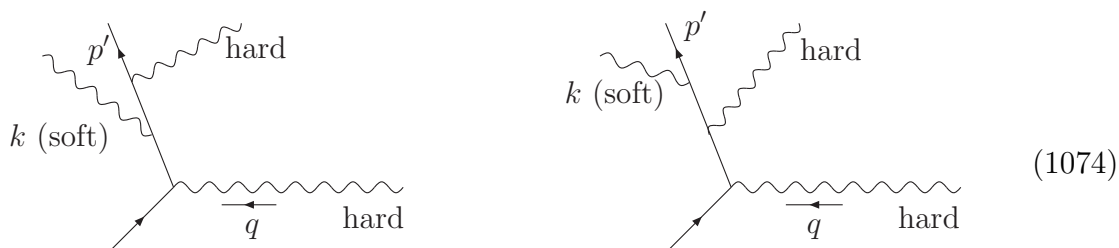
$$\left[\frac{\alpha}{\pi} \ln \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right) \ln \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) \right]^n. \quad (1073)$$

Analiza slijedi rad S. Weinberga, Phys. Rev. **140**, B516 (1965). Kompletna analiza kraćenja IR divergencija napravljena je u D. Yennie, Frautschi and H. Suura., Ann. Phys. **13**, 379 (1961).

Izvori IR divergencija

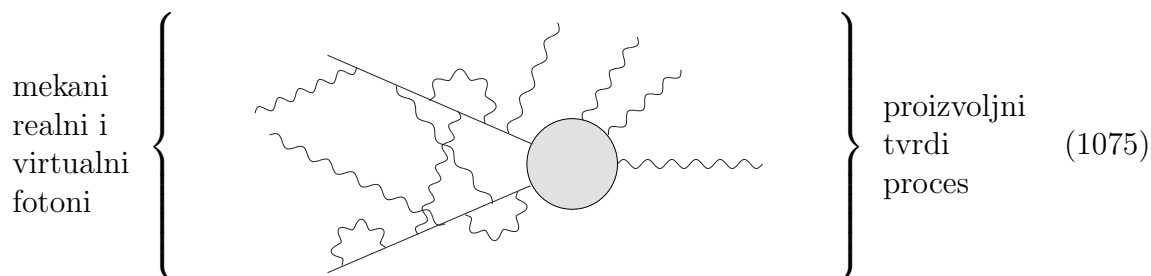
Dva su izvora IR divergencija fotona sa mekanim impulsima:

a. Realni fotoni s energijom ispod neke granične energije (reza) E_f . Oni moraju izlaziti iz elektronske linije koja nije jako izvan ljuske mase (engl. off-mass-shell), $p^2 \approx m^2$. To znači da emisiji mekog fotona ne smije prethoditi emisija tvrdog fotona, tj. fotona koji je jako izvan ljuske mase (s velikim $|p^2 - m^2|$). Npr. kod fotona na sljedeća dva dijagrama (mekani foton impulsa k i tvrdi foton neoznačenog impulsa su izlazni fotoni),



prvi dijagram nema IR divergencije jer se mekani foton emitira sa elektrona koji je daleko izvan ljuske mase (jer se iza njega emitira tvrdi foton), dok u drugom dijagramu meki foton iza tvrdog i on ima IR divergenciju jer nazivnik propagatora $(p' + k)^2 - m^2 = 2p' \cdot k$ teži k nuli u $k \rightarrow 0$ limesu.

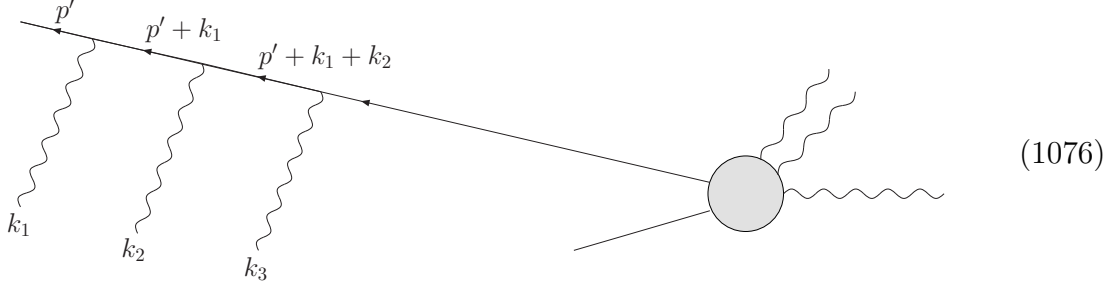
b. Drugi izvor IR divergencija su mekani fotoni koji se emitiraju sa i apsorbiraju na elektronske linije koje su skoro na ljusci mase. Sveukupno za analizu IR divergencija treba gledati samo meke fotone koji se apsorbiraju i emitiraju iza svih tvrdih fotona, kao što je prikazano na sljedećoj slici,



Tvrdi proces je opisan krugom i sve fotonske linije koje su vezane na njega nemaju IR divergencije. Mekani fotoni i virtualni fotoni koji su vezani na dvije elektronske linije doprinose IR divergenciji dijagrama. Sada ćemo (prema Weinbergu) posumirati doprinose svih mekih fotona. Javlja se nekoliko slučajeva.

Emisija fotona iz izlazne elektronske linije

Razmotrimo prvo emisiju mekih fotona iz izlazne elektronske linije,



Pretpostavimo da iz fotonske linije izlazi n fotona impulsa $k_1 \dots k_n$, Za sada nas ne interesira da li su to vanjske fotonske linije ili su to virtualni fotoni koji se vežu s oba kraja na izlaznu elektronsku liniju, ili virtualni fotoni koji se s jednim svojim krajem vežu na ulaznu elektronsku liniju. Diracova struktura dijagrama je

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p')(-ie\gamma^{\mu_1})\frac{i(\not{p}' + \not{k}_1 + m)}{2p' \cdot k_1}(-ie\gamma^{\mu_2})\frac{i(\not{p}' + \not{k}_1 + \not{k}_2 + m)}{2p' \cdot (k_1 + k_2) + \mathcal{O}(k^2)} \\ & \dots (-ie\gamma^{\mu_n})\frac{i(\not{p}' + \not{k}_1 + \dots + \not{k}_n + m)}{2p' \cdot (k_1 + \dots + k_n) + \mathcal{O}(k^2)}(i\mathcal{M}_{hard})\dots \end{aligned} \quad (1077)$$

U gornjem izrazu pretpostavili smo da su svi k_i , $i = 1, \dots, n$ mali (preciznije, da su im sve komponente male), pa stoga zanemarujemo sve kvadratične članove tipa $k_i \cdot k_j$, $i, j = 1, \dots, n$ (sadržani su u $\mathcal{O}(k^2)$). Nadalje, zanemarit ćemo sve \not{k}_i u brojnicima. Također primjenjujemo jednadžbu gibanja za preostale dominantne članove u brojnicima,

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p')\gamma^{\mu_1}(\not{p}' + m)\gamma^{\mu_2}(\not{p}' + m)\dots \\ & = \bar{u}(p')2p'^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}(\not{p}' + m)\dots \\ & = \bar{u}(p')2p'^{\mu_1}2p'^{\mu_2}\dots \end{aligned} \quad (1078)$$

Time amplituda (1077) prelazi u

$$\bar{u}(p')\left(e\frac{p'^{\mu_1}}{p' \cdot k_1}\right)\left(e\frac{p'^{\mu_2}}{p' \cdot (k_1 + k_2)}\right)\dots\left(e\frac{p'^{\mu_n}}{p' \cdot (k_1 + \dots + k_n)}\right)\dots \quad (1079)$$

Sada još moramo posumirati po svim mogućim poretcima (permutacijama) izlaznih fotona izlaznih impulsa k_1, \dots, k_n , kojih ima $n!$. (Ta procedura daje prevelik broj doprinosa za virtualne fotona – za svaki virtualni foton treba podijeliti s $2!$.) Označimo sa $\pi(i)$ takvu permutaciju.

Sada ćemo pokazati da vrijedi sljedeći identitet

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi} \left(\frac{1}{p' \cdot k_{\pi(1)}}\right)\left(\frac{1}{p' \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)})}\right)\dots\left(\frac{1}{p' \cdot (k_{\pi(1)} + \dots + k_{\pi(n)})}\right) \\ & = \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \dots \frac{1}{p \cdot k_n} \end{aligned} \quad (1080)$$

Dokaz ide indukcijom. Za $n = 2$ imamo,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\pi} \left(\frac{1}{p' \cdot k_{\pi(1)}} \right) \left(\frac{1}{p' \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)})} \right) \\
&= \left(\frac{1}{p' \cdot k_1} \right) \left(\frac{1}{p' \cdot (k_1 + k_2)} \right) + \left(\frac{1}{p' \cdot k_2} \right) \left(\frac{1}{p' \cdot (k_2 + k_1)} \right) \\
&= \left(\frac{1}{p' \cdot k_1} \right) \left(\frac{1}{p' \cdot k_2} \right). \tag{1081}
\end{aligned}$$

Time smo dokaz proveli za jednu n vrijednost. Pretpostavimo da smo jednakost već dokazali za $n - 1$ fotona i dodajmo n -ti foton. Rabeći simetriju zadnjeg faktora na permutacije fotonskih linija, izvlačimo taj član izvan sume na lijevoj strani jednadžbe (1080),

$$\begin{aligned}
L_{(1080)} &= \frac{1}{p' \cdot \sum_{i=1}^n k} \sum_{\pi} \left(\frac{1}{p' \cdot k_{\pi(1)}} \right) \left(\frac{1}{p' \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)})} \right) \cdots \\
&\quad \times \left(\frac{1}{p' \cdot (k_{\pi(1)} + \cdots + k_{\pi(n-1)})} \right). \tag{1082}
\end{aligned}$$

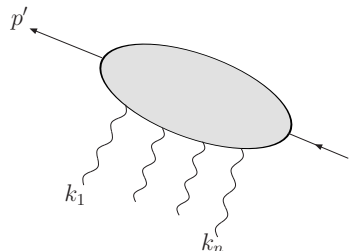
Suma ne zavisi o $k_{\pi(n)}$. Stavljajući $i = \pi(n)$ možemo pisati

$$\sum_{\pi} = \sum_{i=1}^n \sum_{\pi'(i)}, \tag{1083}$$

gdje je $\pi'(i)$ skup permutacija preostalih $n - 1$ cijelih brojeva (i isključen). Pretpostavljajući da jednakost (1080) vrijedi za $n - 1$ članova, nalazimo

$$\begin{aligned}
L_{(1080)} &= \frac{1}{p \cdot \sum_{i=1}^n k} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \cdots \frac{1}{p \cdot k_{i-1}} \frac{1}{p \cdot k_{i+1}} \cdots \frac{1}{p \cdot k_n} \\
&= \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \cdots \frac{1}{p \cdot k_n}. \tag{1084}
\end{aligned}$$

Primjenom (1084) na amplitudu (1079) dobijamo

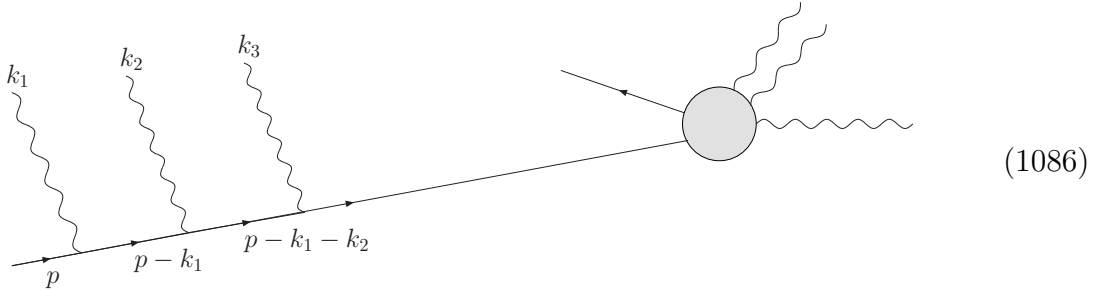


$$= \bar{u}(p') \left(e \frac{p'^{\mu_1}}{p' \cdot k_1} \right) \left(e \frac{p'^{\mu_2}}{p' \cdot k_2} \right) \cdots \left(e \frac{p'^{\mu_n}}{p' \cdot k_n} \right). \tag{1085}$$

Zatamnjena elipsa označava sumu svih mogućih poredaka ubacivanja n fotonskih linija.

Emisija fotona iz ulazne elektronske linije

Analogni račun vrijedi ako se fotonske linije ubacuju u ulaznu fotonsku liniju. Sada su impulsi propagatora jednaki $p - k_1, p - k_1 - k_2, \dots$:



Zbog toga za svaki foton dobijamo dodatni faktor -1 , jer je $(p - \sum_{i=1}^n k_i) - m^2 \approx -2p \cdot \sum_{i=1}^n k_i$. Dio amplitude (1086), koji odgovara ulaznoj fotonskoj liniji s n ubačenih fotona, posumiran po svim permutacijama impulsa glasi

$$\left(-e \frac{p^{\mu_1}}{p \cdot k_1}\right) \left(-e \frac{p^{\mu_2}}{p \cdot k_2}\right) \cdots \left(-e \frac{p^{\mu_n}}{p \cdot k_n}\right) u(p) . \quad (1087)$$

Emisija fotona iz izlaznih i ulaznih linija

Razmotrimo sada dijagram sa n fotona koje su povezane na sve moguće načine na ulaznu odnosno izlaznu elektronsku liniju. Suma doprinosa svih tih dijagrama glasi

$$= \bar{u}(p') i \mathcal{M}_{hard} u(p) \cdot e \left(\frac{p'^{\mu_1}}{p' \cdot k_1} - \frac{p^{\mu_1}}{p \cdot k_1} \right) \times \cdots \times e \left(\frac{p'^{\mu_n}}{p' \cdot k_n} - \frac{p^{\mu_n}}{p \cdot k_n} \right) . \quad (1088)$$

Relaciju je lako dokazati množeći članove u zagradama (ima ih 2^n) i pridjeljujući svakom članu određenu particiju fotonskih linija – tih particija tipa $k + (n - k) = n$ (sa k fotona u ulaznoj i $n - k$ fotona u izlaznoj liniji) ima 2^n i svakoj odgovara $(n - k)!k!$ dijagrama koje odgovaraju svim mogućim permutacijama ubacivanja fotona u danoj particiji u ulaznu odnosno izlaznu liniju.

DZ. Pokažite eksplicite da formula (1088) vrijedi za ubacivanje dva fotona na sve moguće načine.

- Korekcija udarnog presjeka zbog n realnih fotona

Za svaki realni foton moramo posumirati po polarizacijama i pointegrirati po faznom prostoru. Tako za jedan realni foton dobijamo korekciju za faktor Y ,

$$Y \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} (-g_{\mu\nu}) \times e^2 \left(\frac{p'^\mu}{p' \cdot k} - \frac{p^\mu}{p \cdot k} \right) \left(\frac{p'^\nu}{p' \cdot k} - \frac{p^\nu}{p \cdot k} \right) \\ \rightarrow \int_{E_\gamma=\mu}^{E_\ell} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} (-g_{\mu\nu}) \times e^2 \left(\frac{p'^\mu}{p' \cdot k} - \frac{p^\mu}{p \cdot k} \right) \left(\frac{p'^\nu}{p' \cdot k} - \frac{p^\nu}{p \cdot k} \right). \quad (1089)$$

Ako pretpostavimo da je energija fotona veća od μ i manja od E_ℓ , minimalnoj energiji detekcije fotona u eksperimentalnom uređaju (prag detekcije detektora), za Y dobijamo (vidi (918), (919), (920), (921)),

$$Y = \int_{E_\gamma=\mu}^{E_\ell} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} (-g_{\mu\nu}) \times e^2 \left(\frac{p'^\mu}{p' \cdot k} - \frac{p^\mu}{p \cdot k} \right) \left(\frac{p'^\nu}{p' \cdot k} - \frac{p^\nu}{p \cdot k} \right) \\ = \frac{\alpha}{2\pi} I(\vec{v}, \vec{v}') \ln \left(\frac{E_\ell^2}{\mu^2} \right) = \frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \ln \left(\frac{E_\ell^2}{\mu^2} \right). \quad (1090)$$

Faktor (1090) predstavlja faktor korekcije udarnog presjeka zbog jednog mekanog realnog fotona koji se ne observira u detektoru (kutni dio integrala daje $I(\vec{v}, \vec{v}')$, a dk integracija daje logaritam). Za n realnih mekih fotona dobijamo faktor $Y^n/n!$, dakle n Y faktora i dodatni faktor $1/n!$, koji se javlja zato što ne možemo razlikovati mekane neobservirane izlazne realne fotone. Stoga je korekcija udarnog presjeka zbog bilo kojeg broja mekih neobserviranih realnih fotona jednaka,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y^n}{n!} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \exp(Y). \quad (1091)$$

Analiza virtualnih fotona u amplitudi

- Korekcija za jedan virtualan foton

Amplitudu s virtualnim fotonom dobijamo tako da odaberemo bilo koja fotona impulsa k_i i k_j , izjednačimo ih na sljedeći način, $k_j = -k_i \equiv k$, pomnožimo tako dobiveni izraz sa propagatorom fotona i pointegriramo po k i podijelimo sa 2 jer bi inače svaki virtualni foton brojali, tj. uključili dva puta (zamjena $k_i \leftrightarrow k_j$ daje isti dijagram). Tako svaki virtualni foton daje doprinos X

$$X \equiv \frac{e^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} \left(\frac{p'}{p' \cdot k} - \frac{p}{p \cdot k} \right) \cdot \left(\frac{p'}{-p' \cdot k} - \frac{p}{-p \cdot k} \right). \quad (1092)$$

Npr. za amplitudu bez vanjskih fotona i sa jednim fotonom dobijamo,

$$\bar{u}(p')(i\mathcal{M}_{hard})u(p) \cdot X . \quad (1093)$$

Usporedbom sa izrazom za izmjenu jednog virtualnog fotona (1056) u form faktoru F_1 dijagrama vrha (isti IR efekt se mora javljati i u tom dijagramu i u bilo kojem drugom) nalazimo da je

$$X = -\frac{\alpha}{2\pi} f_{IR}(q^2) \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) . \quad (1094)$$

- Mogući problemi

U vezi s (1094) za očekivati je sljedeća dva problema.

a. $\delta F_1(q^2)$ definiran u (1055) i izvrijednjen u (1056) je zapravo dobijen oduzimanjem oduzimanjem vrijednosti $\delta F_1(q^2 = 0)$ (renormalizacijom). Nije jasno da li isti postupak oduzimanja vrijedi u dijagramu n -tog reda.

b. Dijagrami koje razmatramo imaju još dodatne korekcija vanjskih nogu (faktori Z). Pokazuje se međutim (Yennie, Frautschi, Suura) da se spomeniti problemi ne javljaju u punoj analizi razmatranih amplituda.

- Korekcija za m fotona

Ako imamo m fotona, korekcija amplitude će imati m korekcijskih faktora X . Nadalje, budući da virtualne fotone ne možemo razlikovati javlja se dodatni simetrijski faktor $1/m!$,

$$\bar{u}(p')(i\mathcal{M}_{hard})u(p) \rightarrow \bar{u}(p')(i\mathcal{M}_{hard})u(p) \frac{X^m}{m!} . \quad (1095)$$

Ukupna korekcija za bilo koji broj mekanih virtualnih fotona dobija se sumacijom po svim m ,

$$= \text{hard process} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} = \bar{u}(p')(i\mathcal{M}_{hard})u(p) \exp(X) . \quad (1096)$$

Stoga je korekcija udarnog presjeka zbog bilo kojeg broja mekanih virtualnih fotona jednaka

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \exp(2X) . \quad (1097)$$

Kraćenje IR divergencija u bilo kojem redu računa smetnje; dominantni doprinos IR korekcija

Kombinirajući izraze za korekciju udarnog presjeka zbog virtualnih fotona (1097) nalazimo i zbog realnih fotona energije manje od E_ℓ (1091) za mjereni udarni presjek raspršenja elektrona ($e(\vec{p}) \rightarrow e(\vec{p}') +$ bilo koji broj mekanih fotona $k \leq E_\ell$) nalazimo

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{mjereni} &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \times \exp(2X) \times \exp(Y) \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \times \exp\left[-\frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right)\right] \times \exp\left[\frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \ln\left(\frac{E_\ell^2}{\mu^2}\right)\right] \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \times \underbrace{\exp\left[-\frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \left(\frac{-q^2}{E_\ell^2}\right)\right]}_K. \end{aligned} \quad (1098)$$

Primjetimo da korekcijski faktor zavisi o osjetljivosti detektora E_ℓ , ali ne ovisi o IR rezu μ . Stoga je izraz konvergentan. Razvojem izraza u $\mathcal{O}(\alpha)$ redu dobijamo stari rezultat za IR korekciju (1071). Sad međutim je korekcijski faktor K uvijek pozitivan, preciznije $0 \leq K \leq 1$. Izraz (1098) nije precizan jer nisu uključeni ne-dominantni članovi, koji u principu nisu zanemarivi osim ako $-q^2 \gg m^2$.

U limesu $-q^2 \gg m^2$, kada se mogu zanemariti ne-dominantni članovi u korekcijskim faktorima dobijamo precizan izraz

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{mjereni} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \exp\left[-\frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{-q^2}{E_\ell^2}\right)\right]. \quad (1099)$$

U tom limesu vjerojatnost raspršenja bez emisije tvrdog fotona pada brže nego bilo koja potencija q^2 (ima $\sim (q^2)^{\ln q^2}$ ponašanje). Taj eksponencijalni faktor koji sadrži Sudakov-ljev dvostruki logaritam zove se **Sudakov-ljev form faktor**.

Vjerojatnost emisije n mjerljivih mekih fotona i bilo kojeg broja neobservabilnih mekih fotona

Razmotrimo još vjerojatnost emisije bilo kojeg broja fotona između E_- i E_+ od kojih se n observira. Rabeći istu aproksimaciju kao u gornjim izvodima, nalazimo da fazni integral umjesto faktora $\ln(E_\ell/\mu)$ daje faktor $\ln(E_+/E_-)$ (kutni integral se ne mijenja – daje faktor $I(\vec{v}, \vec{v}') = 2f_{IR}(q^2)$) dajući dodatni korekcijski faktor

$$P(n\gamma; E_- \ll E \ll E_+) = \underbrace{\frac{1}{n!} \left[\frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \ln\left(\frac{E_+^2}{E_-^2}\right)\right]^n}_{\text{opažanje } n \text{ fotona}} \underbrace{\exp\left[-\frac{\alpha}{\pi} f_{IR}(q^2) \ln\left(\frac{E_+^2}{E_-^2}\right)\right]}_{\text{neopažanje ostalih fotona}}. \quad (1100)$$

$P(n\gamma; E_- \ll E \ll E_+)$ se može interpretirati kao vjerojatnost emisije n fotona (neopaženi fotoni se ne broje). Izrazi (1100) tvore Poissonovu distribuciju

$$P(n) = \frac{1}{n!} \lambda^n e^{-\lambda}, \quad (1101)$$

gdje je

$$\lambda = \frac{\alpha}{\pi} \ln \left(\frac{E_+}{E_-} \right) I(\vec{v}, \vec{v}') . \quad (1102)$$

Odatle slijedi da je očekivana vrijednost za n jednaka

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} \lambda^n e^{-\lambda} \stackrel{m=n-1}{=} \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \lambda^m e^{-\lambda} = \lambda . \quad (1103)$$

Kako je n broj fotona, formula (1103) zapravo daje očekivanu broja fotona za energije $E_- < E < E_+$. Time je potvrđena interpretacija koja se dobija u klasičnom pristupu emisije mekih fotona pri raspršenju na nabijenoj čestici koju ste/ćete napraviti na vježbama (vidi Peskin pogl 6.1, formula (6.19)).

5.8 Renormalizacija jakosti polja II: Korekcija fermionske linije

Renormalizacija jakosti polja - podsjetnik

U prošlom poglavlju napravili smo neperturbativnu analizu Greenove (korelacijske) funkcije dvaju polja. Na primjeru realnog skalarnog polja pokazali smo da se korelacijska funkcija dva realna polja može prikazati u tzv. Källén-Lehmannovoj spektralnoj reprezentaciji, (876)

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y, M^2), \quad (1104)$$

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2, \quad (1105)$$

gdje je $\rho(M^2)$ tzv. funkcija spektralne gustoće, koja je uvijek pozitivna i uz njen jednočestični član se javlja faktor renormalizacije polja Z

$$\rho(M^2) = 2\pi \delta(M^2 - m^2) \cdot Z + (\text{doprinosi iznad } M^2 \gtrsim (2m)^2), \quad (1106)$$

jednak

$$Z = |\langle \lambda_0 | \phi(0) | \Omega \rangle|^2 . \quad (1107)$$

Spektralna dekompozicija (Fourierov transformat) korelacijske funkcija dva realna polja je

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle &= \int \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (1108)$$

Stoga Fourierov transformat korelacijske funkcije dvaju polja zadrži pol u $p^2 = m^2$ i (ako $\rho(4m^2) \neq 0$) rez koji započinje iznad praga za dvočestično skalarno stanje $p^2 = 4m^2$.

Analogni izrazi postoje i za druga polja. Oni su u višečestičnom sektoru kompliciraniji jer je zbog netrivialne Lorentzove transformacije polja sa spinom $s \neq 0$ posebno više spektralnih funkcija za njihov opis. Međutim jednočestični dio je jednostavan. Npr. za Greenovu funkciju dva Diracova polja se dobija,

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle = \frac{i Z_2 \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \dots \quad (1109)$$

gdje je

$$\langle \Omega | \psi(x) | \lambda_{\vec{p}} \rangle \sim u^s(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (1110)$$

Točkice u (1109) predstavljaju doprinose višečestičnih stanja koji imaju singularitete tipa reza, a Z_2 je faktor renormalizacije spinornog polja, odnosno vjerojatnost da kvantno polje $\psi_A(0)$ iz vakuuma stvori jednočestično svojstveno stanje ukupnog hamiltonijana H ,

$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p). \quad (1111)$$

Perturbativna analiza renormalizacije jakosti polja na primjeru fermionske linije

Neperturbativna analiza izložena u prošlom poglavlju i skicirana u gornjem pod-poglavlju je potpuno općenita. Stoga bi zaključci s obzirom na položaj polova i rezova morali vrijediti potpuno općenito, dakle i u perturbativnom računu. Sada ćemo to eksplicite provjeriti na primjeru korelacijske funkcije dva fermionska polja.

Korelacijska funkcija dva fermionska polja

Korelacijska funkcija dva fermionska polja jednaka je sumi doprinosa sljedećih dijagrama,

$$\langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle = \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \quad \xleftarrow{y} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots \quad (1112)$$

Svaki od tih dijagrama sadrži faktor $e^{ip \cdot (x-y)}$ (vanjske točke, translacijska invarijantnost) i integraciju $\int d^4p / (2\pi)^4$. Mi ćemo gledati Fourierov transformat korelacijske funkcije, pa se ni integral ni spomenuti faktor neće javljati u izrazima.

Mase m i m_0

Prvi doprinos korelacijskoj funkciji dva polja je

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \text{---} \end{array} = \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon}. \quad (1113)$$

Tu smo sa m_0 označili masu koja se javlja u Lagrangijanu. Ta masa se općenito razlikuje od observabilne mase čestice m . Ako vrijedi perturbativni razvoj po konstanti veze, vodeći doprinos za propagator bi morao dobro opisivati točan izraz. Izraz (1113) stvarno i ima pol u m_0 (koji ima i egzaktni propagator ali u m – vidi (1109)), pa je, ako je perturbativni razvoj valjan, za očekivati da je

$$m^2 = m_0^2 + \mathcal{O}(\alpha) . \quad (1114)$$

Drugi doprinos korelacijskoj funkciji

Drugi doprinos korelacijskoj funkciji dolazi od dijagrama korekcije elektronske linije, koji se još zove dijagram vlastite energije (elektrona),

$$\begin{array}{c} p-k \\ \curvearrowright \\ p \quad k \quad p \end{array} = \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} [-i\Sigma_2(p)] \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} , \quad (1115)$$

gdje je

$$-i\Sigma_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m_0)}{k^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{-i}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} . \quad (1116)$$

Notacija Σ_2 (indeks 2 na Σ) označava da se radi o računu u drugom redu računa smetnje. Kako izraz Σ_2 ima IR divergenciju uveli smo malu fotonsku masu μ . Cjelokupan izraz (1115) ima pol drugog reda u $p^2 = m_0^2$. Malo niže vidjet ćemo kako taj pol drugog reda član geometrijskog razvoja koji u sumi doprinosi propagatoru s renormaliziranom masom m .

Račun Σ_2

Izračunajmo sada Σ_2 . Primjenom Feynmanove parametrizacije nalazimo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - x\mu^2 - (1-x)m_0^2 + i\varepsilon]^2} . \end{aligned} \quad (1117)$$

Uvodeći zamjenu $\ell \equiv k - px$, tako da uklonimo linearne članove u nazivniku integraciji po impulsima, nalazimo

$$\begin{aligned} -i\Sigma_2(p) &= -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{-2(\not{\ell} + x\not{p}) + 4m_0}{[\ell^2 + (x-x^2)p^2 - x\mu^2 - (1-x)m_0^2 + i\varepsilon]^2} \\ &= -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x\not{p} + 4m_0}{[\ell^2 - \Delta + i\varepsilon]^2} , \end{aligned} \quad (1118)$$

gdje je

$$\Delta = -x(1-x)p^2 + x\mu^2 + (1-x)m_0^2. \quad (1119)$$

Integral po ℓ je logaritamski divergentan. Divergenciju uklanjamo Pauli-Villarsovom regularizacijom mjenjajući propagator fotona,

$$\frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon}. \quad (1120)$$

Nadalje, primjenom Wickove rotacije i zamjenom integracijske varijable na imaginarnoj osi ℓ^0 s pripadnom Euklidskom varijablom $\ell^0 = i\ell_E^0$ nalazimo

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^2} - \frac{1}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda^2]} \right) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\ell_E^2 \left(\frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2 + \Delta]^2} - \frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2 + \Delta_\Lambda^2]^2} \right) \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{x\Lambda^2}{\Delta} \right). \end{aligned} \quad (1121)$$

U zadnjem koraku smo rabili

$$\Delta_\Lambda = -x(1-x)p^2 + x\Lambda^2 + (1-x)m_0^2 \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} x\Lambda^2. \quad (1122)$$

Tako za $\Sigma_2(p)$ dobijamo

$$\Sigma_2(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - xp) \ln \left(\underbrace{\frac{x\Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2}}_{\Delta} \right). \quad (1123)$$

Analitička struktura $\Sigma_2(p)$

a. Položaj reza

Proučimo analitičku strukturu $\Sigma_2(p)$ u p^2 varijabli. Logaritam u (1123) ima rez kad je $\Delta < 0$. Početak reza je u točki $\Delta = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x)m_0^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2 \\ &= x^2 + x \left(\frac{\mu^2}{p^2} - 1 - \frac{m_0^2}{p^2} \right) + \frac{m_0^2}{p^2}. \end{aligned} \quad (1124)$$

Rješenja te jednadžbe po x su (sjetimo se da je $0 \leq x \leq 1$ – vidi npr. (1123)),

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} \right)^2 - \frac{m_0^2}{p^2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} \pm \frac{1}{2p^2} \sqrt{\lambda(p^2, m_0^2, \mu^2)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} \pm \frac{1}{2p^2} \sqrt{[p^2 - (m_0 + \mu)^2][p^2 - (m_0 - \mu)^2]}, \end{aligned} \quad (1125)$$

gdje smo koristili trokutnu funkciju

$$\begin{aligned}\lambda(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \\ &= (x - y - z)^2 - 4yz = (x - y - z - 2\sqrt{yz})(x - y - z + 2\sqrt{yz}) \\ &= (x - (\sqrt{y} + \sqrt{z})^2)(x - (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2),\end{aligned}\quad (1126)$$

preciznije njen zadnji oblik u jedn. (1126). Početak reza, gledano u p^2 varijabli, se javlja za minimalnu vrijednost p^2 za koju x ima realno rješenje koje zadovoljava $0 \leq x \leq 1$. Realna rješenja (1125) se javljaju kada je $p^2 \leq (m_0 - \mu)^2$ odnosno kada je $p^2 \geq (m_0 + \mu)^2$. U tačkama $p^2 = (m_0 - \mu)^2$ i $p^2 = (m_0 + \mu)^2$ imamo

$$\begin{aligned}p^2 = (m_0 - \mu)^2 &\Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{m_0 + \mu}{m_0 - \mu} > 1, \\ p^2 = (m_0 + \mu)^2 &\Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{m_0 - \mu}{m_0 + \mu} < 1.\end{aligned}\quad (1127)$$

Samo druga tačka zadovoljava uvjet $0 \leq x \leq 1$. Stoga rez započinje u tački u kojoj je

$$E_{CM} = \sqrt{p^2} = m_0 + \mu \equiv E_{prag}, \quad (1128)$$

tj. u tački u kojoj je CM energija jednaka zbroju masa čestica koje međudjeluju. To je tzv. energija praga reakcije (ovdje za elektron i foton) iznad koje se čestice javljaju kao realne čestice. Nadalje, usporedbom sa izrazom za impuls dvaju čestica u CM sustavu, (705), ili rješavanjem jednadžbe $p^2 = E_{CM}^2 = (p_e + p_\gamma)^2$ po CM impulsu fotona tj. elektrona nalazimo da je CM impuls jednak

$$k = \frac{1}{2\sqrt{p^2}} \sqrt{[p^2 - (m_0 + \mu)^2][p^2 - (m_0 - \mu)^2]}. \quad (1129)$$

Stoga je za tačku praga reakcije $k = 0$ (to je alternativna definicija tačke praga). Primjetimo da smo početak reza dobili tačno u tački u kojoj se po Kählén-Lehmanovoj reprezentaciji i očekuje početak reza, $p^2 = (m_0 + \mu)^2$, s time da umjesto fizikalne mase imamo голу masu. Taj je rezultat međutim tačan u najnižem redu računa smetnje.

b. Položaj pola

Po Kählén-Lehmanovoj reprezentaciji očekujemo i pol na mjestu gdje je fizikalna masa. Sada ćemo pokazati da se položaj pola dobija sumacijom beskonačnog skupa Feynmanovih dijagrama.

-Jedno-čestično ireducibilni dijagrami

Jednočestično ireducibilni dijagrami (1PI = engl. one-particle irreducible) su oni koji se ne mogu razdijeliti u dva nezavisna dijagrama rezanjem jedne linije. Npr.

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \text{je 1PI, dok} \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \text{nije.} \quad (1130)$$

Označimo sa $-i\Sigma(p)$ skup svih 1PI dijagrama s vanjske fermionske linije,

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p) &= \text{---} \left(\text{1PI} \right) \text{---} \\
 &= \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \dots \quad (1131)
 \end{aligned}$$

Napomenimo da $-i\Sigma(p)$ ne uključuje dva vanjska propagatora iako su nacrtani – $-i\Sigma(p)$ je amputirani dijagram s dvije vanjske linije. Nadalje, u vodećem redu računa smetnje $\Sigma(p^2) = \Sigma_2(p^2)$.

- Izraz za ukupnu korelacijsku funkciju dva fermionska polja

Fourierov transformat ukupne korelacijske funkcije dva polja možemo zapisati kao sumu doprinosa sa n ubacivanja $-i\Sigma(p)$ u fermionsku liniju,

$$\begin{aligned}
 \int d^4x \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle e^{ip \cdot x} &= \text{---} \left(\text{---} \right) \text{---} \\
 &= \text{---} \text{---} + \text{---} \left(\text{1PI} \right) \text{---} + \text{---} \left(\text{1PI} \right) \left(\text{1PI} \right) \text{---} \dots \\
 &= \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} + \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} (-i\Sigma(\not{p})) \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} + \dots \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0} \right)^n \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})} \quad (1132)
 \end{aligned}$$

U trećem redu jednadžbe (1132) je dan zapis dijagramatskog prikaza u drugom redu. Prvi, drugi, treći ... član tog zapisa ima pol prvog, drugog, trećeg reda u $\not{p} - m_0$ odnosno $p^2 - m_0^2$. Ipak kao što je prikazano u četvrtom redu izraz se može prikazati kao suma geometrijskog reda, koji se svodi na izraz samo sa jednim polom kao što je pokazano u petom redu. Primjetimo da smo u toj proceduri tretirali matricu \not{p} kao običnu varijablu. To možemo napraviti jer i propagatori i $\Sigma(p)$ ovise samo o \not{p} , koja komutira sama sa sobom. Nadalje, primjetite da smo Σ prikazali kao funkciju \not{p} . I to je moguće napraviti jer Σ može zavisiti samo o \not{p} i p^2 , a $p^2 = \not{p}^2$.

- Položaj pola, renormalizacija fermionske linije

Položaj pola u (1132), tj. fizikalna masa m , definiran je jednačbom

$$[\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})] \Big|_{\not{p}=m} = 0 . \quad (1133)$$

Primjetimo da uz definiciju Σ kao u jednačbi (1131) pozitivni Σ daje pozitivan doprinos masi elektrona. U blizini pola nazivnik ima oblik

$$\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p}) \xrightarrow{\not{p} \rightarrow m} (\not{p} - m) \left(1 - \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \right) + \mathcal{O}((\not{p} - m)^2) , \quad (1134)$$

odnosno propagator ima oblik

$$\frac{iZ_2}{\not{p} - m} = \frac{i}{\not{p} - m} \left(1 - \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \right)^{-1} . \quad (1135)$$

Drugim riječima reziduum pola $\not{p} = m$, Z_2 , definiran je sa

$$Z_2^{-1} = 1 - \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} . \quad (1136)$$

Prve korekcije m i Z_2

$\Sigma_2(\not{p})$ je aproksimacija za $\Sigma(\not{p})$ u prvom redu računa smetnje. Stoga iz izraza za $\Sigma_2(\not{p})$, definicije položaja pola (1133) i definicije reziduuma pola (1136) možemo naći pomak u masi i korekciju reziduuma u prvom redu računa smetnje. Za pomak u masi $\delta m \equiv m - m_0$ dobijamo

$$\delta m \stackrel{(1133)}{=} m - m_0 = \Sigma(\not{p} = m) \approx \Sigma_2(\not{p} = m_0) . \quad (1137)$$

Odatle slijedi

$$\delta m \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{3\alpha}{4\pi} m_0 \ln \frac{\Lambda^2}{m_0^2} . \quad (1138)$$

Pogledajmo sada izraz za $\Sigma(\not{p})$. Kako $\Sigma(\not{p})$ ima samo doprinose viših redova u računu smetnje možemo pisati

$$Z_2 = 1 + \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} . \quad (1139)$$

Definirajući $\delta Z_2 = Z_2 - 1$ nalazimo

$$\begin{aligned} \delta Z_2 &= \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \left[-z \ln \left(\frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right) + \frac{2z(1-z)(2-z)m^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right] . \end{aligned} \quad (1140)$$

Usporedimo taj izraz sa izrazom za $\delta F_1(0)$ (1047),

$$\delta F_1(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz(1-z) \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2 z}{m^2(1-z)^2 + z\mu^2} \right) + \frac{m^2(1-4z+z^2)}{m^2(1-z)^2 + z\mu^2} \right], \quad (1141)$$

preciznije pogledajmo izraz za zbroj $\delta Z_2 + \delta F_1(0)$

$$\begin{aligned} \delta F_1(0) + \delta Z_2 &= \frac{\alpha}{2\pi} \left[\int_0^1 \underbrace{dz(1-2z)}_{=d(z-z^2)} \ln \frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} + \int_0^1 dz \frac{m^2(1-z)^2(1+z)}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z} \right] \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \left[\frac{m^2(1-z)^2(1+z)}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z} - (1-z) + \frac{z(1-z)(\mu^2 - 2(1-z)m^2)}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z} \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1142)$$

U prvom redu (1142) je dan zbroj $\delta F_1(0)$ i δZ_2 . Također je naznačeno da se primjenjuje parcijalna integracija na logaritamskom članu. U drugom redu je provedena parcijalna integracija. U trećem redu je taj izraz sređen i pokazuje se da je on jednak nuli (bez primjena bilo kakvih aproksimacija).

Komentari na dobivene rezultate

- Komentari na δm

Perturbativna korekcija mase je beskonačna i to predstavlja problem. Taj problem se može razmatrati sa konceptualog i praktičnog stajališta.

Konceptualno, sa stanovišta elektrodinamike, se očekuje da masa elektrona divergira. U klasičnoj elektrodinamici masa mirivanja svakog naboja se povećava za energiju elektrostatskog polja, a ta energija divergira za točkasti naboj,

$$\int d^3r \frac{1}{2} |\vec{E}|^2 = \int d^3r \frac{1}{2} \left(\frac{e}{4\pi r^2} \right)^2 = \frac{\alpha}{2} \int \frac{dr}{r^2} \sim \alpha \Lambda. \quad (1143)$$

Iz tog izraza se vidi da bi energija elektrona trebala divergirati kao Λ , a ne kao $\ln \Lambda$, pa zapravo začuđuje da je divergencija mase u QED tako slaba. Rješenje tog problema je u **helicitetu**. Zamislimo da je $m_0 = 0$. Tada se lijeva helicitetna stanja elektrona ψ_L ne bi imala čime vezati na desna helicitetna stanja ψ_R , zato jer QED vrh ne mijenja helicitet. Stoga masa mora ostati jednaka nuli i nakon uključivanja međudjelovanja. Jedino "međudjelovanje", tj jedini član u QED Lagrangijanu koji miješa lijeva i desna helicitetna stanja je maseni član. Kada ga uključimo očekujemo da je masa proporcionalna m_0 . Zbog toga divergentni maseni integral gubi jednu dimenziju, tj ima dimenziju jednaku nuli, što odgovara logaritamskom tipu divergencije. Time smo fizikalno objasnili zašto perturbativna korekcija mase u QED može imati samo logaritamsku divergenciju.

Sa stanovišta prakse, beskonačna korekcija u masi pod upitnik stavlja račun smetnje. Npr. amplitude drvastih dijagrama bi trebale sadržati m_0 a ne m . Pri usporedbi s

eksperimentom m_0 u amplitudama se mora zamijeniti s m rabeći relaciju $m_o = m + \mathcal{O}(\alpha)$. Kako je $\mathcal{O}(\alpha)$ korekcija velika, postupak je pod upitnikom. U biti bilo bi puno bolje kada bismo od početka mogli rabiti propagatore $1/(\not{p}-m)$ u izrazima, a ne $1/(\not{p}-m_0)$. Postupak u kojem ćemo presložiti članove u Lagrangijanu tako da se odmah dobija i propagator $1/(\not{p}-m)$ i fizikalni naboj radit ćemo (ako bude vremena) poslije.

- Komentari na Z_2

δZ_2 je također logaritamski divergentan. S druge strane on ima identičnu strukturu kao $\delta F_1(0)$ kojeg smo ad hoc procedurom oduzeli od $F_1(q^2)$ da bismo dobili renormalizirani form faktor $F_1(q^2)$. Preciznije $\delta F_1(0) + \delta Z_2 = 0$ (vidi (1142)). U sljedećem podpoglavlju ćemo opravdati tu relaciju na osnovi LSZ redukcijske formule. Time ćemo opravdati ad hoc renormalizaciju $F_1(q^2)$ form faktora (1042).

5.9 LSZ formalizam i relacije među renormalizacijskim konstantama Z_1 i Z_2

LSZ redukcijska formula – podsjetnik

Evo najbitnijih formula vezanih uz LSZ redukcijski formalizam.

Pregled opet dajemo za skalarna polja. Zaključci izneseni niže pod 1., 2. i 3. uz minimalne modifikacije vrijede za bilo koja polja.

1. Dominantni doprinos Fourierovom transformatu korelacijske funkcije n polja se može prikazati preko matricnog elementa $n-1$ polja između 1-čestičnog stana "out" odnosno "in" stanja koje odgovara n -tom polju i vakuuma, fizikalnog propagatora tog 1-čestičnog stanja (masa koja se javlja u propagatoru je observabilna masa), i renormalizacijske konstante danog "izvađenog" polja,

$$\begin{aligned} & \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(z_1) \phi(z_2) \dots | \Omega \rangle \\ &= \left(\int_{T_+}^{\infty} + \int_{T_-}^{T_+} + \int_{-\infty}^{T_-} \right) dx^0 \int d^3x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(z_1) \phi(z_2) \dots | \Omega \rangle \\ &\equiv I + II + III, \end{aligned} \tag{1144}$$

$$I \quad \overset{p^0 \rightarrow +E_{\vec{p}}}{\sim} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z}_{out} \langle \vec{p} | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \Omega \rangle, \tag{1145}$$

$$III \quad \overset{p^0 \rightarrow -E_{\vec{p}}}{\sim} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{Z} \langle \Omega | T \{ \phi(z_1) \dots \} | \lambda_{-\vec{p}} \rangle_{in}. \tag{1146}$$

2. Na sličan način se mogu i druga polja "pretvarati" u jednočestična stanja. Pri tome treba paziti da stanja nemaju zajedničku fazu (tj. da ne tvore vezano stanje). To se može

osigurati gledajući umjesto običnog Fourierovog transformata (koji daje ravne valove), Fourierov transformat za valne pakete,

$$\int d^4x e^{ip^0 x^0} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{ip^0 x^0} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{k}), \quad (1147)$$

koji se međusobno ne preklapaju izvan područja međudjelovanja. Nakon što se polja pretvore u "in" i "out" stanja i pripadne propagatore i renormalizacijske konstante (pretpostavimo da gledamo proces raspršenja $2 \rightarrow n$),

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3q_i}{(2\pi)^3} \int d^4x_i e^{ip_i^0 x_i^0 - i\vec{q}_i \cdot \vec{x}_i} \phi_i(\vec{q}_i) \prod_{j=1}^2 \int \frac{d^3l_j}{(2\pi)^3} \int d^4y_j e^{-ik_j^0 y_j^0 + i\vec{l}_j \cdot \vec{y}_j} \phi_j(\vec{l}_j) \\ & \times \langle \Omega | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \phi(y_2) | \Omega \rangle \\ & \approx \left(\prod_{i=1, \dots, n} \int \frac{d^3q_i}{(2\pi)^3} \phi_i(\vec{p}_i) \frac{i}{\vec{p}_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \right) \\ & \times \left(\prod_{j=1,2} \int \frac{d^3l_j}{(2\pi)^3} \phi_j(\vec{l}_j) \frac{i}{\vec{k}_j^2 - m_j^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \right)_{out} \langle \vec{q}_1 \dots \vec{q}_n | \vec{l}_1 \vec{l}_2 \rangle_{in}, \end{aligned} \quad (1148)$$

gleda se limes u kojem valni paketi teže u δ funkcije oko impulsa \vec{p}_i formirajući "in" i "out" stanja dobro definiranih impulsa,

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n \int d^4x_i e^{ip_i \cdot x_i} \prod_{j=1}^2 \int d^4y_j e^{-ik_j \cdot y_j} \langle \Omega | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \phi(y_2) | \Omega \rangle \\ & \approx \left(\prod_{i=1, \dots, n} \frac{i}{p_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \right) \left(\prod_{j=1,2} \frac{i}{k_j^2 - m_j^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \right) \\ & \times \text{out} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle_{in}. \end{aligned} \quad (1149)$$

Drugim riječima dominantni član Fourierovog transformata korelacijske funkcije se može izraziti preko S matričnog elementa raspršenja $2 \rightarrow n$, propagatora fizikalnih čestica i renormalizacijskih konstanti polja. To pokazuje da se S matrični element može izračunati iz propadne korelacijske funkcije n polja. Nadalje, pokazuje se da se procedura može provesti i bez kompliciranih Fourierovih transformata s valnim paketima – tj. direktno sa običnim Fourierovim transformatima.

3. Sa stanovišta Feynmanovih dijagrama korelacijskoj funkciji koja odgovara raspršenju $2 \rightarrow n$ odgovara sljedeća amplituda

$$\prod_{j=1}^2 \int d^4x_j e^{-ik_j \cdot x_j} \prod_{i=1}^n \int d^4y_i e^{ip_i \cdot y_i} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \dots \phi(y_n) \} | \Omega \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&\approx \left(\prod_{i=1,2} \frac{iZ}{k_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^n \frac{iZ}{p_j^2 - m_j^2 + i\varepsilon} \right) \times \left(\text{Amp.} \right) . \quad (1150)
\end{aligned}$$

Usporedbom jednadžbi (1149) i (1150) za S matricu slijedi jednakost (907),

$$\text{out} \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle_{in} = \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | S | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = (\sqrt{Z})^{n+2} \times \left(\text{Amp.} \right) . \quad (1151)$$

Jedina modifikacija koja se javlja kada se umjesto skalarnih polja javljaju polja viših spinova jesu dodatne spinorne koeficijentne funkcije kao što su $u^s(p)$, $v^s(p)$, $\bar{u}^s(p)$, $\bar{v}^s(p)$, $\varepsilon_\nu^\lambda(p)$, $\varepsilon_\nu^{\lambda*}(p)$ itd. Te koeficijentne funkcije odgovaraju fizikalnim stanjima, tj. stanjima koje imaju fizikalne mase.

Veza između Z_2 i $\delta F_1(0)$; veza renormalizacijskih konstanti Z_1 i Z_2

Iz (1151) slijedi da je matični element raspršenja elektrona na vanjskom polju (937) dobija dodatnu korekciju iznosa Z_2 zbog renormalizacije vanjskih polja elektrona (klasično vanjsko polje se ne renormalizira)

$$i\mathcal{M}(2\pi)\delta(p^0 - p^0) = -ie\bar{u}(p')Z_2\Gamma^\mu(p', p)u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p) . \quad (1152)$$

Stoga se i izraz (972) mijenja i postaje jednak

$$Z_2\Gamma^\mu(q) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2) . \quad (1153)$$

$F_1(q^2)$ i $F_2(q^2)$ su fizikalne veličine (kao i fizikalna masa, dakle renormalizirani form faktori). Izračunajmo ponovno form faktore u α^1 redu perturbativnog razvoja. F_2 se ne mijenja budući da je njegov prvi član reda α . Budući da je $Z_2 = 1 + \mathcal{O}(\alpha)$, $\Gamma_\mu = \gamma_\mu + \mathcal{O}(\alpha)$, dobijamo

$$\begin{aligned} Z_2 \Gamma^\mu &= (1 + \delta Z_2)(\gamma^\mu + \delta \Gamma^\mu) = \gamma^\mu + \delta \Gamma^\mu + \gamma^\mu \delta Z_2 \\ &= \gamma^\mu (1 + \delta F_1(q^2) + \delta Z_2) + F_2(q^2) \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2m}, \end{aligned} \quad (1154)$$

gdje je $\Gamma^\mu(q)$ amputirani $e - e - \gamma$ vrh. On ima istu spinsku strukturu kao $Z_2 \Gamma_\mu$, jed. (1154) – samo sa Z_2 reskaliranim form faktorima $F_{1,2}(q^2)$. Koristeći relaciju (1142),

$$\delta F_1(0) + \delta Z_2 = 0, \quad (1155)$$

koju smo dokazali u α redu perturbativnog razvoja i identificirajući form faktor uz γ^μ kao $F_1(q^2)$, dobijamo

$$F_1(q^2) = 1 + \delta F_1(q^2) + \delta Z_2 = 1 + [\delta F_1(q^2) - \delta F_1(0)] \quad (1156)$$

(prije smo sa $F_1(q^2)$ označavali samo zbroj prva dva doprinosa $1 + \delta F_1(q^2)$ i uveli ad hoc renormalizaciju oduzimjući $F_1(0)$) što se podudara točno sa renormalizacijskom preskripcijom za $F_1(0)$ danom u jednadžbi (1042),

$$F_1(q^2) \rightarrow F_1(q^2) - F_1(0). \quad (1157)$$

Iz gornjeg razmatranja slijedi da se $F_1(0)$ ne renormalizira u α redu perturbativnog razvoja, tj da vrijedi $F_1(0) = 1$. Međutim za sada nije jasno da se to svojstvo zadržava u bilo kojem redu perturbativnog razvoja.

Problem se može preciznije postaviti na sljedeći način. Definiramo faktor skaliranja (renormalizacije) vrha, Z_1 , relacijom

$$\Gamma^\mu(q=0) = Z_1^{-1} \gamma^\mu \quad (1158)$$

$$(\Gamma^\mu(q^2) = Z_1^{-1} \Gamma_R^\mu(q^2)) \quad \text{A.I.}, \quad (1159)$$

gdje je Γ^μ potpuna amputirana funkcija vrha ($\Gamma_R^\mu(q^2)$) je renormalizirana funkcija vrha). Da bismo dobili $F_1(0) = 1$ mora vrijediti

$$Z_2 \Gamma^\mu(q=0) \stackrel{(1158)}{=} Z_2 (Z_1^{-1} \gamma^\mu) = \gamma_\mu. \quad (1160)$$

Stoga moramo dokazati identitet

$$Z_1 = Z_2, \quad (1161)$$

što znači da se faktor reskaliranja (renormalizacije) vrha egzaktno poništava sa renormalizacijom elektronske valne funkcije. Tu relaciju ćemo dokazati u bilo kojem redu računa

smetnje kada ćemo dokazivati Ward-Takahashi-jev identitet.

Križna simetrija

Primjetimo da LSZ formalizam razlikuje "in" i "out" stanja samo po predznaku nulte komponente impulsa u Fourierovom transformatu p_i^0 (vidi (1145) i (1146)). To znači da se analitičkom kontinuiranom reziduum pola u p^2 od pozitivnog p^0 u negativni p^0 može pretvoriti S matrični element sa česticom $\phi(p)$ u ulaznom stanju u S matrični element sa antičesticom $\phi^*(-p)$ u izlaznom stanju. A to je točno iskaz KRIŽNE SIMETRIJE (koju ste pokazivali na česticama kod Prof. Piceka na dijagramima – dakle perturbativno; vidi također Peskin pogl. 5.4),

$$\langle \cdots \phi(p) | S | \cdots \rangle \Big|_{p=-k} = \langle \cdots | S | \phi^*(-p) \cdots \rangle . \quad (1162)$$

Budući da dokaz LSZ formule ne ovisi o perturbativnom računu smetnje, križna simetrija S matrice je opći rezultat kvantne teorije, a ne svojstvo Feynmanovih dijagrama.

5.10 Optički teorem

U nerelativističkoj fizici vrijedi tzv. **optički teorem** po kojem je imaginarni dio amplitude raspršenja unaprijed (engl. forward scattering) proporcionalan ukupnom udarnom presjeku. Ukupni udarni presjek uključuje i elastične procese i neelastične procese u kojima se dio vjerojatnosti gubi. U relativističkoj fizici u neelastične procese ulazi i tvorba višestičnih konačnih stanja i one bi po analogiji morale odgovarati imaginarnom dijelu nečega što odgovara amplitudi u nerelativističkoj fizici. Imaginarni dio amplitude smo sreli za sada kod korelacijske funkcije dva polja, koja sadrži i jednočestični doprinos (propagator) opisan polom u korelacijskoj funkciji i višestični doprinos opisan rezom u korelacijskoj funkciji. Upravo taj rez daje skok u vrijednosti amplitude unaprijed koji se može povezati s ukupnim udarnim presjekom, vodeći ponovno na **optički teorem u relativističkoj fizici**.

Optički teorem kao posljedica unitarnosti S matrice

- Generalizirani optički teorem

Optički teorem je direktna posljedica unitarnosti S matrice,

$$S^\dagger S = 1 . \quad (1163)$$

Izražavajući S matrice preko T matrice (koja opisuje sva raspršenja) dobija se

$$-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T . \quad (1164)$$

Uzimajući matrični element te jednakosti između dvočestičnih stanja $|\vec{p}_1\vec{p}_2\rangle$ i $|\vec{k}_1\vec{k}_2\rangle$, ubacujući potpun skup stanja na desnoj strani jednadžbe i uzimajući u obzir izraz za matrični element T operatora i T^\dagger operatora preko invarijantnog matričnog elementa,

$$\begin{aligned}\langle b|T|a\rangle &= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_b - p_a)\mathcal{M}_{ba}, \\ \langle b|T^\dagger|a\rangle &= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_b - p_a)\mathcal{M}_{ab}^*,\end{aligned}\quad (1165)$$

nalazimo

$$\begin{aligned}& -i\mathcal{M}_{p_1p_2;k_1k_2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) + i\mathcal{M}_{k_1k_2;p_1p_2}^*(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\ &= (2\pi)^8 \sum_f \int d\Phi_f \mathcal{M}_{\{q_i\};p_1p_2}^* \mathcal{M}_{\{q_i\};k_1k_2} \\ & \quad \times \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n q_i) \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - \sum_{i=1}^n q_i),\end{aligned}\quad (1166)$$

$$\Phi_f \equiv \prod_{i=1}^n \frac{d^3q_i}{(2\pi)^3 2E_i} \quad (1167)$$

(suma po f uključuje sumu po n – to je suma po svim mogućim produktima u sudaru dvaju čestica). Odatle, eliminacijom zajedničke δ funkcije koja predstavlja sačuvanje ukupnog impulsa nalazimo, označavajući $|\vec{k}_1\vec{k}_2\rangle \rightarrow |a\rangle$, $|\vec{p}_1\vec{p}_2\rangle \rightarrow |b\rangle$, $|\{q_i\}\rangle \rightarrow |f\rangle$, i $k_1 + k_2 \rightarrow p_a$, $p_1 + p_2 \rightarrow p_b$ i $\sum_{i=1}^n q_i \rightarrow p_f$ dobijamo

$$i(\mathcal{M}_{ab}^* - \mathcal{M}_{ba}) = \sum_f \int \underbrace{d\Phi_f (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_a)}_{\equiv d\Pi_f \equiv dLIPS_n} \mathcal{M}_{fb}^* \mathcal{M}_{fa}, \quad (1168)$$

s time da obje strane jednadžbe moraju zadovoljavati sačuvanje impulsa $p_a = p_b$. Dobivena relacija predstavlja poopćeni optički teorem. Formula (1168) vrijedi ne samo za $2 \rightarrow 2$ procese već za bilo koje početno stanje $|a\rangle$ i konačno stanje $|b\rangle$, uključivši i jednočestična asimptotska stanja i bilo koja višestetična stanja (broj čestica u početnom i konačnom stanju ne mora biti isti). Ilustracija teorema dana je (Peskin) na slici (po meni s lijeve strane trebala biti razlika amplituda kao u (1168))

- Optički teorem

Ako da su početno i konačno stanje isto dvočestično stanje $|a\rangle = |k_1 k_2\rangle$ izraz sa desne strane prema (700) i (701),

$$d\sigma = \frac{1}{\underbrace{2E_1 2E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}_{4E_{CM} p_{CM}}} \prod_f d\Pi_f |\mathcal{M}(k_1 k_2 \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - \sum_f p_f), \quad (1169)$$

postaje proporcionalan totalnom udarnom presjeku, a izraz sa lijeve strane postaje imaginarni dio amplitude raspršenja unaprijed (raspršenje u kojem su početno i konačno stanje identična),

$$\text{Im}\mathcal{M}(k_1 k_2 \rightarrow k_1 k_2) = 2E_{CM} p_{CM} \sigma_{tot}(k_1 k_2 \rightarrow \text{bilo što}) . \quad (1170)$$

Svi do sada dobiveni rezultati su neperturbativni, tj. ne zavise o perturbativnom razvoju po konstanti/konstantama veze. Dakle vrijedi ne samo za prikaz preko Feynmanovih dijagrama koji odgovaraju članovima u perturbativnom razvoju.

Optički teorem za Feynmanove dijagrame

Sada ćemo razmotriti kako se imaginarni dio S matrice javlja u perturbativnom razvoju. Pokazuje se da su svi matricni elementi (ako nema konstanti vezanja koja su kompleksna) realni osim ako neki od nazivnika propagatora iščezava i tada $i\varepsilon$ preskripcija u propagatorima postaje jako bitna. Nazivnici propagatora iščezavaju kada su čestice na ljusci mase, pa je stoga imaginarni dio S matrice povezan s time da su neke čestice u S matricnom elementu na ljusci mase.

- \mathcal{M} i rezovi

Matrični element \mathcal{M} ćemo definirati preko Feynmanovih pravila i razmatramo je kao funkciju varijable $s = E_{CM}^2$, koja je realna za realne impulse vanjskih čestica. $\mathcal{M}(s)$ ćemo analitički produljiti i razmatrati kao analitičku funkciju kompleksne varijable s .

Pokažimo da pojava imaginarnog člana zahtjeva rez. Neka je s_0 prag reakcije za tvorbu najlakšeg multičestičnog stanja. Stoga je za $s < s_0$ je \mathcal{M} realna funkcija, odnosno vrijedi

$$\mathcal{M}(s) = [\mathcal{M}(s^*)]^* . \quad (1171)$$

gdje konjugacija varijable(s^*) konjugira samu varijablu a druga konjugacija konjugira cjelokupnu funkciju $\mathcal{M}(s)$. Razdvajanjem $\mathcal{M}(s)$ na realni i imaginarni dio dobijamo

$$\text{Re}\mathcal{M}(s) + i\text{Im}\mathcal{M}(s) = \text{Re}\mathcal{M}(s^*) - i\text{Im}\mathcal{M}(s^*) . \quad (1172)$$

Gornji identitet govori o realnosti funkcije, tj. analitičkom produljenju tog svojstva na dio ili cijelu kompleksnu ravninu. Objasnimo to na primjerima danim u sljedećoj tablici

$f(z)$	$f(z^*)$	$[f(z)]^*$	$[f(z^*)]^*$
z	z^*	z^*	z
z^n	$(z^n)^*$	$(z^n)^*$	z^n
$\sin z$	$\sin z^*$	$\sin z^*$	$\sin z$
e^{iz}	e^{iz^*}	e^{-iz^*}	e^{-iz}

Primjetimo da funkcije koje su realne na realnoj osi vrijedi identitet (1171) dok za funkciju koje je kompleksna na realnoj osi, e^{ix} , to ne vrijedi.

DZ. Provjerite gornje relacije raspisom funkcija na realni i kompleksni dio i pažljivom primjenom kompleksne konjugacije na njih. Provjerite je i za $\ln z$.

I lijeva i desna strana identiteta (1171) je analitička funkcija u s , pa se funkcije obadvije strane mogu analitički produljiti na cijelu kompleksnu ravninu i identične su na njoj. Primjenom (1171) u blizini realne osi za realni $s > s_0$ dobijamo

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\mathcal{M}(s + i\varepsilon) &= \operatorname{Re}\mathcal{M}(s - i\varepsilon), \\ \operatorname{Im}\mathcal{M}(s + i\varepsilon) &= -\operatorname{Im}\mathcal{M}(s - i\varepsilon). \end{aligned} \quad (1173)$$

Kako je $\mathcal{M}(s)$ realna za $s < 0$ ona može postati kompleksna samo iznad početka reza $s > s_0$ i tada je funkcija ima skok odnosno diskontinuitet pri prijelazu preko reza jednak dvostrukoj imaginarnoj vrijednosti funkcije neposredno iznad reza

$$\operatorname{Disk}\mathcal{M}(s) = 2i\operatorname{Im}\mathcal{M}(s + i\varepsilon). \quad (1174)$$

Obično je lakše izračunati diskontinuitet amplitude nekog Feynmanovog dijagrama nego sam dijagram. $i\varepsilon$ preskripcija u Feynmanovom propagatoru pokazuje da se fizikalne amplitude raspršenja trebaju računati iznad reza, u $s + i\varepsilon$.

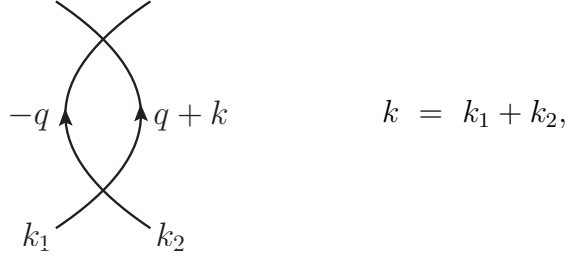
Izračunavanje imaginarnog dijela dijagrama

Do sada smo izračunavali samo imaginarni vlastite energije fotona (koji se javlja iznad energije foton-elektronskog praga). Sada ćemo to isto napraviti za malo općenitije dijagrame. Primjenit ćemo dvije metode na jednostavnom primjeru. **Direktnu metodu** – direktno izračunavanje amplitude i izolacija njenog imaginarnog dijela. **Račun imaginarnog dijela preko Cutkosky pravila.** Cutkosky (R.E.Cutkosky) J. Math. Phys. 1 (1960) 429 je pokazao da je diskontinuitet Feynmanovih dijagrama preko reza dan sa jednostavnim pravilima "rezanja" propagatora. Rezultate dobivene dvama metodama ćemo usporediti i vidjeti da daju isti rezultat.

- Račun diskontinuiteta direktnim izračunavanjem dijagrama

Za početak ćemo provjeriti optički teorem na primjeru u ϕ^4 teoriji. Primjetimo da je prema (1170) desna strana jednadžbe drugog reda u konstanti veze λ . Stoga imaginarni

dio amplitude mora također započinjati sa drugim redom u λ . Zbog toga ćemo razmotriti imaginarni dio amplitude reda λ^2 ,



sa petljom u s kanalu. Vidjet ćemo da analogne petlje u t i u kanalu nemaju singularitet tipa reza. Amplituda tj. i ×amplituda danog Feynmanovog dijagrama glasi

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M} &= \frac{(-i\lambda)^2 i^2}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k) \frac{1}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{p_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(-q)^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{\underbrace{q^2 + 2k \cdot qx + k^2 x - m^2 + i\varepsilon}_{\ell^2 + k^2(x-x^2)}} \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{id^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell_E^2 + \underbrace{m^2 + k^2(x^2 - x)}_{\Delta}]^2} \\
&\rightarrow \frac{i\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{\mu^{4-D} d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \\
&= \frac{i\lambda^2}{2(4\pi)^2} \int_0^1 dx \underbrace{\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi + \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \ln \frac{\Delta}{m^2} \right)}_{\text{konst} \in \mathbf{R}}. \tag{1175}
\end{aligned}$$

U jedn. (1175) napravili smo sljedeće. U prvom redu dali smo prikaz preko dvostrukog integrala koji će nam trebati kada ćemo primjenjivati Cutkosky pravila za nalaženje imaginarnog dijela amplitude. U drugom smo napisali standardi zapis koji je ekvivalentan prvom. U trećem smo primjenili Feynmanovu parametrizaciju (i odmah pointegrali po jednom od dva parametra o kojem amplituda ne ovisi preko δ funkcije. Također smo impulsno zavisni dio sveli na potpuni kvadrat. U četvrtom smo primjenili Wickovu rotaciju, odbacili nepotrebni $i\varepsilon$, uveli 4-impuls u Euklidskom prostoru i uveli oznaku Δ . Primjetimo da ako je $k^2 < 0$, što se dešava u petlji sa t ili u kanalom Δ je uvijek veći od nule. Dobiveni integral je logaritamski divergentan. U petom retku smo regularizirali integral metodom dimenzijske integracije. U šestom smo izvrijednili integral preko Euklidskog 4-impulsa i razvili ga po $\varepsilon = 4 - D$ do nultog člana u razvoju. Također smo uočili konstantni član i da je on realan. S druge strane u izrazu se javlja logaritam funkcije Δ/m^2 koja

može biti manja od nule samo u s kanalu. Zbog toga amplitude u t i u kanalu nemaju niti praga reakcije niti imaginarnih dijelova. Imaginarni dio amplitude se javlja samo ako je Δ/m^2 manji od nule, odnosno ako

$$1 + \frac{k^2}{m^2} \underbrace{(x^2 - x)}_{<0} \equiv \frac{k^2}{m^2} \underbrace{(x - x_1)(x - x_2)}_{>4} \leq 0, \\ x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}. \quad (1176)$$

Imaginarni dio logaritma malo iznad i malo ispod realne q^2 osi dobijamo uvrštavajući $q^2 \pm i\varepsilon$ u Δ ,

$$i\text{Im} \ln \frac{\Delta(x, k^2 \pm i\varepsilon)}{m^2} = \theta(x_1 - x)\theta(x - x_2)(\mp i\pi). \quad (1177)$$

Odatle, rabeći (1174) za diskontinuitet preko reza i uvrštajući je u izraz za \mathcal{M} iz (1175) dobijamo

$$\text{Disk}\mathcal{M}(k^2) = 2i\text{Im}\mathcal{M}(k^2 + i\varepsilon) \\ = 2 \int_{x_2}^{x_1} \frac{\lambda^2}{2(4\pi^2)} \left(-(-i\pi) \right) \\ = \frac{i\lambda^2\pi}{(4\pi)^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}. \quad (1178)$$

- Cutkosky-jeva pravila

Prema Cutkoskyjevim pravilima ako je dana amplituda

$$i\mathcal{M} = \int \prod_{i=1}^N \left(\frac{d^4k_i}{(2\pi)^4} \right) \frac{B(k_1, \dots, k_N)}{\prod_{i=1}^N (p_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon)}, \quad (1179)$$

gdje je $B(k_1, \dots, k_n)$ bilo kakav polinom u 4-impulsima k_i (on predstavlja npr. brojnikе svih propagatora, ali može biti bilo što drugo), i ako je $p_i^2 - m_i^2 = 0$ za $i \leq m$ (tj. čestice $1, \dots, m$ su na ljusci mase), tada je diskontinuitet dijagrama jednak

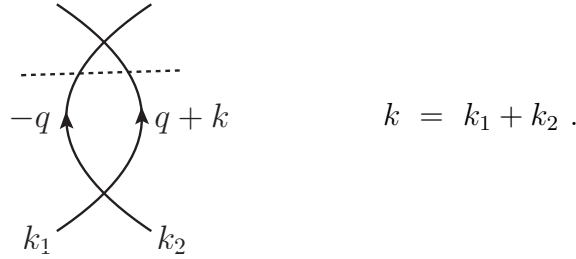
$$\text{Disk } i\mathcal{M} = (-2\pi i)^m \int \prod_{i=1}^N \left(\frac{d^4k_i}{(2\pi)^4} \right) \frac{B(k_1, \dots, k_N) \prod_{l=1}^m \delta(k_l^2 - m_l^2)}{\prod_{j=m+1}^N (p_j^2 - m_j^2 + i\varepsilon)}. \quad (1180)$$

Da bi se dobio potpuni diskontinuitet dijagrama treba naći skup svih vrijednosti impulsa $\{k_i\}$ sa koje može istovremeno biti zadovoljena relacija tipa $p_i^2 - m_i^2 = 0$ za $i \leq m$. Spomenute relacije se nalaze pravilima rezanja dijagrama. Pri tome mora biti zadovoljena kauzalnost. Rez preko dijagrama definira propagatore koji su na ljusci mase i za koje se

javlja $\delta(k_l^2 - m_l^2)$ funkcija. Ostali propagatori nisu na ljusci mase.

- Račun diskontinuiteta preko Cutkosky pravila

Dijagram na gornjoj slici se može presjeći samo na jedan način i to tako da se presjeku obje linije u petlji,



Time za diskontinuitet $i\mathcal{M}$ dobijamo

$$\begin{aligned} \text{Disk } i\mathcal{M} &= (-2\pi i)^2 \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{dp_1^4}{(2\pi)^4} \frac{dp_2^4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k) \\ &\times \underbrace{\delta(p_1^2 - m^2)}_{\frac{1}{2E_1} \delta(p_1^0 - E_1)} \underbrace{\delta(p_2^2 - m^2)}_{\frac{1}{2E_2} \delta(p_2^0 - E_2)} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{dp_1^3}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{dp_2^3}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k) \underbrace{\lambda^2}_{=|\mathcal{M}|^2} \end{aligned} \quad (1181)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{4\pi E_1 p_1 dE_1}{(2\pi)^2 2E_1 2E_2} \delta(E_1 + \underbrace{E_2}_{=E_1} - \underbrace{k^0}_{=-\sqrt{k^2}}) \\ &= -\frac{\lambda^2 \pi}{(4\pi)^2} \underbrace{\frac{p_1}{E_1}}_{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}} = -\frac{\lambda^2 \pi}{(4\pi)^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}. \end{aligned} \quad (1182)$$

U prvoj jednakosti smo primjenili prvu od jednakosti (1175) s time da smo, prema Cutkoskyjevim pravilima, zamijenili nazivnike propagatora sa $-2\pi i \delta(p_i^2 - m_i^2)$. U drugoj jednakosti (označenoj s (1181)) smo integrirali preko nultih komponenti 4-impulsa uzimajući u obzir da je $k^0 > 0$ (i stoga $p_i^0 > 0$). Ta jednadžba (treba lijevu i desnu stranu pomnožiti s $-i$) je ujedno i potvrda optičkog teorema (1168) odnosno (1170) u drugom redu računa smetnje u ϕ^4 teoriji. U trećoj jednakosti smo integrirali po $d^3 p_2$. Naznačeno je i da dokaz provodimo u CM sustavu (zbog toga je, kako su mase čestica iste, $E_1 = E_2$). U četvrtoj, (1182) smo pointegrirali po dE_1 i sredili izraz. Množeći lijevu i desnu stranu jednadžbe s $-i$ dobijamo izraz,

$$\text{Disk } \mathcal{M} = \frac{i\lambda^2 \pi}{(4\pi)^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}. \quad (1183)$$

koji se podudara se izrazom (1178) dobivenim direktnim izračunavanjem. Time smo potvrdili Cutkoski formulu (1180). Primjetimo da je dobiveni rezultat u skladu s optičkim teoremom (1169): ako u (1169) uvrstimo izraz za udarni presjek (726) dobijamo izraz za diskontinuitet (1178) odnosno (1183):

$$\begin{aligned} Diski\mathcal{M} &= 2i\Im\mathcal{M} = 2i \times 2E_{CM}p_{CM}\sigma_{TOT} \\ &= 4iE_{CM}p_{CM} \times \frac{\lambda^2}{32\pi E_{CM}^2} = \frac{i\lambda^2\pi}{(4\pi)^2}. \end{aligned} \quad (1184)$$

- Napomena o dokazu optičkog teorema

Napomenimo da je rabeći Cutkosky pravila moguće dokazati optički teorem u bilo kojem redu računa smetnje.

Nestabilne čestice

Iz Cutkoski pravila (tj. pravila rezanja dijagrama) slijedi da (generalizirani?) optički teorem vrijedi ne samo za S matrične elemente, već i za bilo koje amplitude koje se mogu definirati preko Feynmanovih pravila. To je korisno kada se barata sa nestabilnim česticama koje se nikad ne javljaju kao asimptotska stanja (po definiciji S matrični element sadrži samo asimptotska stanja).

Prisjetimo se izraza za potpuni (bozonski) propagator (potpunu korelacijsku funkciju dva polja) (903)

$$\text{---} \circ \text{---} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)}. \quad (1185)$$

Tu smo definirali sa $-iM^2(p^2)$ sumu svih amputiranih 1PI umetaka (dijagrama koji se umeću) u bozonski propagator. Međutim o toj korelacijskoj funkciji smo mogli razmišljati kao o S matričnom elementu za "raspršenje" jedne čestice u jednu česticu, $\mathcal{M}(p \rightarrow p)$ koje je prema LSZ formuli (907) sa potpunim skupom amputiranih dijagrama $-iM(p^2)$ vezano relacijom

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}(p \rightarrow p) &= Z \times (-iM^2(p^2)), & \text{odnosno} \\ \mathcal{M}(p \rightarrow p) &= -ZM^2(p^2). \end{aligned} \quad (1186)$$

Upotrebom optičkog teorema (1168) odnosno (1170) sada možemo analizirati imaginarni dio $M^2(p^2)$.

Nama je već poznat slučaj kada je skalarni bozon stabilna čestica koja nema mogućeg konačnog stanja u koji bi se skalarni bozon mogao raspadati i zbog toga je $M^2(p^2)$ realan. Položaj pola propagatora definiran je jednačbom

$$m^2 - m_0^2 - M^2(m^2) = 0, \quad (1187)$$

i on ima realno rješenje za fizikalnu masu m . Pol leži na realnoj osi i ispod praga reakcije za višestruka stanja u kojem započinje rez u p^2 .

Za česticu koje se raspada u dvije i više čestica $M^2(p^2)$ ima i imaginarni dio i tada se mora modificirati jednačina/uvjet koja definira pol, odnosno masu m , na sljedeći način,

$$m^2 - m_0^2 - \text{Re}M^2(m^2) = 0. \quad (1188)$$

U tom slučaju je propagator definiran sa

$$\begin{aligned} \text{---} \bigcirc \text{---} &\sim \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \text{Re}M^2(p^2) - i\text{Im}M^2(p^2)} \\ &= \frac{i}{\underbrace{p^2 - m_0^2 - \text{Re}M^2(m^2)}_{-m^2} - (p^2 - m^2)(\text{Re}M^2)'(m^2) - i\text{Im}M^2(p^2)} \\ &= \frac{i}{(p^2 - m^2) \underbrace{(1 - (\text{Re}M^2)'(m^2))}_{1/Z} - i\text{Im}M^2(p^2)} \\ &= \frac{iZ}{p^2 - m^2 - iZ\text{Im}M^2(p^2)}, \end{aligned} \quad (1189)$$

i njegov pol se ne nalazi više na realnoj osi. Ako se takav propagator javlja u s kanalu danog Feynmanovog dijagrama, udarni presjek u blizini pola ima sljedeću zavisnost o s

$$\sigma \propto \left| \frac{1}{s - m^2 - iZ\text{Im}M^2(s)} \right|^2. \quad (1190)$$

Taj oblik podjeća na Breit-Wignerovu formulu za udarni presjek u blizini rezonance,

$$\sigma \propto \left| \frac{1}{p^2 - m^2 + im\Gamma} \right|^2. \quad (1191)$$

gdje je masa definirana položajem rezonance (1188). Ako je $\text{Im}M^2(m^2)$ malen u usporedbi sa m^2 , tj. **rezonanca (1190) je uska**, možemo aproksimirati $\text{Im}M^2(s) \approx \text{Im}M^2(m^2)$ za cijelo područje vrijednosti rezonance (tj s vrijednosti u kojima je rezonanca velika). Tada (1190) ima Breit-Wignerov oblik i tada možemo identificirati širinu raspada Γ sa

$$\Gamma = -\frac{Z}{m}\text{Im}M^2(m^2). \quad (1192)$$

Ako je rezonanca široka, javljaju se odstupanja oblika rezonance od Breit Wignerove forme (1191). Općenito je početni dio rezonance (dio za koji je $s < m^2$) uži od završnog dijela rezonance (dio za koji je $s > m^2$).

Da bismo izračunali $\text{Im}M^2(p^2)$ u (1192) M^2 mogli smo shvatiti $M^2(p^2)$ kao sumu svih 1PI dijagrama umetnutih u propagator. Taj bi račun bio općenito dugotrajan i

težak. Uporaba optičkog teorema (1168) odnosno (1170) i primjena Cutkoski pravila olakšava taj račun. Primjenom veze M^2 i S matričnog elementa za $1 \rightarrow 1$ raspršenje $\mathcal{M}(p \rightarrow p)$ te (1186) te optičkog teorema (1168) odnosno (1170) koji povezuje S matrični element raspršenja unaprijed $\text{Im}\mathcal{M}(p \rightarrow p)$ s matričnim elementima "raspršenja" (zapravo raspada) $\text{Im}\mathcal{M}(p \rightarrow f)$,

$$Z\text{Im}M^2(p^2) = -\text{Im}\mathcal{M}(p \rightarrow p) = -\frac{1}{2} \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(p \rightarrow f)|^2, \quad (1193)$$

te formule (1192) za širinu raspada nalazimo

$$\Gamma = \frac{1}{2m} \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(p \rightarrow f)|^2. \quad (1194)$$

Ta formula se podudara sa formulom za širinu raspada (710) koju smo uveli ad hoc i bez dokaza ranije. Ovdje smo je dokazali.

Na kraju napomenimo da formula (1193) vrijedi samo za uske rezonance, odnosno dugoživuće čestice za koje vrijedi $\Gamma \ll m$. Za široke rezonance se puna $M^2(p^2)$ zavisnost mora uzeti u obzir.

5.11 Ward-Takahashi-jev identitet

Sada ćemo dokazati Ward-ov identitet na nekoliko načina.

Peskinov način

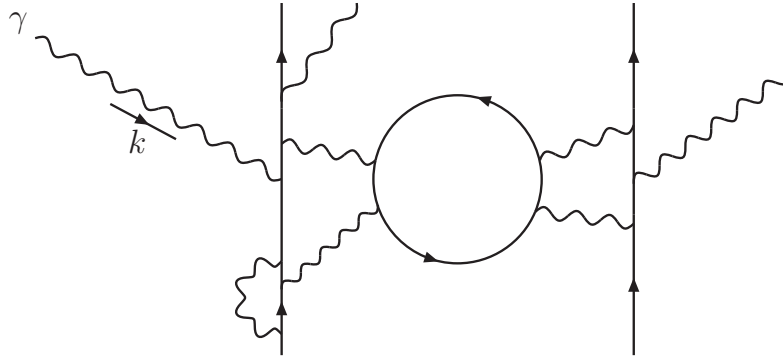
Po Peskinu ako je $\varepsilon_\mu(k)\mathcal{M}^\mu(k)$ amplituda nekog QED procesa s fotonom impulsa k , tada amplituda iščezava ako se ε_μ zamijeni s k_μ

$$k^\mu \mathcal{M}_\mu(k) = 0. \quad (1195)$$

Peskin tu relaciju naziva **Ward-ovim identitetom**.

Da bismo dokazali tu relaciju, dokazat ćemo malo općenitiju relaciju za QED korelacijske funkcije tzv. **Ward-Takahashijev identitet**. On vrijedi za poopćenje matričnog elementa \mathcal{M} kada vanjske linije nisu nužno na ljusci mase, drugim riječima za korelacijsku funkciju, ne za matrični element.

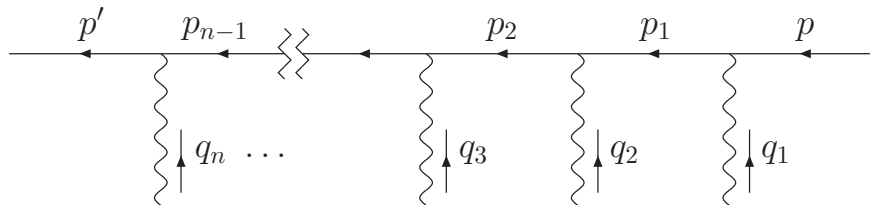
Amplituda \mathcal{M}_μ za koju vrijedi Ward-Takahashijev identitet nema doprinos od samo jednog Feynmanovog dijagrama. Npr. zamislimo da imamo Feynmanov dijagram



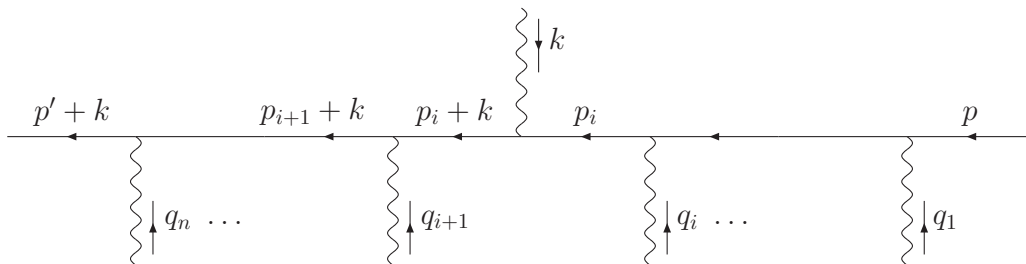
sa fotonom impulsa k . Onda ukupnu amplitudu \mathcal{M}_μ dobijamo ubacivanjem fotona impulsa k na sve linije na koje se može on vezati. Zamjenom polarizacije fotona sa njegovim 4 impulsom dobija se Ward-Takahashijev identitet koji ćemo dolje dokazati. Ubacivanje fotona na sve moguće linije na koji se foton može vezati jednostavnije je predočiti preko Feynmanovog dijagrama \mathcal{M}_0 koja se dobija uklanjanjem fotona iz amplitude na prethodnoj slici i ubacivanjem fotona u sve linije dijagrama \mathcal{M}_0 na koje se foton može vezati. Ward-Takahashijev identitet vrijedi samo za ukupnu sumu doprinosa svih tih dijagrama.

Foton se u dijagram \mathcal{M}_0 može ubacivati u linije dijagrama \mathcal{M}_0 koje su povezane sa dvije vanjske točke i u linije koje čine unutarnju petlju. Ta dva slučaja ćemo zasebno tretirati.

Prvo ćemo razmotriti liniju koja povezuje dvije vanjske točke. Neka prije ubacivanja fotona ona ima oblik



Elektronski propagatori imaju impulse p , $p_1 = p + q_1$, $p_2 = p_1 + q_2$, \dots , $p' = p_{n-1} + q_n$, dakle pretpostavili smo da ima n vrhova. Ubacimo foton impulsa k npr. iza i -tog vrha:



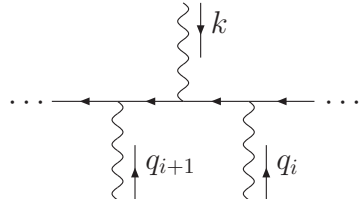
Time elektronski propagatori lijevo od novo ubačenog fotona imaju impulse uvećane za k . Zamijenimo polarizaciju novog fotona $\varepsilon_\mu(k)$ sa k_μ . Produkt k_μ sa novim vrhom možemo pisati

$$-iek = -ie[(\not{p}_i + \not{k} - m) - (\not{p}_i - m)] . \quad (1196)$$

Množeći taj izraz sa propagatorima susjednih elektrona dobijamo

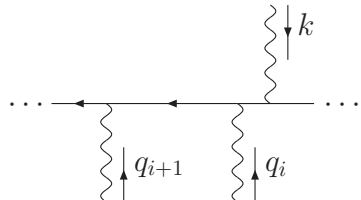
$$\frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} (-iek) \frac{i}{\not{p}_i - m} = e \left(\frac{i}{\not{p}_i - m} - \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} \right) . \quad (1197)$$

Time dijagram s fotonom ubačenim iza i -tog vrha postaje



$$= \dots \left(\frac{i}{\not{p}_{i+1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{i}{\not{p}_i - m} - \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_i} \times \left(\frac{i}{\not{p}_{i-1} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i-1}} \dots . \quad (1198)$$

Analogno za dijagram sa ubacivanjem fotona iza $i - 1$ vrha dobija se



$$= \dots \left(\frac{i}{\not{p}_{i+1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_i} \times \left(\frac{i}{\not{p}_{i-1} - m} - \frac{i}{\not{p}_{i-1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i-1}} \dots . \quad (1199)$$

Primjetimo da član sa ubacivanjem nakon i -tog vrha ima jedan član sa propagatorima $\geq i + 1$ uvećanim za k i jedan sa propagatorima $\geq i$ uvećanim za k , dok član sa ubacivanjem prije i -tog vrha ima jedan član sa propagatorima $\geq i$ uvećanim za k i jedan sa propagatorima $\geq i - 1$ uvećanim za k . Prvi član iz (1199) (sa propagatorima $\geq i$ uvećanim za k) krati se sa drugim članom iz (1198) (sa propagatorima $\geq i$ uvećanim za k). Slično poništenje se javlja za sve sukcesivna ubacivanja fotona. Suma po svim doprinosima ubacivanja fotona ostavlja neponištene samo članove na krajevima sume, jedan u kojem su svi impulsi propagatora uvećani za k koji se javlja s negativnim predznakom i drugi u

kojem niti jedan impuls nije uvećan za k . Dijagramatski prikaz tog rezultata je

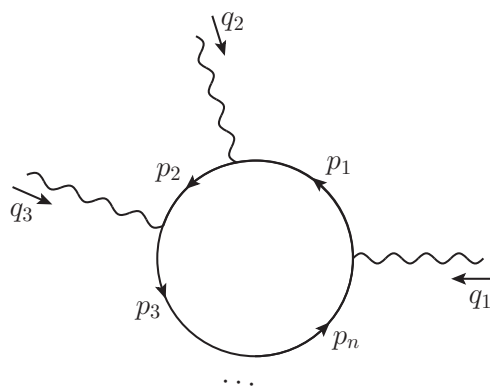
$$\sum_{\text{točke ubacivanja}} k_\mu \left(\begin{array}{c} p' + q \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ p \end{array} \right) = e \left(\begin{array}{c} p' \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ p \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} p' + k \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ p + k \end{array} \right) . \quad (1200)$$

Na lijevoj strani jednadžbe (1200) ulazni impuls je p a izlazni $p' + k$. Prema LSZ formuli, iz svakog dijagrama možemo izvući doprinos S matrici kao koeficijent produkta polova

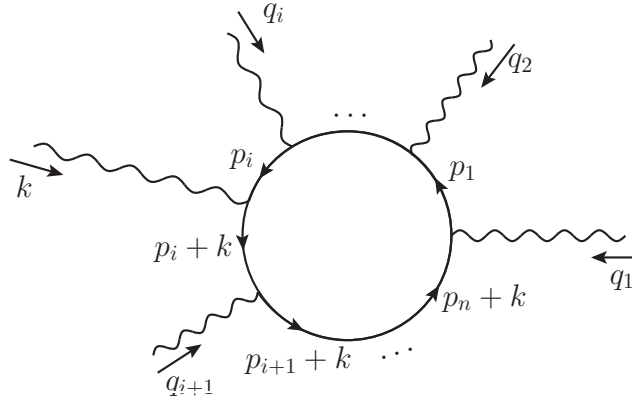
$$\left(\frac{i}{\not{p}' + \not{k} - m} \right) \left(\frac{i}{\not{p} - m} \right) . \quad (1201)$$

Na lijevoj strani jednadžbe (1200) matricni element sadrži oba pola. Međutim na lijevoj strani jednadžbe svaki član sadrži samo jedan pol, ne obadva, pa niti jedan od ta dva člana ne može doprinositi S matrici. Primjetite također ako lijeva strana jednadžbe (1200) zadovoljava zakon sačuvanja impulsa, da članovi na desnoj strani jednadžbe ne mogu zadovoljavati zakon sačuvanja impulsa.

Razmotrimo sada slučaj kada se foton veže na unutarnju elektronsku petlju. Prije ubacivanja fotona tipična linija ima oblik



Elektronski propagatori imaju impulse $p_1 = q_1 + p_n$, $p_1 + q_2 = p_2$, \dots , $p_{n-1} + q_n = p_n$. Ubacimo foton $\gamma(k)$ između i -tog i $i + 1$ -vog vrha,



Time svaki propagator iza i -tog vrha ima dodatni impuls k koji cirkulira petljom. Po konvenciji impuls k izlazi (iscuri) u vrhu 1. (Komentar Amon : Ovdje impulsi nisu svi impulsi jednaki kao na prethodnom dijagramu (bez ubacivanja fotona impulsa k) zbog toga jer suma svih ulaznih impulsa u petlju mora biti jednaka nuli – barem se jedan od njih morao promijeniti, npr. $q_1 \rightarrow q_1 - k$. Ono što je u analizi bitno jest da je $q + \sum q_i = 0$ i za sva moguća umetanja fotona između vrhova držimo impulse q_1, \dots, q_n nepromjenjenim. Tada se može postaviti i konvencija da u prvom vrhu imamo kao impuls ulaznog propagatora $p_n + k$ a kao impuls izlaznog p_1 . Ta konvencija neće utjecati a konačni rezultat.)

Računamo doprinos dijagrama s ubačenim fotonom zamjenjujući (kao i prije) polarizaciju fotona pripadnim impulsom. Za dijagram s umetanjem fotona između vrha 1 i 2 primjenom jednakosti (1197) nalazimo

$$-e \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\left(\frac{i}{\not{p}_n + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \dots \left(\frac{i}{\not{p}_2 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_2} \left(\frac{i}{\not{p}_1 - m} - \frac{i}{\not{p}_1 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_1} \right]. \quad (1202)$$

Suma svih doprinosa sa ubacivanjima između i -tog i $i + 1$ -vog člana daje opet samo dva člana,

$$-e \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\left(\frac{i}{\not{p}_n - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \dots \left(\frac{i}{\not{p}_2 - m} \right) \gamma^{\lambda_2} \left(\frac{i}{\not{p}_1 - m} \right) \gamma^{\lambda_1} \right. \\ \left. - \left(\frac{i}{\not{p}_n + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \dots \left(\frac{i}{\not{p}_2 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_2} \left(\frac{i}{\not{p}_1 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_1} \right]. \quad (1203)$$

Pomakom za k u integracijskoj varijabli dobijamo kraćenje preostala dva člana. Stoga je doprinos zatvorenih dijagrama na ubacivanje fotona jednak nuli. U principu integral po petlji može divergirati. Tada momak u integracijskoj varijabli nije dozvoljen i tada dokaz Wardovog identiteta može biti netočan. Takav ćemo primjer vidjeti poslije. Za sada pretpostavimo da je pomak u integracijskoj varijabli moguć, tj. da nema doprinosa amplitudi zbog ubacivanja dodatnog fotona u petlju.

(Komentar Amon: Ako imamo QED fermionsku petlju ona zbog C invarijantnosti može postojati samo za paran broj ulaznih fotona. Dodavanje dodatnog fotona nužno vodi na amplitudu jednaku nuli.)

Sada možemo dokazati Ward-Takahashi-jev identitet. Pretpostavimo da imamo amplitudu $\mathcal{M}(k; p_1, p_2 \dots p_n; q_1, q_2, \dots q_n)$ sa n ulaznih fermionskih linija impulsa p_i i n izlaznih fermionskih linija impulsa q_i , te sa bilo kojim brojem vanjskih fotona plus fotonom ulaznog impulsa k ,

$$\mathcal{M}(k; p_1, p_2 \dots p_n; q_1, q_2 \dots q_n) = \text{diagram} \quad (1204)$$

Označimo sa \mathcal{M}_0 amplitudu koja se iz amplitude \mathcal{M} dobija uklonjenjem vanjskog fotona $\gamma(k)$. Da bismo dobili $k_\mu \mathcal{M}^\mu$ moramo u \mathcal{M}_0 ubaciti foton $\gamma(k)$ na sve moguće načine i posumirati po njima. Ostaju doprinosi samo od linije koje se protežu između dvije vanjske točke. Primjenom jedn. (1200) dobijamo

$$\sum_{\text{točke ubacivanja}} k_\mu \cdot \left(\text{diagram} \right) = e \sum_i \left(\text{diagram}_1 - \text{diagram}_2 \right) \quad (1205)$$

odnosno

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k; p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n) = e \sum_i [\mathcal{M}_0(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_i - k, \dots, q_n) - \mathcal{M}_0(p_1, \dots, p_i + k, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)] \quad (1206)$$

To je Ward-Takahashi-jev identitet za korelacijske funkcije u QED. Za poseban slučaj kada lijeva strana jednadžbe zadovoljava uvjete da bi mogla doprinositi S matričnom elementu, desna strana ne može doprinositi S matričnom elementu i stoga desna strana mora biti jednaka nuli. Tada se jednadžba (1206) svodi na Wardov identitet.

Najjednostavniji slučaj Ward-Takahashi-jevog identiteta uključuje na desnoj strani korelacijsku funkciju tri polja sa jednim ulaznim i jednim izlaznim elektronom i jednim

vanjskim fotonom,

$$k_\mu \cdot \left(\begin{array}{c} \mu \text{ wavy line } \rightarrow \\ \text{circle with } p \text{ and } p+k \text{ lines} \end{array} \right) = e \left(\begin{array}{c} \text{circle with } p \text{ and } p \text{ lines} \\ - \\ \text{circle with } p+k \text{ and } p+k \text{ lines} \end{array} \right). \quad (1207)$$

Na desnoj strani jednadžbe se javljaju potpuni elektronski propagatori izračunati za impulse p odnosno $p+k$. Označimo ih sa $S(p)$ i $S(p+k)$. Oni su dani sa (1132),

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})}. \quad (1208)$$

Amplituda potpune korelacijske funkcije tri polja može se prikazati preko potpunih propagatora i pripadne amputirane funkcije, $\Gamma^\mu(p, p+k)$. Time Ward-Takahashi-jev identitet (1207) postaje jednak

$$S(p+k)[-iek_\mu \Gamma^\mu(p+k, p)]S(p) = e(S(p) - S(p+k)). \quad (1209)$$

Množeći relaciju (1209) s lijeva s $S^{-1}(p+k)$ i s desna s $S^{-1}(p)$ dobijamo

$$-iek_\mu \Gamma^\mu(p+k, p) = e(S^{-1}(p+k) - S^{-1}(p)). \quad (1210)$$

Često se ovaj specijalan slučaj naziva Ward-Takahashi-jevim identitetom.

Primjenom identiteta (1210) može se dobiti relacija između renormalizacijskih faktora Z_1 i Z_2 , $Z_1 = Z_2$. Z_1 je po jedn. (1158) definiran amputiranom funkcijom $\Gamma^\mu(p+k, k)$ u limesu $k \rightarrow 0$,

$$\Gamma^\mu(p+k, p) \xrightarrow{k \rightarrow 0} Z_1^{-1} \gamma^\mu, \quad (1211)$$

a Z_2 je definira kao reziduuum $S(p)$ funkcije,

$$S(p) \sim \frac{iZ_2}{\not{p} - m}. \quad (1212)$$

Uvrštavajući (1211) i (1212) u (1210) dobijamo

$$\begin{aligned} -ik_\mu (Z_1^{-1} \gamma^\mu) &= -iZ_2^{-1}((\not{p} + \not{k} - m) - (\not{p} - m)) \\ &= -iZ_2^{-1} \not{k}, \end{aligned} \quad (1213)$$

odnosno

$$Z_1 = Z_2. \quad (1214)$$

Stoga, Ward-Takahashi-jev identitet garantira potpuno poništavanje beskonačnih renormalizacijskih faktora u elektronskoj amplitudi raspršenja Z_1 i Z_2 . Prema (1153), (1153-1158) i (1158) to osigurava jednakost

$$F_1(0) = 1 \quad (1215)$$

u svim redovima računa smetnje.

Često se pojmovi Wardov identitet, sačuvanje struje i baždarana invarijantnost naizmjenu rabe (kao isti pojam). To je prirodno jer je Wardov identitet dijagramatski prikaz sačuvanja struje, a sačuvanje struje je posljedica baždarne invarijantnosti (slijedi iz $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$, odnosno baždarne invarijantnosti QED Lagrangijana).

5.12 Renormalizacija električnog naboja

Od svih radijativnih korekcija u najnižem redu računa smetnje, preostala je još samo jedna koja odgovara dijagramu



$$(1216)$$

To je tzv. **dijagram vakuumske polarizacije** ili **dijagram vlastite energije fotona** u redu α perturbativnog razvoja. Može se shvatiti kao modifikacija fotonskog propagatora zbog tvorbe virtualnog e^+e^- para. Taj dijagram mijenja efektivno fotonsko polje $A_\mu(x)$ na kojem se raspršuje elektron, mijenja jakost tog polja i mijenja njegovu ovisnost o x .

Renormalizacija naboja – struktura

- 1-čestično ireducibilni dijagram 2 fotona, $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$

Prije nego započnemo sa eksplicitnim računom izraza pogledat ćemo njihovu strukturu i kako ih možemo interpretirati. Interesantni dio dijagrama (1216) je elektronska petlja,

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \mu \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ \nu \end{array} \quad \begin{array}{c} k+q \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ k \end{array} \\
 & \equiv (-ie)^2(-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right] \\
 & \equiv i\Pi_2^{\mu\nu}(q) . \quad (1217)
 \end{aligned}$$

Odgovarajući opći dijagram, koji predstavlja sumu svih 1-čestično ireducibilnih umetaka

u fotonski propagator označimo sa $i\Pi^{\mu\nu}(q)$,

$$\mu \text{ --- } \overrightarrow{q} \text{ --- } \textcircled{1\text{PI}} \text{ --- } \nu = i\Pi^{\mu\nu}(q) . \quad (1218)$$

$i\Pi_2^{\mu\nu}(q)$ predstavlja doprinos drugog reda (e^2) $\Pi^{\mu\nu}(q)$.

- Struktura $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$ – Wardov identitet

$\Pi^{\mu\nu}(q)$ je tenzor drugog reda koji zavisi samo o q . Zbog toga on može sadržavati samo (simetrične) tenzore $g^{\mu\nu}$ i $q^\mu q^\nu$,

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi_1(q^2)g^{\mu\nu} + \Pi_2(q^2)q^\mu q^\nu . \quad (1219)$$

Iz Wardovog identiteta za $\Pi^{\mu\nu}(q)$,

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0, \quad (1220)$$

slijedi da je

$$\Pi_1(q^2) = -q^2 \Pi_2(q^2) \equiv +q^2 \Pi(q^2), \quad (1221)$$

pa je stoga

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2) . \quad (1222)$$

Može se pokazati da u 4 dimenzije $\Pi(q^2)$ ne može imati pol tipa $1/q^2$ (Takav pol bi mogao dolaziti samo od jedno-čestičnog bezmasenog propagatora, a takav se ne može pojaviti u 1PI dijagramu u 4 dimenzije). Stoga je $\Pi(q^2)$ regularna u $q^2 = 0$.

- Struktura potpune dvo-fotonske korelacijske funkcije

Rabeći (1222), za potpunu dvo-fotonsku korelacijsku funkciju dobijamo

$$\begin{aligned} \mu \text{ --- } \textcircled{\phantom{1\text{PI}}} \text{ --- } \nu &= \text{---} + \text{---} \textcircled{1\text{PI}} \text{---} + \text{---} \textcircled{1\text{PI}} \textcircled{1\text{PI}} \text{---} + \dots \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \left[\underbrace{i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)}_{q^2 \Delta^{\rho\sigma}} \Pi(q^2) \right] \frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2} + \dots \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \Delta^\rho{}_\nu \Pi(q^2) + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \Delta^\rho{}_\sigma \Delta^\sigma{}_\nu \Pi^2(q^2) + \dots \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \Delta^\rho{}_\nu (\Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-i}{q^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{\Pi(q^2)}{1 - \Pi(q^2)} \\
&= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2(1 - \Pi(q^2))} + \frac{iq_\mu q_\nu}{q^4} \frac{\Pi(q^2)}{1 - \Pi(q^2)} \\
&\rightarrow \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2(1 - \Pi(q^2))} .
\end{aligned} \tag{1223}$$

U drugom redu (1223) uveli smo projektor stanja okomitih na q , $\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu$,

$$\Delta^\mu_\rho \Delta^\rho_\nu = \Delta^\mu_\nu . \tag{1224}$$

U trećem smo izrazili korelacijsku funkciju dva fotonska polja preko tih projektor. U četvrtom upotrijebili svojstvo (1224) i dobili uz projektor sumu geometrijskog reda u $\Pi(q^2)$. U petom smo red posumirali. U šestom smo razdvojili $g_{\mu\nu}$ i $q_\mu q_\nu/q^2$ komponente. U sedmom smo primjenili činjenicu da se barem jedno od dva fotonska polja u korelacijskoj funkciji veže na sačuvanu struju, pa u S matričnim elementima, zbog Wardovog identiteta, možemo zanemariti $q_\mu q_\nu$ član. Efektivno za S matrične elemente dobijamo

$$\begin{array}{c} \text{---}\mu \end{array} \text{---} \text{---}\nu \tag{1225}$$

- Bezmasenost fotona

Primjetite da dok je $\Pi(q^2)$ regularan u q^2 potpuni propagator uvijek ima pol u $q^2 = 0$. Drugim riječima foton masa fotona jednaka je nuli u bilo kojem redu računa smetnje. Napomenimo da taj rezultat jako ovisi o primjeni Wardovog identiteta koji vodi na (1222) strukturu $\Pi_{\mu\nu}(q)$. Npr. ako bi $\Pi_{\mu\nu}(q)$ sadržavao maseni član $M^2 g_{\mu\nu}$ bez odgovarajućeg $q^\mu q^\nu$ člana fotonska masa bi bila jednaka M .

- Reziduum pola fotonskog propagatora, renormalizacija naboja

Iako se masa fotona ne mijenja, reziduum pola fotonskog propagatora se mijenja i za $q^2 = 0$ jednak je

$$\frac{1}{1 - \Pi(0)} \equiv Z_3 . \tag{1226}$$

Amplituda bilo kojeg nisko energetski proces raspršenja dobija dodatni faktor Z_3 relativno prema odgovarajućoj drvastoj/granastoj amplitudi,

$$\begin{array}{c} \text{---}\mu \end{array} \text{---} \text{---}\nu \tag{1227}$$

Kako se na svakom kraju fotonskog propagatora javlja faktor e , faktor Z_2 možemo uključiti reskaliranjem električnog naboja za faktor $\sqrt{Z_3}$,

$$e \rightarrow \sqrt{Z_3}e \quad (1228)$$

Ta zamjena se zove **renormalizacija naboja**. Mjerljivi naboj nije e već $\sqrt{Z_3}e$. Zbog toga je zgodno promijeniti notaciju. Naboj koji se javlja u Lagrangijanu uz $A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, tzv. **goli (ogoljeni) naboj** označit ćemo sa e_0 . Fizikalni naboj označavamo sa e ,

$$(\text{fizikalni naboj}) = e = \sqrt{Z_3}e_0 = \sqrt{Z_3} \cdot (\text{goli naboj}) . \quad (1229)$$

U najnižem redu računa smetnje $Z_3 = 1$ i $e = e_0$.

q^2 zavisnost naboja

Pored renormalizacije naboja $\Pi(q^2)$ je uzrok i zavisnosti naboja e odnosno konstante veze α o q^2 . Razmotrimo proces raspršenja na $q^2 \neq 0$. Pretpostavimo da računamo $\Pi(q^2)$ u najnižem redu u α . Tada je $\Pi(q^2) \approx \Pi_2(q^2)$. Amplituda procesa sadrži izraz

$$\begin{aligned} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left(\frac{e_0^2}{1 - \Pi(q^2)} \right) &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left(\frac{e^2(1 - \Pi(0))}{1 - \Pi(q^2)} \right) . \\ \stackrel{\mathcal{O}(\alpha)}{\underline{\underline{}}} &\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left(\frac{e_0^2}{1 - [\Pi(q^2) - \Pi(0)]} \right) \end{aligned} \quad (1230)$$

Izraz u zagradama se može interpretirati kao kvadrat q^2 zavisnog električnog naboja. Iz toga slijedi da efekt zamjene drvastog propagatora sa potpunim propagatorom odgovara zamjeni

$$\alpha_0 = \frac{e_0^2}{4\pi} \rightarrow \frac{e_0^2/4\pi}{1 - \Pi(q^2)} \stackrel{\mathcal{O}(\alpha)}{\underline{\underline{}}} \frac{\alpha}{1 - [\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0)]} , \quad (1231)$$

gdje je $\alpha = e^2/4\pi$. Kasnije ćemo pokazati da formula (1231) vrijedi u bilo kojem redu računa smetnje.

Račun $\Pi_2^{\mu\nu}$ - I

Iz (1217) slijedi

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -(-ie_0)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m_0)}{k^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{i(\not{k} + \not{q} + m_0)}{(k+q)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \right] \\ \stackrel{\mathcal{O}(\alpha)}{\underline{\underline{}}} &-4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu(k+q)^\nu + k^\nu(k+q)^\mu - g^{\mu\nu}(k \cdot (k+q) - m^2)}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)((k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon)} . \end{aligned} \quad (1232)$$

Budući da nas zanima samo $\mathcal{O}(\alpha)$ doprinos možemo zamjeniti $e_0 \rightarrow e$ i $m_0 \rightarrow m$. Faktore u nazivniku pojednostavljujemo rabeći Feynmanovu parametrizaciju,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)((k+p)^2 - m^2 + i\varepsilon)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + 2q \cdot kx + xq^2 - m^2 + i\varepsilon)^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 + \underbrace{(x-x^2)q^2}_{=-\Delta} - m^2 + i\varepsilon)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 - \Delta + i\varepsilon)^2}, \end{aligned} \quad (1233)$$

gdje su

$$\ell = k + xq, \quad (1234)$$

$$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2. \quad (1235)$$

Brojnik (1232) izražavamo preko ℓ ,

$$\begin{aligned} &k^\mu(k+q)^\nu + k^\nu(k+q)^\mu - g^{\mu\nu}(k \cdot (k+q) - m^2) \\ &= (\ell - qx)^\mu(\ell + q(1-x))^\nu + (\ell - qx)^\nu(\ell + q(1-x))^\mu \\ &\quad - g^{\mu\nu}((\ell - qx) \cdot (\ell + q(1-x)) - m^2) \\ &= 2\ell^\mu \ell^\nu - g^{\mu\nu} \ell^2 - 2q^\mu q^\nu x(1-x) + g^{\mu\nu}(m^2 + q^2 x(1-x)) + (\text{linearni članovi}) \end{aligned} \quad (1236)$$

Rabeći (1016) i (1017) (tenzorski integrali), te primjenjujući Wickovu rotaciju i zamjenjujući $\ell^0 = i\ell_E^0$ dobijamo

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4} \\ &\times \frac{(-\frac{2}{4} + 1)g^{\mu\nu}\ell_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + q^2 x(1-x))}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}. \end{aligned} \quad (1237)$$

Prvi član uz $g^{\mu\nu}$ dolazi od zamjene $\ell_E^\mu \ell_E^\nu \rightarrow \frac{1}{4}\ell_E^2 g^{\mu\nu}$, koja zavisi o dimenzionalnosti ℓ_E^μ prostora. Integral (1237) sadrži kvadratično UV divergentan član (uz ℓ_E^2) i logaritamsko divergentan član (ostatak). Ako bismo integrirali do gornje granice $\ell_E = \Lambda \gg m, \sqrt{-q^2}$ za vodeći član dobili bismo

$$i\Pi_2^{\mu\nu} \propto ie^2 \Lambda^2 g^{\mu\nu} \equiv i\Pi_1 g^{\mu\nu}, \quad (1238)$$

i time je Wardov identitet za funkciju $\Pi_2(q^2)$ narušen. Za vodeći član korelacijske funkcije dva fotona dobijamo

$$\begin{aligned} \mu \sim \nu \text{ (diagram)} &\sim \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left(1 + \frac{\Pi_1}{q^2} + \left(\frac{\Pi_1}{q^2} \right) + \dots \right) \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - \Pi_1} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - (e\Lambda)^2}. \end{aligned} \quad (1239)$$

Dakle foton bi dobio beskonačnu masu $M \propto e\Lambda$ bez kompenzirajućeg $q^\mu q^\nu$ člana, u nesuglasju s eksperimentom.

Problem se javlja zato jer smo rabili regularizaciju s rezom koja ne zadovoljava Wardov identitet. Problem se može riješiti uporabom druge regularizacije. Npr. može se rabiti Pauli-Villarsova regularizacija (vidi Bjorken i Drell (1964), str. 154), međutim za to je potrebno uvesti nekoliko čestica velike mase i procedura je komplicirana. Ovdje ćemo rabiti dimenzijsku regularizaciju (t'Hooft i Veltman NPB B44, 189 (1972)). Ona čuva ne samo simetrije QED, nego mnogih drugih teorija.

Sada možemo postaviti pitanje koji je regulator je dobar (koja je regularizacija dobra) za neku danu kvantnu teoriju polja. Ako teorija ima neku simetriju ili neke simetrije onda uvijek treba birati regulator koji čuva sve simetrije teorije. Ako ne postoji takav regulator, onda račun treba provoditi na takav način da simetrija ostane sačuvana. Simetrija je u biti osnovni princip/postavka svake teorije polja.

Dimenzijska regularizacija

- Ideja dimenzijske regularizacije

Ideja dimenzijske regularizacije jest da se Feynmanov dijagram izračuna kao analitička kontinuacija funkcije dimenzionalnosti prostora, D . Za dovoljno maleni D integral konvergira i vrijedi Wardov identitet. Konačni izrazi, odnosno fizikalne observable moraju biti dobro definirane u limesu $D \rightarrow 4$.

- Praksa, primjer integrala

U praksi se zamišlja se imamo jednu vremensku i $D - 1$ prostornih dimenzija. Wick-ovom rotacijom se izrazi pretvaraju u odgovarajuće izraze u D -dimenzijskom Euklidskom prostoru. Ilustrirajmo to na ℓ_E integralu (1237) koji je u nazivniku proporcionalan jedinici

$$\int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \rightarrow \int \frac{d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\Omega_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{D-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}$$

$$\stackrel{(1033)}{=} \frac{2}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2})} \times \frac{1}{2} \int_0^\infty d\ell^2 \frac{(\ell^2)^{\frac{D}{2}-1}}{(\ell^2 + \Delta)^2} . \quad (1240)$$

Prvi faktor je kutni integral koji smo izvrijednili rabeći (1033). Drugi faktor je zbog radijalnog integrala. Integral koji se u njemu javlja ćemo izvrijedniti uvodeći supstituciju

$$x = \frac{\Delta}{\ell_E^2 + \Delta} , \quad (1241)$$

($\ell_E^2 = 0 \Rightarrow x = 1$, $\ell_E^2 = \infty \Rightarrow x = 0$, $d\ell^2 = -(\Delta/x^2)dx$, $\ell_E^2 = \Delta(1-x)/x$) i rabeći definiciju beta funkcije $B(\alpha, \beta)$,

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} . \quad (1242)$$

Konkretno,

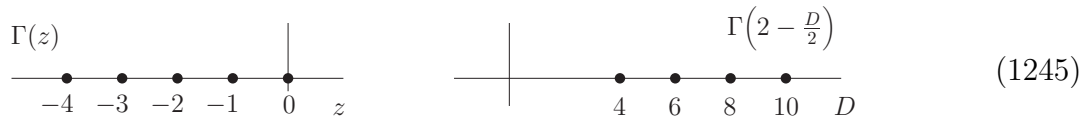
$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\ell_E^2 \frac{\ell_E^{\frac{D}{2}-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} &= \Delta^{\frac{D}{2}-2} \int_0^1 dx (1-x)^{\frac{D}{2}-1} x^{1-\frac{D}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(2)}. \end{aligned} \quad (1243)$$

Uvrštavajući (1243) u (1240) dobijamo

$$\int \frac{d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}}. \quad (1244)$$

o Neka svojstva Γ funkcije

Γ funkcija ima izolirane polove u točkama $0, -1, -2, \dots$. Stoga $\Gamma(2 - \frac{D}{2})$ ima polove u $D = 4, 6, 8, \dots$,



Nadalje ima sljedeći prikaz (reprezentaciju),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \\ \Gamma(1+z) &= \exp \left[-\gamma z + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} z^n \right] \\ &= 1 - \gamma z + \frac{1}{2}[\gamma^2 + \zeta(2)]z^2 - \frac{1}{6}[\gamma^3 + 3\gamma\zeta(2) + 2\zeta(3)]z^3 + \dots \end{aligned} \quad (1246)$$

Iz njega možemo naći ponašanje $\Gamma(2 - \frac{D}{2})$ u blizini $D = 4$. Definirajmo $\varepsilon = 4 - D$, odnosno $D = 4 - \varepsilon$ (u literaturi se često stavlja $D = 4 - 2\varepsilon$). Tada iz (1246) slijedi

$$\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (1247)$$

U gornjim formulama je γ Euler-Mascheroni-jeva konstanta,

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \\ &= - \int_0^\infty e^{-x} \ln x dx, \end{aligned} \quad (1248)$$

a $\zeta(z)$ je Riemannova zeta funkcija,

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}, \quad \text{Re}z > 1. \quad (1249)$$

Vratimo se izvrednjavanju integrala (1244). Rabeći (1247) za integral (1244) dobijamo

$$\int \frac{d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \xrightarrow{D \rightarrow 4} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \ln \Delta - \gamma + \ln 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \quad (1250)$$

Isti integral smo izračunali u (1039) rabeći Pauli-Villarsov regulator. Rabeći tu proceduru dobija se

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} &\rightarrow \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} - \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta_\Lambda)^2} \right) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \ln \frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\ln \frac{x\Lambda^2}{\Delta} + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}) \right). \end{aligned} \quad (1251)$$

Stoga $1/\varepsilon$ pol u dimenzijskoj regularizaciji odgovara logaritamskoj divergenciji u cut-off regularizaciji.

◦ Renormalizacijska skala u dimenzijskoj regularizaciji

U (1250) se javlja logaritam Δ , koja ima dimenziju različitu od nule. Primjetite također da dok originalni integral (1251) ima dimenziju 0, integral u dimenzijskoj integraciji ima dimenziju $D - 4 = -\varepsilon$. Taj se problem rješava uvođenjem dodatnog faktora $\mu^{4-D} = \mu^\varepsilon$ u integracijskoj mjeri, gdje je μ tzv. renormalizacijska skala i ima dimenziju mase,

$$\frac{d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \rightarrow \frac{\mu^{4-D} d^D \ell_E}{(2\pi)^D}. \quad (1252)$$

Time integral (1250),

$$\int \frac{\mu^{4-D} d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \xrightarrow{D \rightarrow 4} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} - \gamma + \ln 4\pi + \mathcal{O}(\varepsilon) \right), \quad (1253)$$

ne sadrži više logaritam dimezijske veličine.

- Dodatni primjeri integrala

Na analogan način dobijaju se izrazi za sljedeće integrale

$$\int \frac{\mu^{4-D} d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n-2} \left(\frac{\mu^2}{\Delta} \right)^{2-\frac{D}{2}}, \quad (1254)$$

$$\int \frac{\mu^{4-D} d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{D \Gamma(n - \frac{D}{2} - 1)}{2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n-3} \left(\frac{\mu^2}{\Delta} \right)^{2-\frac{D}{2}}. \quad (1255)$$

DZ. Za domaću zadaću provjerite gornje integrale.

- Tenzorski račun u D dimenzija

U D dimenzija $g^{\mu\nu}$ zadovoljava

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = D . \quad (1256)$$

Zbog toga vrijedi (u D -dim Minkowski prostoru)

$$\int \frac{d^D \ell}{(2\pi)^D} f(\ell^2) \ell^\mu \ell^\nu = \int \frac{d^D \ell}{(2\pi)^D} f(\ell^2) \frac{1}{D} \ell^2 g^{\mu\nu} , \quad (1257)$$

odnosno, pod simetričnom integracijom vrijede sljedeće zamjene za tenzore

$$\begin{aligned} \ell_\mu &\rightarrow 0, \\ \ell_\mu \ell_\nu &\rightarrow \frac{1}{D} \ell^2 g^{\mu\nu} , \\ \ell_\mu \ell_\nu \ell_\rho &\rightarrow 0, \\ \ell_\mu \ell_\nu \ell_\rho \ell_\sigma &\rightarrow \frac{1}{D(D+2)} \ell^4 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu}), \\ &\dots \end{aligned} \quad (1258)$$

- Računi sa γ^μ matricama u D dimenzija

U D dimenzija γ^μ matrice zadovoljavaju iste antikomutacijske relacije kao u 4 dimenzije,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1} . \quad (1259)$$

Dimenzija γ^μ matrica je općenito funkcija D , ali se uvijek može izabrati da je njihova dimenzija jednaka 4. Ta se dimenzija zadaje preko traga jednične matrice,

$$tr[1] = f(D) = f(D_0) = 4 . \quad (1260)$$

Notacija u (1260) je iz Collins-ove knjige "Renormalization" str. 84. D_0 je fizikalna dimenzija prostora-vremena, tj. 4. Standardno se uzima da je $f(D) = f(D_0)$ za svaku vrijednost D . Zbog (1260) trag bilo kojeg broja γ^μ matrica, izražen preko $g^{\mu\nu}$ tenzora, formalno je jednak tragu u D dimenzija. Npr.

$$\begin{aligned} tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} , \\ tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu}) . \end{aligned} \quad (1261)$$

Jedina razlika je u $g^{\mu\nu}$ tenzorima, jer oni imaju dimenziju D a ne 4. Posljedica toga jest da se mijenjaju identiteti za kombinacije γ^μ matrica sa kontrakcijama. Ti identiteti dobijaju dodatne članove ovisne o $\varepsilon = 4 - D$,

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma_\mu &= 4 - \varepsilon, \\
\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -(2 - \varepsilon) \gamma^\nu, \\
\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} - \varepsilon \gamma^\nu \gamma^\rho, \\
\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + \varepsilon \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma.
\end{aligned} \tag{1262}$$

Ti dodatni članovi se mogu javiti u amplitudama. U izrazu za vlastitu energiju fotona ih nema jer se u pripadnom matičnom elementu javljaju samo trag jednične matrice i para γ^μ matrica. U izrazu za vlastitu energiju elektrona i u izrazu za amplitudu vrha ε korekcije se javljaju jer postoje $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu$ kombinacije γ^μ matrica. Ipak, ti se dodatni ε članovi krata u izrazima za observabilne veličine.

DZ. Dokaz gornje tvrdnje bi mogla biti lijepa i velika domaća zadaća.

Račun $\Pi_2 - \text{II}$

Primjenimo sada dimenzijsku regularizaciju na integral (1237). Integral se malo mijenja zbog razlike u dimenziji ℓ^μ prostora i sada glasi

$$\begin{aligned}
i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{\mu^{4-D} d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \\
&\times \frac{(-\frac{2}{D} + 1)g^{\mu\nu} \ell_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + q^2 x(1-x))}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}
\end{aligned} \tag{1263}$$

Primjenom izraza za integrale (1254) i (1255) i sređivanjem izraza nalazimo

$$\begin{aligned}
i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -4ie^2 \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_0^1 dx \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2 - \frac{D}{2}} [-2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} \underbrace{(m^2 + x(1-x)q^2 - \Delta)}_{2x(1-x)q^2}] \\
&= -8ie^2 \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{\varepsilon/2} \\
&\equiv i\Pi_2(q^2)(g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu).
\end{aligned} \tag{1264}$$

Primjetimo da dimenzijski regulariziran izraz zadovoljava Wardov identitet. Također budući da je izraz za $i\Pi_2^{\mu\nu}(q)$ proporcionalan tenzoru $g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu$ dimenzije 2, integral u izrazu $\Pi_2(q^2)$ nije kvadratično divergentan već logaritamski divergentan,

$$\Pi_2(q^2) = -\frac{8e^2 \Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{\varepsilon/2}$$

$$\begin{aligned}
&= -8(4\pi\alpha) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \dots \right) \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln 4\pi \right) \int_0^1 dx x(1-x) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{\mu^2}{\Delta} \right) \\
&= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln \frac{\Delta}{\mu^2} \right] \\
&= -\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon} + \frac{\alpha}{3\pi} \left(\gamma - \ln 4\pi - \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right) \\
&\quad - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} . \tag{1265}
\end{aligned}$$

- Komentari:

1. $i\Pi^{\mu\nu}$ je baždarno invarijantan jer sadrži $g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu$.
2. $\Gamma(2 - \frac{D}{2})$ daje divergenciju $\frac{2}{\varepsilon}$. Ona je očekivana jer za $D \neq 4$, $D \approx 4$ originalna kvadratična divergencija u $i\Pi^{\mu\nu}$ postaje logaritamska.
3. Sada možemo izračunati korekciju pola fotonskog propagatora,

$$Z_3 = \frac{1}{1 - \Pi(0)} \approx \frac{1}{1 - \Pi_2(0)} \approx 1 + \Pi_2(0) = 1 + \left(-\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon} \right), \tag{1266}$$

a s time i korekciju naboja,

$$\frac{1}{e^2}(e^2 - e_0^2) = \left(1 - \frac{1}{Z_3} \right) = \frac{Z_3 - 1}{Z_3} = \Pi(0) \approx \Pi_2(0) = -\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon}. \tag{1267}$$

Ta korekcija je beskonačna i nije mjerljiva. Mjerljiva je q^2 zavisnost efektivnog naboja $\alpha_{eff}(q^2)$ (1231),

$$\alpha_{eff} = \frac{e_0^2/4\pi}{1 - \Pi(q^2)} \approx \frac{\alpha}{1 - [\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0)]}. \tag{1268}$$

Efektivni naboj ovisi o razlici $\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0)$, koja je jednaka zadnjem članu $\Pi_2(q^2)$ u jedn. (1265)),

$$\hat{\Pi}(q^2) \equiv \Pi(q^2) - \Pi(0) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right). \tag{1269}$$

Ta razlika je konačna tj. ne ovisi o ε . Sa veličinom $\hat{\Pi}(q^2)$ ćemo se sada pozabaviti.

Interpretacija $\hat{\Pi}(q^2)$

- Analitička struktura $\hat{\Pi}(q^2)$

Za u i t kanal kada je $q^2 < 0$ je $m^2 - x(1-x)q^2 > 0$ i $\hat{\Pi}(q^2)$ je realan, stoga i analitičan. U s kanalu, kada je $q^2 > 0$ logaritamska funkcija u $\hat{\Pi}(q^2)$ tj. (1269) ima rez ako je

$$m^2 - x(1-x)q^2 < 0. \tag{1270}$$

Budući da je (za $0 < x < 1$) $x(1-x) \leq 1/4$, rez započinje odnosno postoji za

$$q^2 = 4m^2, \quad \text{odnosno} \quad q^2 \geq 4m^2. \quad (1271)$$

Točka $q^2 = 4m^2$ je prag reakcije za tvorbu e^+e^- para.

- Račun imaginarnog dijela $\hat{\Pi}(q^2)$ za $q^2 > 4m^2$

Za svaki fiksni $q^2 > 4m^2$ imaginarnom dijelu $\hat{\Pi}(q^2)$ doprinose sve x vrijednosti za koje je $m^2 - x(1-x)q^2 \leq 0$, odnosno koje se nalaze između nultočka jednadžbe $m^2 - x(1-x)q^2 = 0$,

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \equiv \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \beta. \quad (1272)$$

U praksi se gleda/nalazi imaginarni dio $\hat{\Pi}(q^2)$ za $q^2 \pm i\varepsilon$ gdje je ε pozitivni infinitezimalni broj. Budući da je za pozitivnu realnu veličinu X $\ln(-X \pm i\varepsilon) = \ln X \pm i\pi$, odnosno,

$$\text{Im}[\ln(-X \pm i\varepsilon)] = \pm\pi, \quad (1273)$$

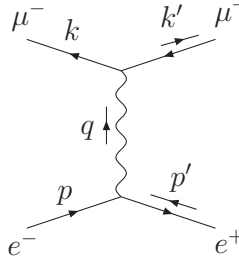
imamo

$$\begin{aligned} \text{Im}[\hat{\Pi}(q^2 \pm i\varepsilon)] &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \underbrace{(-1) \text{Im}[\ln\left(1 - x(1-x)\frac{q^2 \pm i\varepsilon}{m^2}\right)]}_{=\mp\pi} \\ &= -\frac{2\alpha}{\pi} (\pm\pi) \int_{\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}} dx x(1-x) \\ &= \mp 2\alpha \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} dy \left(\frac{1}{4} - y^2\right) \\ &= \mp \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right). \end{aligned} \quad (1274)$$

Ista q^2 ovisnost se javlja i u imaginarnom dijelu Bhabha raspršenja ($e^+e^- \rightarrow e^+e^-$) u dijagramu koji ide preko dijagrama vlastite energije fotona (1217). Stoga se ista q^2 zavisnost se javlja u udarnom presjeku fermionsko-antifermionskog para $\sigma(e^+e^- \rightarrow f\bar{f})$, u kojem parametar β igra ulogu brzine izlaznih čestice u CM sustavu, jer je $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ raspršenje sastavni dio imaginarnog dijela Bhabha raspršenja. Pokažimo to na primjeru $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ raspršenja, jer smo preskočili račun granastih/drvastih dijagrama.

- Udarni presjek za $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ proces

Feynmanov dijagram i pripadna amplituda procesa su



$$= i\mathcal{M} = \bar{v}_e(p')(-ie\gamma^\mu)u_e(p)\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\bar{u}_\mu(k)(-ie\gamma^\nu)v_\mu(k'). \quad (1275)$$

Za udarni presjek nam treba apsolutni kvadrat amplitude posumiran po konačnim i usrednjen po početnim spinovima $|\overline{\mathcal{M}}|^2$,

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4} \frac{e^4}{q^4} \text{tr}[(\not{p}' - m_e)\gamma^\mu(\not{p} + m_e)\gamma^\nu] \text{tr}[(\not{k} - m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}' + m_\mu)\gamma_\nu] \quad (1276)$$

$$\approx \frac{64\pi^2\alpha^2}{q^4} \left[2p' \cdot kp \cdot k' + 2p' \cdot k'p \cdot k - 2p \cdot p'(m_\mu^2 + k \cdot k') - 2p \cdot p'k \cdot k' + 2p \cdot p'(2k \cdot k' + 2m_\mu^2) \right] \quad (1277)$$

$$= 16\pi^2\alpha^2 \left[\left(1 + \frac{4m_\mu^2}{q^2}\right) + c_\theta^2 \left(1 - \frac{4m_\mu^2}{q^2}\right) \right]. \quad (1278)$$

U drugoj jednakosti tj. u (1277) smo zanemarili masu elektrona $m_e \approx 0$. U toj aproksimaciji, da bismo dobili treću jednakost tj. (1278), rabili smo jednakosti ($c_\theta = \cos\theta$ je kut između vektora \vec{p} i \vec{k}) $q^2 = 2p \cdot p' = 2k \cdot k' + 2m_\mu^2$, $p \cdot k = p' \cdot k' = (q^2/4)(1 - v_\mu c_\theta)$, $p \cdot k = p' \cdot k' = (q^2/4)(1 + v_\mu c_\theta)$, $4E^2 = 4E'^2 = (E + E')^2 = q^2$, $v_\mu = v'_\mu = k/E = k'/E' = \sqrt{1 - 4m_\mu^2/q^2}$. Uvrštavajući (1278) u izraz za $d\sigma/d\Omega$ (707) dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{64\pi^2q^2} \frac{|\vec{k}|}{|\vec{p}|} \\ &= \frac{\alpha}{4q^2} \left(1 - \frac{4m_\mu^2}{q^2}\right)^{1/2} \left[\left(1 + \frac{4m_\mu^2}{q^2}\right) + \left(1 - \frac{4m_\mu^2}{q^2}\right)c_\theta^2 \right]. \end{aligned} \quad (1279)$$

Odatle integracijom po kutevima slijedi izraz za totalni udarni presjek,

$$\sigma_{TOT} = \frac{4\pi\alpha}{3q^2} \left(1 - \frac{4m_\mu^2}{q^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{2m_\mu^2}{q^2}\right). \quad (1280)$$

Time smo dokazali da $\sigma(e^+e^- \rightarrow f\bar{f}) \propto \hat{\Pi}_2(q^2)$ što se tiče q^2 zavisnosti ($\sigma(e^+e^- \rightarrow f\bar{f})$ ima dodatni $1/q^2$).

Analiza kako $\hat{\Pi}_2(q^2)$ modificira elektromagnetsko međudjelovanje

1. Modifikacija Coulombovog potencijala u NR limesu

U NR limesu je logično analizirati kako $\hat{\Pi}_2(q^2)$ modificira Coulombov potencijal. Za međudjelovanje suprotnih naboja, prije uvođenja perturbativne korekcije za potencijal imamo,

$$V(\vec{x}) = -\frac{e^2}{4\pi r} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{r}} \frac{-e^2}{|\vec{q}|^2}. \quad (1281)$$

Perturbativne korekcije modificiraju naboj prema (1268), i to rezultira modifikacijom potencijala,

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{x}} \frac{-e^2}{|\vec{q}|^2 [1 - \hat{\Pi}_2(-\vec{q}^2)]} \approx \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{x}} \frac{-e^2}{|\vec{q}|^2} [1 + \hat{\Pi}_2(-\vec{q}^2)]. \quad (1282)$$

1a. Aproksimativni pristup

Razvojem $\hat{\Pi}_2(q^2)$ po q^2 za $|q^2| \ll m^2$ (vidi (1269), i uvrštavajući $q^2 = -\vec{q}^2$,

$$\hat{\Pi}_2(-\vec{q}^2) \approx -\frac{2\alpha}{\pi} \int dx x^2 (1-x)^2 \frac{-\vec{q}^2}{m^2} = \frac{1}{15} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\vec{q}^2}{m^2}, \quad (1283)$$

nalazimo

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &\approx \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{x}} \frac{-e^2}{q^2} \left(1 + \frac{1}{15} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\vec{q}^2}{m^2}\right) \\ &= -\frac{\alpha}{r} \underbrace{\frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta(\vec{x})}_{=\delta V(\vec{x})}. \end{aligned} \quad (1284)$$

Primjetimo da modifikacija elektromagnetske sile postaje mnogo veća za male udaljenosti. Taj se efekt vidi kod vodikovog atoma, gdje se prema (1284) energetske nivoe stanja $\psi(x)$ pomiču za

$$\Delta E = \int d^3x |\psi(\vec{x})|^2 \delta V(\vec{x}) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} |\psi(0)|^2. \quad (1285)$$

U ishodištu je valna funkcija $\psi(\vec{x})$ različita od nule samo za s stanja vodikovog atoma. Npr. za 2s stanje je $(R_{20}(r) = (Z/2a_0)^{3/2} (2 - Zr/a_0) e^{-Zr/2a_0}, a_0 = 1/(m\alpha))$

$$|\psi_{200}(0)|^2 = \left| Y_{00}(0) R_{20}(0) \right|^2 = \frac{1}{4\pi} \times 2^2 \frac{1}{8 \underbrace{a_0^3}_{1/(m\alpha)^3}} = \frac{\alpha^3 m^3}{8\pi}, \quad (1286)$$

pa je stoga

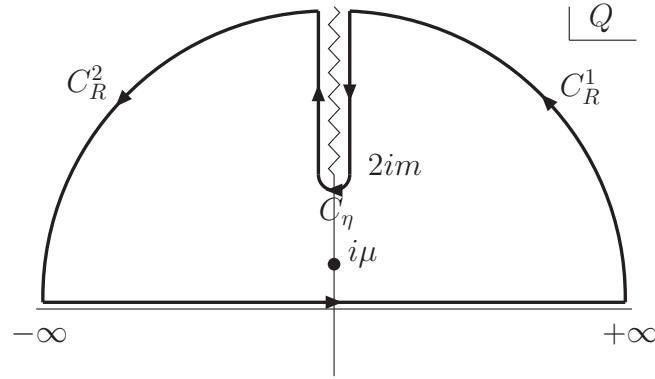
$$\Delta E_{2s} = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} \frac{\alpha^3 m^3}{8\pi} = -\frac{\alpha^5 m}{30\pi} = -1.123 \times 10^{-7} \text{ eV}. \quad (1287)$$

1a. Precizan (precizniji) račun potencijala $V(\vec{x})$

Delta-funkcija daje samo aproksimaciju za modifikaciju Coulombovog potencijala. Da bismo dobili doseg djelovanja modificiranog potencijala razmotrit ćemo IR regularizirani potencijal (1282) ($\vec{q}^2 = -q^2 \rightarrow -q^2 + \mu^2 = \vec{q}^2 + \mu^2 \equiv Q^2 + \mu^2$),

$$\begin{aligned}
 V(\vec{x}) &\approx \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{x}} \frac{-e^2}{\vec{q}^2 + \mu^2} [1 + \hat{\Pi}_2(-\vec{q}^2)] \\
 &= \frac{ie^2}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty \frac{dQ Q (1 + \hat{\Pi}_2(-Q^2))}{(Q^2 + \mu^2)} (e^{iQr} - e^{-iQr}) \\
 &= \frac{ie^2}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{dQ Q e^{iQr} (1 + \hat{\Pi}_2(-Q^2))}{(Q^2 + \mu^2)}, \quad Q = |\vec{q}|, \quad (1288)
 \end{aligned}$$

i provesti račun egzaktno. Aproksimacija je ista kao u (1282) i odnosi se na to da računamo α korekciju Coulombovog potencijala ($1/(1 - \hat{\Pi}_2(-\vec{q}^2)) \approx 1 + \hat{\Pi}_2(-\vec{q}^2)$). Masa μ regularizira Coulombov potencijal. Da bismo našli integral u (1288) rabimo konturu na slici (η je infinitesimalni pozitivan broj i radius polukružnice C_η),



iz koje slijedi (napomena $\mu \approx 0$)

$$V(\vec{x}) = \frac{ie^2}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{dQ Q e^{iQr} (1 + \hat{\Pi}_2(-Q^2))}{(Q^2 + \mu^2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ie^2}{(2\pi)^2 r} \left[2\pi i \lim_{Q \rightarrow i\mu} \left\{ (Q - i\mu) \frac{Q e^{iQr}}{Q^2 + \mu^2} (1 + \hat{\Pi}_2(-Q^2)) \right\} \right. \\
&- \underbrace{\left(\int_{C_R^2} + \int_{C_R^1} + \int_{C_\eta} + \int_{+i\infty+\eta}^{2im+\eta} + \int_{2im-\eta}^{+i\infty-\eta} \right)}_{=0} \left. \frac{dQ Q e^{iQr}}{(Q^2 + \mu^2)} (1 + \hat{\Pi}_2(-Q^2)) \right] \\
&= \frac{ie^2}{(2\pi)^2 r} \left[\underbrace{\pi i e^{-\mu r}}_{\approx 1} (1 + \underbrace{\hat{\Pi}_2(\mu^2)}_{\approx 0}) \right. \\
&- \underbrace{\int_{2m}^{\infty} \left\{ \frac{idw(iw + \eta)e^{i(iw+\eta)r}}{(iw + \eta)^2 + \mu^2} - \frac{idw(iw - \eta)e^{i(iw-\eta)r}}{(iw - \eta)^2 + \mu^2} \right\}}_{=\mathcal{O}(\eta) \approx 0} \\
&- \int_{2m}^{\infty} \left\{ \frac{idw(iw + \eta)e^{i(iw+\eta)r}}{(iw + \eta)^2 + \mu^2} \hat{\Pi}_2(\underbrace{-(iw + \eta)^2}_{=w^2 - i\eta}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{idw(iw - \eta)e^{i(iw-\eta)r}}{(iw - \eta)^2 + \mu^2} \hat{\Pi}_2(\underbrace{-(iw - \eta)^2}_{=w^2 + i\eta}) \right\} \\
&\approx -\frac{\alpha}{r} + \frac{i\alpha}{\pi r} \int_{2m}^{\infty} \frac{dwe^{-wr}}{w^2} 2i \operatorname{Im} \hat{\Pi}(w^2 - i\eta) \\
&= \underbrace{-\frac{\alpha}{r} - \frac{2\alpha^2}{3\pi r} \int_{2m}^{\infty} \frac{dwe^{-wr}}{w} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{w^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{w^2}\right)}_{\delta V(r)}. \tag{1289}
\end{aligned}$$

U prvoj jednakosti u (1289) smo primjenili račun reziduuma i konturu na gornjoj slici. Zbog Jordanove leme C_R^1 i C_R^2 doprinosi su jednaki nuli. C_η doprinos je jednak nuli jer u $2mi$ nema izoliranog singulariteta. Prvi doprinos u drugoj jednakosti dolazi od reziduuma u $i\mu$ i on odgovara Coulombovom potencijalu kao što se vidi u trećoj i četvrtoj jednakosti. U izvrednjavanju tog člana primjenili smo limes $\mu \rightarrow 0$. Drugi doprinos u drugoj jednakosti dolazi od jedinice u $1 + \hat{\Pi}_2(Q^2)$ i on je jednak nuli u limesu $\eta \rightarrow 0$ (η je ionako infinitezimalni pozitivni broj). U njemu i u trećem doprinosu smo uveli varijabu w , $Q = iw$. Treći doprinos u drugoj jednakosti dolazi od $\hat{\Pi}_2(Q^2)$ člana. U trećoj jednakosti smo primjenili jednakosti $\operatorname{Re}(\hat{\Pi}(w^2 - i\eta)) = \operatorname{Re}(\hat{\Pi}(w^2 + i\eta))$, $\operatorname{Im}(\hat{\Pi}(w^2 - i\eta)) = -\operatorname{Im}(\hat{\Pi}(w^2 + i\eta))$. U četvrtoj jednakosti smo primjenili izraz (1274) za $\operatorname{Im}(\hat{\Pi}(w^2 - i\eta))$. Također smo drugi član, koji predstavlja odstupanje od Coulombovog potencijala izazvano radijativnim efektima, označili sa $\delta V(r)$,

$$\delta V(r) = -\frac{2\alpha^2}{3\pi r} \int_{2m}^{\infty} \frac{dwe^{-wr}}{w} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{w^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{w^2}\right). \tag{1290}$$

Uehling-ov potencijal

Radijativna korekcija Coulombovom potencijalu $\delta V(r)$ zove se Uehling-ov potencijal. Za $r \gg 1/m$ integralom dominira područje integracije oko $w \approx 2m$. Stavljajući $t = w - 2m$ i zadržavajući dominantne članove u Taylorovom razvoju dobijamo

$$\begin{aligned}\delta V(r) &= -\frac{\alpha}{r} \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{3} \frac{e^{-2mr}}{2m} \int_0^\infty dt e^{-rt} \sqrt{\frac{t}{m}} \frac{3}{2} \\ &= -\frac{\alpha}{r} \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}.\end{aligned}\quad (1291)$$

Stoga je ukupni potencijal između dvije suprotno nabijene čestice jednak

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \dots \right).\quad (1292)$$

Primjetimo da je doseg međudjelovanja korektivnog člana približno jednak Comptonovoj valnoj duljini $1/m$.

Korekcija potencijala se može interpretirati kao zasjenjenje. Za $r \gtrsim 1/m$ javlja se dosta virtualnih e^+e^- parova u vakuumu, tako da se vakuum počinje ponašati kao dielektrični medij u kojem je prividni (mjerljivi) naboj manji od stvarnog naboja – ta pojava se zove **vakuumaska polarizacija**. Na udaljenostima manjim od $\sim 1/m$ proba počinje "prodirati" kroz oblak virtualnih e^+e^- parova i počinje (bolje) osjećati goli/ogoljeni naboj.

2. Ponašanje $\Pi(q^2)$ na velikim q^2 - efektivna konstanta veze

- Ponašanje $\Pi(q^2)$ na velikim q^2

Sada ćemo razmotriti suprotan limes, $-q^2 \gg m^2$. U tom limesu možemo zanemariti m^2 u nazivniku argumenta logaritma u (1269) pa dobijamo,

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_2(q^2) &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int dx x(1-x) \left[-\ln \frac{-q^2}{m^2} - \ln(x(1-x)) + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{-q^2}\right) \right] \\ &\approx \frac{\alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{-q^2}{m^2} - \frac{5}{3} \right).\end{aligned}\quad (1293)$$

- Efektivna konstanta veze

Iz (1293) i izraza za efektivnu konstantu veze (1268) slijedi

$$\begin{aligned}\alpha_{\text{eff}}(q^2) &\approx \frac{\alpha}{1 - \hat{\Pi}_2(q^2)} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{-q^2}{m^2} - \frac{5}{3} \right)} \\ &= \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{-q^2}{e^{5/3} m^2}}.\end{aligned}\quad (1294)$$

Iz gornje formule se vidi da $\alpha_{\text{eff}}(q^2)$ divergira za q^2 za koji je nazivnik jednak nuli. Ta vrijednost q^2 zove se Landauov pol.

Napomenimo da doprinos vlastitoj energiji fotona čestice a naboja Q_a (u e jedinicama) i mase m_a za $-q^2 \gg m_a^2$ je

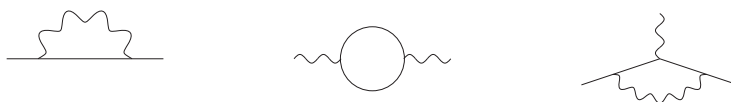
$$\hat{\Pi}_2^{(a)}(q^2) \approx \frac{Q_a^2 \alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{-q^2}{m_a^2} - \frac{5}{3} \right). \quad (1295)$$

Korekciju konstante veze čini zbroj doprinosa svih čestica koje imaju masu manju od $-q^2$.

DZ. Pokažite da za $-q^2 = 30 \text{ GeV}$ korekcija konstante veze iznosi 5.5% od vrijednosti $\alpha = 1/137$.

6 Renormalizacija

Računajući radijativne korekcije u QED sreli smo tri dijagrama sa UV divergencijama:



Svaku od divergencija bilo je moguće regularizirati i poništiti, što je vodilo na konačne izraze za mjerljive veličine. Takve divergencije su uobičajene u teoriji polja i one su povezane sa kritičnim eksponentima (fazni prijelazi) u statističkoj fizici odnosno anomalnim dimenzijama operatora u teoriji polja.

Sada ćemo klasificirati UV divergencije u teoriji polja. Bit će dan postupak za sistematsko nalaženje svih UV divergencija i za nalaženje teorija u kojima se divergencije mogu sistematski ukloniti. Postupak uklanjanja divergencija će biti ilustriran na QED i ϕ^4 teoriji.

6.1 Prebrojavanje UV divergencija

Na primjeru QED pokazat ćemo kako se na osnovi prebrojavanja potencija impulsa u petljama mogu naći divergencije dijagrama.

Notacija

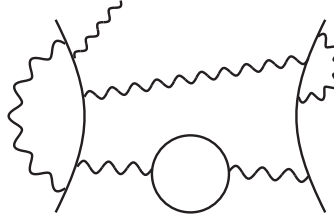
Za opis dijagrama u QED uvodimo sljedeću notaciju:

$$\begin{aligned}
 N_e &= \text{broj vanjskih } e^- \text{ linija} \\
 N_\gamma &= \text{broj vanjskih } \gamma \text{ linija} \\
 P_e &= \text{broj } e^- \text{ propagatora} \\
 P_\gamma &= \text{broj } \gamma \text{ propagatora} \\
 V &= \text{broj vrhova} \\
 L &= \text{broj petlji}
 \end{aligned}
 \tag{1296}$$

Analiza vrijedi i za korelacijske funkcije i za raspršenja. Kod korelacijskih funkcija se propagatori koje su povezane s vanjskim točkama broje kao vanjske linije (ne broje se kao propagatori).

”Prividni” stupanj divergencije

Amplituda za tipični QED dijagram ima sljedeći oblik



$$\sim \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2 \dots d^4 k_L}{(k_i - m) \dots (k_j^2) \dots (k_n^2)} \quad (1297)$$

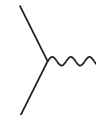


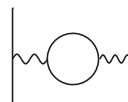
Tu su k_i neodređeni impulsi u petljama. Grubim prebrojavanjem divergentnih impulsa u brojniku i nazivniku takvog izraza dobijamo sljedeću sliku o divergenciji dijagrama. Svaka petlja ima integraciju tipa $d^4 k$ i zato uvećava divergenciju dijagrama za 4. S druge strane svaki bozonski propagator ($\sim 1/k^2$) unutar petlje umanjuje divergenciju za 2 a svaki fermionski propagator ($\sim 1/k$) unutar petlje umanjuje divergenciju za 1. Definirajmo prividnu divergenciju dijagrama,

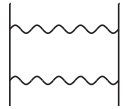
$$\begin{aligned} D &= (\text{potencija } p \text{ u brojniku}) - (\text{potencija } p \text{ u nazivniku}) \\ &= 4L - P_e - 2P_\gamma, \end{aligned} \quad (1298)$$

gdje su p bilo kakvi 4-impulsi u dijagramu, ne samo 4-impulsi petlji. Ako je Λ gornja granica impulsne integracije, naivno očekujemo da je za $D > 0$ divergencija dijagrama proporcionalna Λ^D , za $D = 0$ da je divergencija dijagrama oblika $\ln \Lambda$, a za $D < 0$ da nema divergencije. U toj analizi je zanemareno da su u definiciji D uključeni 4-impulsi koji nisu u petljama i simetrije teorije (npr. Wardov identitet u QED), činjenica da divergencije mogu doći od poddijagrama danog dijagrama, te da granasti/drvasti dijagrami nisu divergentni bez obzira na dimenziju pripadne amplitude.

Primjeri prividnih divergencija dijagrama

Na sljedećoj slici dani su primjeri dijagrama uz koje su napisane njihove prividnih divergencija i prave divergencije.

	$D = 0$	konačan
	$D = 0$	$\sim \ln \Lambda$
	$D = 2$	$\sim \ln \Lambda$
	$D = -2$	$\sim \ln \Lambda$



$$D = 0 \quad \sim \text{konačan} \quad (1299)$$

Primjetite da je prividna divergencija prvog, trećeg i četvrtog dijagrama različita od prave divergencije. Kod prvog dijagrama je to zbog toga što je to granasti dijagram, kod trećeg zbog Wardovog identiteta, a kod četvrtog zato jer su dva propagatora izvan petlji i zato što u dijagramu postoji divergentni poddijagram.

Izraz za D preko broja vanjskih linija

Prividna divergencija je ipak korisna veličina zato jer ju je lako naći i zato što se za QED u 4 dimenzije izraziti samo preko broja vanjskih linija. Iz toga slijedi da je broj divergentnih dijagrama za QED u 4 dimenzije konačan.

Da bismo to pokazali treba nam neke relacije među veličinama (1296). Kao prvo broj petlji definiran je brojem propagatora i vrhova. Naime svaki propagator sadrži jednu d^4k integraciju koja odgovara jednoj potencijalnoj petlji (nesačuvanom 4-impulsu). Svaki vrh sadrži jednu $\delta^{(4)}(k)$ -funkciju koja poništava d^4k integrale, međutim jedna od tih δ -funkcija odgovara ukupnom sačuvanju impulsa u procesu. Stoga je broj petlji jednak

$$L = P_e + P_\gamma - V + 1. \quad (1300)$$

Nadalje, svaki vrh u QED ima jednu fotonsku liniju i dvije elektronske. Kako propagatori odgovaraju kontrakciji dva polja (linije), broj vrhova se može izraziti preko brojeva N_e , P_e , N_γ i P_γ na sljedeći način,

$$V = 2P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2}(2P_e + N_e). \quad (1301)$$

Upotrebom (1300) i (1301) izraz (1298) za D postaje jednak

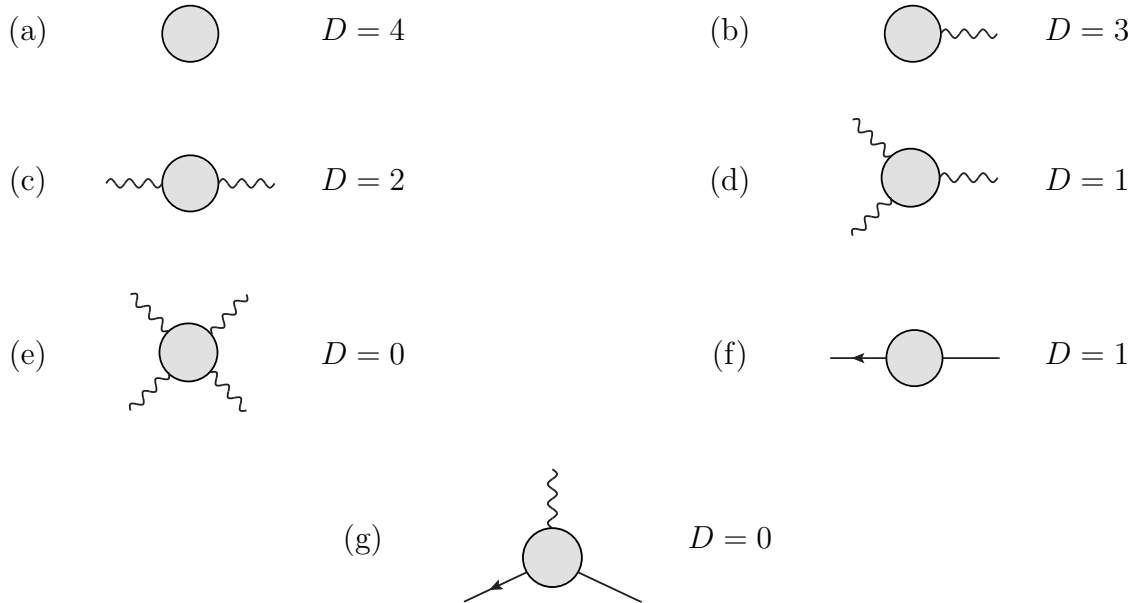
$$\begin{aligned} D &= 4(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma \\ &= 3(V - \frac{1}{2}N_e) + (V - N_\gamma) - 4V + 1 \\ &= 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}N_e, \end{aligned} \quad (1302)$$

dakle neovisan i o broju propagatora i o broju vrhova. D je zavisano samo o broju vanjskih linija i pada s brojem vanjskih linija.

Divergentni amputirani jedno-čestično ireducibilni dijagrami

Iz (1302) slijedi da je mali broj prividno divergentnih dijagrama (koji imaju $D > 0$). Kako

vanjske linije ne doprinose divergencijama dijagrama dovoljno je gledati amputirane dijagrame. Nadalje, dovoljno je gledati jedno-čestično ireducibilni dijagrame, zato jer se reducibilni dijagrami mogu prikazati kao produkti jedno-čestično ireducibilnih dijagrama. Tako se analiza divergencija u QED u 4 dimenzija svodi na analizu sljedećih 7 dijagrama jedno-čestično ireducibilnih dijagrama za koje je $D \geq 0$,



koje ćemo sada redom analizirati.

(a) Vakuumski dijagram

Vakuumski dijagram je Greenova funkcija bez vanjskih nogu. Iako je jako divergentna ne doprinosi observablama tj. S -matričnim elementima. Divergencija uzrokuje neobservabilni pomak vakuumske energije.

(b,d) Greenova funkcija sa jednom fotonskom linijom i sa tri fotonske linije

Kod Greenove funkcije sa jednom fotonskom linijom, ta linije mora biti vezana na QED vrh. Stoga je pripadna amputirana amplituda oblika

$$\text{Diagram (b)} = -ie \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle \Omega | T j_\mu(x) | \Omega \rangle, \quad (1303)$$

gdje je $j_\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ operator elektromagnetske struje. Budući da je j_μ vektor, vakuumska očekivana vrijednost zbog Lorentzove invarijantnosti mora biti jednaka nuli.

Greenova funkcija s jednom fotonskom linijom jednaka je nuli i zbog simetrije QED na nabojnu konjugaciju. Iz te simetrije QED slijedi invarijantnost vakuuma na C ,

$$C|\Omega\rangle = |\Omega\rangle . \quad (1304)$$

S druge strane C transformacija mijenja predznak struje $j_\mu(x)$ (to je pokazano u Dodatku ...),

$$Cj^\mu(x)C^\dagger = -j_\mu(x), \quad (1305)$$

pa stoga je vakuumska očekivana vrijednost operatora EM struje jednaka nuli,

$$\langle\Omega|Tj_\mu(x)|\Omega\rangle = \langle\Omega|C^\dagger Cj_\mu(x)C^\dagger C|\Omega\rangle = -\langle\Omega|Tj_\mu(x)|\Omega\rangle . \quad (1306)$$

Isti argument vrijedi za vakuumsku očekivanu vrijednost neparnog broja EM struja (Taj rezultat poznat je kao Furry-jev teorem). Iz toga slijedi da su Greenove funkcije sa jednim i tri fotona jednake nuli.

DZ. Pokazati u najnižem redu računa smetnje da su amputirane Greenove funkcije sa jednim i tri fotona jednake nuli.

Preostale 4 Greenove funkcije različite su od nule i moramo ih detaljnije analizirati.

(f) Dijagram vlastite energije (Greenova funkcija s dvije elektronske linije)

Kako dijagram vlastite energije ovisi samo o impulsu p koji se javlja kao \not{p} ili $p^2 = \not{p}^2$, možemo je razviti u Taylorov razvoj oko $p = 0$ po \not{p} ,

$$\begin{aligned} \left\langle \leftarrow \bigcirc \right\rangle &= A_0 + A_1 \not{p} + A_2 p^2 + \dots \\ A_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\not{p}^n} \left(\left\langle \leftarrow \bigcirc \right\rangle \right) \Big|_{\not{p}=0} \end{aligned} \quad (1307)$$

Koeficijenti A_n su IR divergentni (sjetimo se da dijagram vlastite energije elektrona ima IR divergenciju), pa u računu tih koeficijenata treba uvesti IR regulator. Što se tiče UV divergencija samo A_0 i A_1 mogu imati UV divergencije zbog sljedećeg razloga. A_0 ima linearnu prividnu divergenciju (Λ^1). Ostali koeficijenti dobijaju se deriviranjem dijagrama vlastite energije po \not{p} , koje djeluju na propagatore koji sadrže \not{p} , npr.

$$\frac{d}{d\not{p}} \left(\frac{1}{\not{k} + \not{p} - m} \right) = -\frac{1}{(\not{k} + \not{p} - m)^2} . \quad (1308)$$

Drugim riječima svaka derivacija po \not{p} smanjuje prividnu divergenciju za jedan. Zbog toga A_1 ima logaritamsku prividnu divergenciju, a A_n , $n \geq 2$ su konačni (taj argument nije

valjan ako se divergencija javlja u poddijagramu).

- Helicitetni argument Ako bi masa elektrona bila jednaka nuli u Lagrangijanu ne bi bilo niti jednog člana koji bi mogao povezivati lijeve i desne komponente elektronskog polja (LD i DL članovi), tj. masa bi bila jednaka nuli u svim redovima računa smetnje. Uvođenjem mase u Lagrangijan mogu se pojaviti samo LD i DL članovi proporcionalni masi. Zbog toga A_0 mora biti proporcionalan masi a ne gornjoj granici integracije Λ , pa je njegova divergencija logaritamska a ne linearna. Stoga amplituda dijagrama vlastite energije ima oblik

$$\begin{array}{c} \leftarrow \text{---} \bigcirc \text{---} \end{array} = a_0 m \ln \Lambda + a_1 \not{p} \ln \Lambda + (\text{konačni članovi}) . \quad (1309)$$

Taj isti oblik smo našli eksplicitnim računom – vidi jedn. (1123).

(g) Dijagram elektronsko-fotonskog vrha

Opet uzimamo da smo IR regularizirali dijagram. Razvijamo izraz za vrh po vanjskim impulsima (dva su nezavisna). Kako je prvi član prividnu logaritamski divergentan, svi ostali članovi moraju biti konačni. Zbog toga divergentni dio amplitude $e^{-\gamma}$ vrha ima samo jednu divergentnu konstantu,

$$\begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \uparrow \text{---} \end{array} \propto -ie\gamma^\mu \ln \Lambda + (\text{konačni članovi}) . \quad (1310)$$

(c) Fotonska vlastita energija

Amplituda fotonske vlastite energije ograničena je Wardovim identitetom zbog kojeg amplituda mora sadržavati strukturu $g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu$ dimenzije 2,

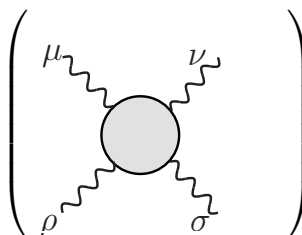
$$\text{---} \bigcirc \text{---} = (g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2), \quad (1311)$$

pa stoga je Π prividno logaritamski divergentna struktura. Razvoj amplitude u red stoga sadrži samo jednu logaritamski divergentnu konstantu. Taj smo rezultat dobili eksplicitnim računom u (1265).

(e) Amplituda foton-foton raspršenja

Wardov identitet zahtijeva da ako se zamijeni polarizacija bilo kojeg od četiriju fotona

amplituda mora biti jednaka nuli,

$$k^\mu \left(\begin{array}{c} \mu \\ \nu \\ \rho \\ \sigma \end{array} \right) = 0 . \quad (1312)$$


Zbog toga je amplituda mora biti proporcionalna produktu četiri faktora oblika $g^{\mu\mu_1} k^{\mu_2} - g^{\mu\mu_2} k^{\mu_1}$ koji su dimenzije 1. Stoga je konačna amplituda dimenzije $0 - 4 = -4$, dakle konačna.

Zaključak za QED u 4 dimenzije

QED u 4 dimenzije sadrži samo tri "primitivno" divergentne amplitude i to baš one koje smo već u prethodnom poglavlju analizirali. Sve divergencije su logaritamske. Razvojem u Taylorov red po vanjskim impulsima nalazi se da se divergencije tih amplituda mogu opisati sa 4 divergentne konstante: dvije za vlastitu energiju elektrona, jedna za vlastitu energiju fotona i jedna za $e - \gamma$ vrh. Ideja renormalizacije (vidi poslije) je apsorbirati te divergentne konstante u neobservabilne parametre Lagrangijana.

□ Prividna dimenzija općenito

Sada ćemo razmotriti prividna dimenziju u općoj teoriji polja kroz dva primjera – QED u bilo kojem broju dimenzija i u ϕ^4 teoriji u bilo kojem broju dimenzija. To će biti dovoljno za nalaženje klasifikacije teorija polja prema njihovoj renormalizabilnosti (u Dysonovom smislu).

QED u d dimenzija

Napomena: U ovom poglavlju ćemo broj dimenzija označavati malim slovom da bi se razlikovao od prividne dimenzije D .

Topološke relacije koje povezuju broj vrhova (V) sa brojem elektronskih vanjskih linije (N_e) i propagatora (P_e) odnosno sa brojem fotonskih vanjskih linija (N_γ) i propagatora (P_γ) jedn. (1301), odnosno broj petlji (L) sa P_e , P_γ i V (1300) su iste kao i u 4 dimenzije. Međutim relacija za prividnu dimenziju preko L , P_e i P_γ (1298) se mijenja,

$$D = dL - P_e - 2P_\gamma . \quad (1313)$$

Eliminirajući P_e i P_γ dobijamo

$$D = d(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma$$

$$\begin{aligned}
&= (d-1)\left(V - \frac{N_e}{2}\right) + (d-2)\frac{V - N_\gamma}{2} - dV + d \\
&= d + \left(\frac{d-4}{2}\right)V - \left(\frac{d-1}{2}\right)N_e - \left(\frac{d-2}{2}\right)N_\gamma .
\end{aligned} \tag{1314}$$

Poništenje V u izrazu za D se javlja samo za $d = 4$. Dakle samo u 4 dimenzije prividna dimenzija ne ovisi i broju vrhova. Za $d < 4$ dijagrami sa više vrhova imaju manju divergenciju, tako da je ukupan broj divergentnih dijagrama konačan. Za $d > 4$ dijagrami sa više vrhova imaju veću divergenciju i svaki dijagram postaje prividno divergentan u dovoljno visokom redu računa smetnje.

Ta tri tipa UV ponašanja javljaju se i u drugim teorijama polja. Po njima teorije polja dijelimo na:

1. **Super renormalizabilne teorije** : One koje imaju samo konačan broj Feynmanovih dijagrama koji divergira.
2. **Renormalizabilne teorije** : Teorije u kojima se javlja konačan broj prividno divergentnih amplituda. Broj amplituda koji prividno divergira je beskonačan.
3. **Nerenormalizabilne teorije** : Teorije u kojima su nakon nekog reda računa smetnje sve amplitude (prividno) divergentne.

Prema toj podjeli QED je renormalizabilna u 4 dimenzije, superrenormalizabilna u $d < 4$ dimenzija i nerenormalizabilna u $d > 4$ dimenzija.

- Komentari :

1. Gornji kriteriji s obzirom na prividnu divergenciju dijagrama (prividni kriteriji) daju ispravnu sliku divergentne strukture za većinu do sada razmatranih dijagrama.
2. Postoje teorije koje se bolje ponašaju nego što se to predviđaju prividni kriteriji koji se javljaju zbog simetrija teorije.
3. Kod prividno divergentnih teorija se divergencije uvijek mogu apsorbirati u (neobservabilne) parametre Lagrangijana.
4. Kod teorija koje imaju spin $s \geq 1$ javljaju se dodatni problemi sa unitarnošću teorije.

Skalarna ϕ^n teorija u d dimenzija

Lagrangijan skalarne ϕ^n teorije glasi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{n!}\phi^n . \tag{1315}$$

Uvedimo sljedeću **notaciju**. Neka je N broj vanjskih linija u dijagramu (amplitudi), P broj propagatora, a V broj vrhova. Broj petlji dan je relacijom

$$L = P - V + 1 . \tag{1316}$$

Topološka relacija između n , V , N i P je

$$nV = N + 2P . \tag{1317}$$

Prividna dimenzija D se može izraziti preko d , L i P ,

$$D = dL - 2P. \quad (1318)$$

Iz tog se izraza upotrebom relacija (1316) i (1317) može se eliminirati L i P ,

$$\begin{aligned} D &= d(P - V + 1) - 2P \\ &= d + V\left(\frac{n(d-2)}{2} - d\right) - \left(\frac{d-2}{2}\right)N. \end{aligned} \quad (1319)$$

Analizirajmo dobiveni izraz:

1. U 4 dimenzije za D dobijamo

$$D = 4 + V(n - 4) - N. \quad (1320)$$

Stoga je u 4 dimenzije ϕ^4 teorija renormalizabilna. Za $d > 4$ ϕ^4 teorija je nerenormalizabilna, a za $d < 4$ je superrenormalizabilna.

2. U tri dimenzije je

$$D = 3 + V\left(\frac{n}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2}\right)N. \quad (1321)$$

Renormalizabilna teorija je ϕ^6 . Za $d > 3$ ($d < 3$) ϕ^6 teorija je nerenormalizabilna (superrenormalizabilna).

3. U dvije dimenzije je

$$D = 2 - 2V. \quad (1322)$$

(dakle neovisan o N), pa je teorija superrenormalizabilna za bilo koju vrijednost n (ϕ^n teoriju).

- Izvod (1319) preko dimenzijske analize

Formula (1319) se može naći dimenzijskom analizom. U kvantnoj teoriji polja akcija $S = \int d^d x \mathcal{L}$ mora biti bezdimenzijska veličina ($\hbar = 1$). Kako $d^d x$ ima dimenziju (masa) $^{-d}$, to Lagrangijan mora imati dimenziju (masa) d . Iz jednadžbe (1315),

$$\underbrace{\mathcal{L}}_d = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\partial_\mu}_1 \underbrace{\phi}_{\frac{d-2}{2}} \right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{n!} \underbrace{\phi^n}_{\frac{n(d-2)}{2}} \quad (1323)$$

slijedi da je dimenzija polja ϕ jednaka $(d-2)/2$, a dimenzija konstante λ jednaka $d - n(d-2)/2$,

$$\begin{aligned} [\phi] &= \frac{d-2}{2}, \\ [\lambda] &= d - \frac{n(d-2)}{2}, \end{aligned} \quad (1324)$$

Uočimo da je dimenzija konstante veze $[\lambda]$ jednaka negativnom izrazu u prvoj zagradi u drugom redu jednačbe (1319). Stoga je

$$D = d - V[\lambda] - \left(\frac{d-2}{2}\right)N. \quad (1325)$$

Očigledno, ako je $[\lambda]$ negativan teorija ne može biti renormalizabilna jer je broj primitivno divergentnih dijagrama beskonačan.

Izvedimo isti rezultat na još jedan način. Razmotrimo bilo koji dijagram sa N vanjskih linija. **Takav se dijagram može shvatiti kao vrh međudjelovanja u Lagrangijanu – Razlog: samo je jedna δ -funkcija koja čuva ukupni impuls, pa dijagram možemo shvatiti kao efektivni vrh s integracijom po 4-koordinati koja daje sačuvanje 4-impulsa.** Dimenzija η je jednaka

$$[\eta] = d - N\frac{d-2}{2} \quad (1326)$$

η je ujedno i dimenzija amputirane amplitude. Stoga amputirana amplituda igra ulogu efektivnog vrha.

U našoj teoriji sa (samo) $\lambda\phi^n$ vrhom, ako dijagram ima V vrhova divergentni dio dijagrama je proporcionalan $\lambda^V\Lambda^D$, gdje je Λ gornja granica integracije 4-impulsa, a D je prividna divergencija dijagrama. Stoga mora vrijediti jednakost

$$d - N\left(\frac{d-2}{2}\right) = V\left[\underbrace{d - n\left(\frac{d-2}{2}\right)}_{=[\lambda]}\right] + D. \quad (1327)$$

A to je upravo jednakost (1319). Primjetite da je u jednakosti (1319) izraz u uglatoj zagradi jednak dimenziji konstante λ , $[\lambda]$. Taj rezultat daje novi pogled na klasifikaciju teorija s obzirom na prividnu divergenciju:

1. **Super-renormalizabilne teorije** su one za koje sve konstante veze imaju pozitivnu masenu dimenziju.
2. **Renormalizabilne teorije** imaju bezdimenzijske konstante veze (mogu imati i konstante veze pozitivne dimenzije).
3. **Nerenormalizabilne teorije** imaju (barem jednu) konstantu veze koja ima negativnu masenu dimenziju.

6.2 Renormalizirana teorija smetnje

* Renormalizabilna kvantna teorija polja (QFT)

Kao što smo vidjeli na primjerima renormalizabilna QFT ima mali broj prividno divergentnih dijagrama. Npr. u QED ih je 3, sa 4 divergentne konstante. Analiza u poglavljima

5.9, 5.11, 5.12 je pokazala da se divergencije u konačnim observabilnim veličinama krata, tj. da se mogu ukloniti redefinicijom par veličina u teoriji (to je sastavni dio postupka renormalizacije).

* Postupak renormalizacije u nerenormaliziranoj QFT

Postupak uklanjanja divergencija koji smo do sada upoznali u QFT sadržavao je sljedeće:

1. Račun (beskonačnih) dijagrama upotrebom regulatora. Time se dobijaju amplitude $\mathcal{M}(m_0, e_0; \Lambda)$ zavisne o regulatoru Λ i golih parametrima teorije (m_0 i e_0 i sl.).
2. Račun fizikalne mase i konstante veze kao funkcije golih parametara teorije i regulatora, $m(e_0, m_0, \Lambda)$, $e(e_0, m_0, \Lambda)$ u onom redu računa smetnje koji je potreban za dani račun ($1/(\not{p}-m_0-\Sigma(p)) = Z_2/(\not{p}-m)$; $\Gamma^\mu(q) = Z_1^{-1}\Gamma_R^\mu(q)$, Ward $Z_1 = Z_2$; $-e_0^2 g_{\mu\nu}/(q^2-\Pi(q^2)) = -e^2 g_{\mu\nu}/(q^2 - (\Pi(q^2) - \Pi(0)))$, $e^2 = Z_3 e_0^2 = e_0^2/(1 - \Pi(0))$).
3. Račun renormalizacijskih konstanti polja, koje su potrebne da bi se (preko LSZ formalizma) dobio S matrični element preko korelacijskih funkcija.
4. Eliminaciju nerenormaliziranih parametara teorije (e_0, m_0, \dots) renormaliziranim parametrima (m, e, \dots). Ovaj postupak je **renormalizacija** teorije.
5. Provjera da li je rezultat za danu amplitudu konačan u limesu kada $\Lambda \rightarrow \infty$.

Gornja procedura uvijek radi u renormalizabilnim QFT ali je za više redove računa smetnje nesporna (teška). Srećom postoji alternativna procedura koja automatski uklanja divergencije. Nju ćemo sada ilustrirati prvo na primjeru ϕ^4 teorije a u idućem poglavlju za QED.

Renormalizirana ϕ^4 teorija


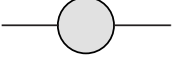
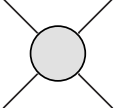
Lagrangijan ϕ^4 teorije je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4. \quad (1328)$$

Prividni stupanj divergencije dijagram s N vrhova za teoriju u 4 dimenzije prema (1320) glasi

$$D = 4 - N. \quad (1329)$$

Teorija ima $\phi \rightarrow -\phi$ simetriju pa zbog toga sve amplitude sa neparnim brojem vanjskih linija iščezavaju. Stoga preostaju samo sljedeće divergentne amplitude

- (a)  neobservabilni pomak u vakuumskoj energiji
- (b)  $\sim \Lambda^2 + p^2 \ln \Lambda + (\text{konačni članovi})$
- (c)  $\sim \ln \Lambda + (\text{konačni članovi})$

Vakuumski dijagram je neobservabilan pa nam preostaju samo dvije prividno divergentne amplitude sa tri beskonačne konstante.

* Reformulacija teorije: Renormalizirana teorija smetnje

Cilj je apsorbirati te konstante u neobservabilne parametre teorije, golu masu, goli konstantu veze i jakost polja. Da bi se to automatski postiglo uobičajeno je reformulirati polaznu teoriju tako da se neobservabilne veličine ne javljaju u Feynmanovim pravilima u (najnižem redu) računa smetnje. Postupak za to je sljedeći.

1. Eliminacija renormalizacijske konstante polja Z

Prvo se iz polja eliminira pomak u jakosti polja (koji se javlja zbog međudjelovanja). Egzaktna korelacijska funkcija dva polja prema (878) odnosno (883) glasi

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \text{članovi konačni u } p^2 = m^2, \quad (1330)$$

gdje je m fizikalna masa. Reziduum Z eliminiramo redefinicijom polja

$$\phi = Z^{1/2} \phi_r \quad \text{i} \quad \phi_r = Z^{-1/2} \phi. \quad (1331)$$

Time u računu S matičnih elemenata više ne trebamo faktore Z u LSZ formuli jer su već uključeni redefinicijom polja u račun. Lagrangijan tom transformacijom postaje jednak

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z (\partial_\mu \phi_r)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 Z \phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!} Z^2 \phi_r^4. \quad (1332)$$

Lagrangijan (1332) sadrži još uvijek golu masu i konstantu veze ϕ^4 teorije.

2. Eliminacija gole mase i konstante veze

Sljedeći korak je eliminacija golih parametara iz teorije – ovdje konkretno gole mase m_0 i

$$\begin{array}{ll}
\begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & = -i\lambda \\
\begin{array}{c} \text{---} \otimes \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & = i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \\
\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & = -i\delta_\lambda
\end{array} \tag{1337}$$

Propagator i vrh u prva dva Feynmanova pravila su isti kao u nerenormaliziranoj teoriji do na zamjene $m_0 \rightarrow m$ i $\lambda_0 \rightarrow \lambda$. Kontračlanovi daju nove vrhove (ti vrhovi se isto zovu "kontračlanovi").

5. Račun amplituda

Postupak računa amplituda je sljedeći:

- Za traženu amplitudu se izračuna doprinos sa vrhovima (1337). U vrhovima kontračlanova konstante δ_Z , δ_m i δ_λ nisu još fiksirane.
- Doprinosi petlji koje divergiraju regulariziraju uvođenjem regulatora. Tako dobivene amplitude ovise o regulatoru i tri nepoznate veličine δ_Z , δ_m i δ_λ .
- Parametri δ_Z , δ_m i δ_λ se podešavaju (ili "renormaliziraju") tako da se ispune renormalizacijski uvjeti (1335) i (1336).
- Nakon tog podešavanja amplitude moraju biti konačne i neovisne o regulatoru.

Gornja procedura u kojoj se rabe Feynmanova pravila sa kontračlanovima zove se **renormalizirana perturbacijska teorija**, nasuprot proceduri koju smo upoznali ranije koja se zove **gola/ogoljena perturbacijska teorija**. Obje su metode ekvivalentne, razlike među njima je stvar "knjigovodstva" (članova). Renormalizacijska perturbacijska teorija je općenito spretnija, posebno u višim redovima računa smetnje. Gola perturbacijska teorija zna biti jednostavnija u kompliciranim proračunima na nivou jedne petlje. Od sada nadalje rabit ćemo renormaliziranu perturbacijsku teoriju.

STRUKTURA ϕ^4 TEORIJE NA NIVOU JEDNE PETLJE

Razmotrimo gore objašnjenu renormalizacijsku proceduru na primjeru skalarne ϕ^4 teorije. Kako nećemo više trebati prividnu dimenziju D , sa D ćemo ponovno (kao i prije) označavati

dimenziju impulsne integracije ($d^D k$).

Korelacijska funkcija 4 polja i određivanje kontračlana δ_λ

Prvo razmotrimo proceduru za amplitudu $2 \rightarrow 2$ raspršenja (točke **a.** i **b.** gore),

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4) &= \text{diagram: a circle with four external lines labeled } p_1, p_2, p_3, p_4 \\
 &= \text{diagram: a cross} + \left(\text{diagram: a loop with two external lines} + \text{diagram: a loop with two external lines} + \text{diagram: a loop with two external lines} \right) + \dots \quad (1338)
 \end{aligned}$$

Ako definiramo $p = p_1 + p_2$ tada drugi dijagram u drugom redu (1338) (prvi u zagradama) glasi

$$\begin{aligned}
 \text{diagram: a loop with two external lines labeled } k \text{ and } k+p \text{ and an incoming line labeled } p &= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \\
 &\equiv (-i\lambda)^2 \cdot iV(p^2), \quad (1339)
 \end{aligned}$$

gdje smo definirali funkciju petlje $V(p^2)$. Kako je p^2 jednak Mandelstamovoj varijabli s taj dijagram ovisi samo o s (vidi eksplicitni račun malo niže). Na analogan način drugi i treći dijagram u zagradi ovise samo o t odnosno u . Ukupna amplituda glasi (uočite da je uključen i kontračlan),

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\delta_\lambda. \quad (1340)$$

Sada primjenjujemo renormalizacijski uvjet (1336), tj. da ukupna amplituda za $s = 4m^2$, $t = u = 0$ mora biti jednaka $-i\lambda$,

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}(s = 4m^2, t = u = 0) \\
 = -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(4m^2) + iV(0) + iV(0)] - i\delta_\lambda = -i\lambda, \quad (1341)
 \end{aligned}$$

odakle

$$\delta_\lambda = -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)]. \quad (1342)$$

Funkcije $V(p^2)$ još nisu određene. One se dobijaju iz eksplicitnog izraza prve petlja-amplitude (1339). Izraz je divergentan pa stoga treba uvesti regulator. Izračunat ćemo

ga primjenjujući dimenzijsku regularizaciju,

$$\begin{aligned}
V(p^2) &= i \cdot \frac{1}{2} \int \frac{\mu^{4-D} d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
&= \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{\mu^{4-D} d^D \ell}{(2\pi)^D} \frac{1}{[\ell^2 + x(1-x)p^2 - m^2 + i\varepsilon]^2} \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int \frac{\mu^{4-D} d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{[\underbrace{\ell_E^2 - x(1-x)p^2 + m^2}_{\equiv \Delta}]^2} \\
&\stackrel{(1243)}{=} -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)(4\pi)^{D/2}} \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2-D/2} \\
&\xrightarrow{D \rightarrow 4} -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi + \ln \frac{\mu^2}{m^2 - p^2 x(1-x)}\right). \quad (1343)
\end{aligned}$$

Uvrštavajući dobiveni izraz u (1342), za δ_λ dobijamo

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda &= -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)] \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx \left[\left(\frac{\mu^2}{m^2 - x(1-x)4m^2}\right)^{2-D/2} + 2\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{2-D/2} \right] \\
&\xrightarrow{D \rightarrow 4} \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{6}{\varepsilon} - 3\gamma + 3 \ln 4\pi + 3 \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \ln [1 - 4x(1-x)] \right]. \quad (1344)
\end{aligned}$$

Time je za korelacijsku funkciju s 4 polja ispunjena točka **c.** iz "Računa amplituda". Još je preostalo provjeriti da li je amplituda $i\mathcal{M}$ (1340) konačna (točka **d.**). Uvrštavanjem (1344) u (1340) nalazimo konačan izraz

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M} &= -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{m^2 - sx(1-x)}{m^2 - 4m^2x(1-x)}\right) \right. \\
&\quad \left. + \ln \left(\frac{m^2 - tx(1-x)}{m^2}\right) + \ln \left(\frac{m^2 - ux(1-x)}{m^2}\right) \right]. \quad (1345)
\end{aligned}$$

Korelacijska funkcija dva polja i kontračlanovi δ_m i δ_Z

Da bismo našli δ_m i δ_Z moramo izračunati korelacijsku funkciju dva polja $i\mathcal{M}(p^2)$. Prema (902) pripadnu 1PI amplitudu $i\mathcal{M}(p^2)$ (p je jedini 4 impuls koji se javlja u amplitudi) označavamo sa $-iM^2(p^2)$,

$$-iM^2(p^2) = \text{---} \bigcirc \text{---} . \quad (1346)$$

Ukupna korelacijska funkcija dva polja jednaka je geometrijskom redu (vidi (903)) (time su dovršene točke **a.** i **b.** iz "Račun amplituda")

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots$$

$$= \frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)}. \quad (1347)$$

U sumu (1347) sada ulaze i dijagrami sa vrhovima kontračlanova. Renormalizacijski uvjeti za korelacijsku funkciju 2 polja (1335) zahtjevaju da je pol propagatora u $p^2 = m^2$ i da ima reziduum iznosa 1 (tj. u renormaliziranoj teoriji nema dodatne renormalizacije valne funkcije). Razvojem $M^2(p^2)$ po p^2 oko $p^2 = m^2$ nalazimo da su ti uvjeti su ekvivalentni zahtjevima

$$M^2(p^2)|_{p^2=m^2} = 0 \quad i \quad \left. \frac{d}{dp^2} M^2(p^2) \right|_{p^2=m^2} = 0. \quad (1348)$$

Na nivou jedne petlje za $-iM^2(p^2)$ dobijamo,

$$\begin{aligned} -iM^2(p^2) &= \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \\ &= -i\lambda \cdot \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\mu^{4-D} d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \\ &\stackrel{(1243)}{=} -\frac{i\lambda m^2}{2} \cdot \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(1)} \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-D/2} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m). \end{aligned} \quad (1349)$$

Iz jednakosti (1349) nalazimo kontračlanove δ_m i δ_Z . Primjetimo da je doprinos prvog člana koji dolazi od petlje neovisan o p^2 . Zbog δ_Z mora biti jednak nuli na nivou jedne petlje. Stoga za beskonačne konstante u kontračlanovima na nivou jedne petlje dobijamo

$$\begin{aligned} \delta_Z &= 0, \\ \delta_m &= -\frac{\lambda m^2}{2} \cdot \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(1)} \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{1-D/2}. \end{aligned} \quad (1350)$$

Primjetimo da uz te vrijednosti konstanti δ_m i δ_Z amplituda $-iM^2(p^2) = 0$ za svaku vrijednost p^2 .

Napomena: Prvi doprinosi $-iM^2(p^2)$ i δ_Z javlja se u drugom redu računa smetnje (tj. proporcionalan je λ^2) i on dolazi od dijagrama,

$$\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} \quad (1351)$$

Ovdje možemo vidjeti odmah kako se renormaliziraju dijagrami petlji višeg reda. Drugi dijagram sadrži δ_λ kontračlan koji smo već izračunali i pored toga jednu petlju. On uklanja divergencije kada je jedan od 4 impulsa u dvije petlje velik. Taj kontračlan nije dovoljan da ukloni sve divergencije, pa se mora dodati još jedan drugog reda u konstanti

veze λ . Drugi kontračlan poništava divergencije koje se javljaju kada su 4-impulsi u obje petlje veliki. Primjetite da nije dovoljan jedan kontračlanski doprinos da bi poništio sve divergencije.

Konstante δ_Z i δ_m u Yukawinoj teoriji

Poništenje δ_Z na nivou jedne petlje je specijalno svojstvo ϕ^4 teorije. Ono se ne javlja u općenitijim teorijama sa skalarnim poljem. Npr. ne javlja se u Yukawinoj teoriji.

U Yukawinoj teoriji propagator skalarnе čestice dobija na nivou jedne petlje korekciju reda g^2 zbog fermionske petlje i zbog kontračlana za skalarni propagator (vrh je definiran u (753)),

$$\begin{aligned}
-iM^2(p^2) &= \text{---} \left(\text{---} \left(\text{---} \left(\text{---} \right) \right) \right) \text{---} + \text{---} \left(\text{---} \left(\text{---} \left(\text{---} \right) \right) \right) \text{---} \\
&= -(-ig)^2 \int \frac{d^D k \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \text{tr} \left[\frac{i(\not{k} + \not{p} + m_f)}{(k+p)^2 - m_f^2} \frac{i(\not{k} + m_f)}{k^2 - m_f^2} \right] + i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \\
&= -4g^2 \int \frac{d^D k \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{k \cdot (k+p) + m_f^2}{[(k+p)^2 - m_f^2][k^2 - m_f^2]} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \\
&= -4g^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D \ell \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{(\ell - px)(\ell + p(1-x)) + m_f^2}{\underbrace{[\ell^2 - (m_f^2 - p^2 x(1-x)) + i\varepsilon]^2}_{\Delta}} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \\
&= -4ig^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D \ell_E \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \left[\frac{-\ell_E^2}{[\ell_E^2 + \Delta]^2} + \frac{\overbrace{m_f^2 - p^2 x(1-x)}^{\Delta}}{[\ell_E^2 + \Delta]^2} \right] + i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \\
&= \frac{4ig^2 \Gamma(1 - \frac{D}{2})(D-1)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx \Delta \left(\frac{\mu^2}{\Delta} \right)^{2-D/2} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m), \tag{1352}
\end{aligned}$$

odakle

$$\begin{aligned}
M^2(p^2) &= (\delta_m - p^2 \delta_Z) - \frac{4g^2 \Gamma(1 - \frac{D}{2})(D-1)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx \Delta \left(\frac{\mu^2}{\Delta} \right)^{2-D/2} \\
\frac{d}{dp^2} M^2(p^2) &= -\delta_Z - \frac{4g^2 \Gamma(2 - \frac{D}{2})(D-1)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{\mu^2}{\Delta} \right)^{2-D/2}. \tag{1353}
\end{aligned}$$

Budući da Δ ovisi o p^2 i za δ_m i δ_Z će se dobiti vrijednost različita od nule kad se primjene renormalizacijski uvjeti (1335) odnosno (1348). Iz (1353) nalazimo δ_Z ,

$$\delta_Z = -\frac{4g^2 \Gamma(2 - \frac{D}{2})(D-1)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{\mu^2}{\Delta(m^2)} \right)^{2-D/2}, \tag{1354}$$

gdje je $\Delta(m^2) = m_f^2 - x(x-1)m^2$. Iz (1353) i rezultata za δ_Z nalazimo δ_m

$$\begin{aligned}
\delta_m &= m^2 \delta_Z + \frac{4g^2 \Gamma(1 - \frac{D}{2})(D-1)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx \Delta(m^2) \left(\frac{\mu^2}{\Delta(m^2)} \right)^{2-D/2} \\
&= \frac{4g^2 \Gamma(2 - \frac{D}{2})(D-1)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx \left(\frac{\mu^2}{\Delta(m^2)} \right)^{2-D/2} \left[\underbrace{m_f^2 - x(1-x)m^2 \left(2 - \frac{D}{2} \right)}_{\text{konačno}} \right] \\
&= \frac{4g^2 m_f^2 \Gamma(2 - \frac{D}{2})(D-1)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx \left(\frac{\mu^2}{\Delta(m^2)} \right)^{2-D/2} - \underbrace{\frac{2g^2 m^2}{(4\pi)^2}}_{\text{konačno}} . \tag{1355}
\end{aligned}$$

Dakle Yukawina teorija ima i δ_m i δ_Z različit od nule.

DZ. Nađi kontračlan za fermion-skalar vrh u Yukawinoj teoriji.

Pregled za renormaliziranu teoriju polja – postupak

1. Apsorbiraj renormalizacije jakosti polja reskalirajući polja.
2. Razdijeli \mathcal{L} u dva dijela, stavljajući beskonačne neobservabilne članove u kontračlanove.
3. Specificiraj renormalizacijske uvjete koji definiraju fizikalne mase i konstante veze i zadržavaju renormalizacije jakosti polja jednake jedinici (polja se više dodatno ne renormaliziraju).
4. Izračunaj amplitude s novim Feynmanovim pravilima, podešavajući kontračlanove tako da se ispune renormalizacijski uvjeti.

6.3 Renormalizacija QED

Primjenimo sada postupak za renormaliziranu teoriju polja na QED.

- Originalni QED Lagrangijan je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_0)\psi - e_0 \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu . \tag{1356}$$

1. Apsorpcija renormalizacijskih konstanti

U računima QED elektronskog i fotonskog propagatora sreli smo sljedeće izraze,

$$\begin{array}{cc}
\leftarrow \text{---} \bigcirc \text{---} & = \frac{iZ_2}{\not{p} - m} + \dots ; & \text{---} \bigcirc \text{---} & = \frac{-iZ_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \dots . \tag{1357}
\end{array}$$

Sada zamjenjujemo polja sa renormaliziranim poljima,

$$\psi = Z_2^{1/2} \psi_r \quad i \quad A^\mu = Z_3^{1/2} A_r^\mu . \tag{1358}$$

Time se eliminira faktor Z_2 i Z_3 iz izraza za propagatore (1357) (propagatori su sada propagatori u renormaliziranim poljima) i u LSZ formuli za S matrične elemente (907) se također eliminiraju ti isti faktori. Redefinicijom (1358) QED Lagrangijan postaje

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Z_3(F_r^{\mu\nu})^2 + Z_2\bar{\psi}_r(i\cancel{\partial} - m_0)\psi_r - e_0Z_2Z_3^{1/2}\bar{\psi}_r\gamma_\mu\psi_rA_r^\mu . \quad (1359)$$

2. Definicija (i skaliranje) fizikanog naboja; definicija mase

Uvodimo fizikani naboj definirajući faktor skaliranja Z_1 ,

$$e_0Z_2Z_3^{1/2} = eZ_1. \quad (1360)$$

Primjetite da naboj nije definiran kao $e_0Z_2Z_3^{1/2}$, već je uveden dodatni faktor skaliranja. Napomenimo da se QED naboj se mjeri na velikim udaljenostima odnosno malim prijenosima impulsa q .

Fizikalnu masu m definiramo kao položaj pola elektronskog propagatora.

3. Definicija kontračlanova

Definicija fizikalne mase i naboja nam omogućuje da Lagrangijan razdvojimo na dva dijela,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left(-\frac{1}{4}(F_r^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_r(i\cancel{\partial} - m)\psi_r - e\bar{\psi}_r\gamma_\mu\psi_rA_r^\mu \right) \\ & + \left(-\frac{1}{4}\delta_3(F_r^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_r(i\delta_2\cancel{\partial} - \delta_m)\psi_r \right) - e\delta_1\bar{\psi}_r\gamma_\mu\psi_rA_r^\mu . \end{aligned} \quad (1361)$$

Izraz u prvoj zagradi predstavlja Lagrangijan renormalizirane QED. Izraz u drugoj zagradi zadrži neobservabilne članove, kontračlanove. Beskonačne konstante koje se javljaju u kontračlanovima jednake su

$$\begin{aligned} \delta_3 & = Z_3 - 1, & \delta_2 & = Z_2 - 1, \\ \delta_m & = Z_2m_0 - m, & \delta_1 & = Z_1 - 1 = (e_0/e)Z_2Z_3^{1/2} - 1 . \end{aligned} \quad (1362)$$

4. Feynmanova pravila za renormaliziranu QED

Feynmanova pravila za renormaliziranu QED, koja izlaze iz Lagrangijana (1361) su

$$\begin{array}{c} \mu \text{ wavy line } \nu \\ \leftarrow q \end{array} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \quad (\text{Feynman gauge})$$

$$\begin{aligned}
\text{---} \overleftarrow{p} \text{---} &= \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \\
\begin{array}{c} \mu \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} &= -ie\gamma^\mu \\
\begin{array}{c} \mu \text{---} \text{---} \nu \\ \text{---} \otimes \text{---} \end{array} &= -i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\delta_3 \\
\begin{array}{c} \text{---} \otimes \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= i(\not{p}\delta_2 - \delta_m) \\
\begin{array}{c} \mu \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \otimes \text{---} \end{array} &= -ie\gamma^\mu \delta_1 .
\end{aligned} \tag{1363}$$

Pored standardnih QED pravila (prva tri), sada sa fizikalnom masom e^- i fizikalnim nabojem javljaju se još tri dodatna pravila za kontračlanove. ee i $ee\gamma$ kontračlanovi se mogu očitati direktno iz Lagrangijana (1361), dok za $\gamma\gamma$ kontračlan treba napraviti parcijalnu integraciju $\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2$ izraza koja daje $-\frac{1}{2}A_\mu(\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu)A_\nu$, što daje izraz za $\gamma\gamma$ kontračlan.

5. Renormalizacijski uvjeti

Svaki od kontračlanova mora biti određen (fiksiran) pripadnim renormalizacijskim uvjetom.

Četiri uvjeta smo već definirali:

- dva od njih određuju da je elektronska i fotonska jakost polja jednaka jedinici – nismo točno specificirali gdje, iako to znamo od prije – fotonska jakost u $q^2 = 0$ a elektronska jakost u $\not{p} = m$.

- ostala dva definiraju masu elektrona i njegov naboj – masa je ponovno definirana u $\not{p} = m$, a naboj u $q^\mu = 0$.

Da bismo eksplicitno napisali te uvjete trebaju nam notacija iz prethodnih poglavlja za amputirane jednočestično ireducibilne QED Greenove funkcije sa dva i tri polja,

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} \mu \text{---} \text{---} \nu \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} &= i\Pi^{\mu\nu}(q) = i(g_{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2), \\
\begin{array}{c} \text{---} \otimes \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= i\Sigma(\not{p}),
\end{aligned}$$

$$\left(\text{diagram of a shaded circle with a wavy line on top and two straight lines on the sides} \right)_{\text{amputiran}} = -ie\Gamma^\mu(p', p). \quad (1364)$$

Ukupni fotonski propagator (do na $q^\mu q^\nu$ članove koje zanemarujemo zbog Wardovog identiteta) i ukupni elektronski propagator glase (vidi (1132) i (1223)),

$$\begin{aligned} \mu \sim \text{diagram of a shaded circle with wavy lines on both sides} \sim \nu &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2(1 - \Pi(q^2))}, \\ \text{diagram of a shaded circle with an incoming straight line on the left and an outgoing straight line on the right} &= \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(\not{p})}. \end{aligned} \quad (1365)$$

Iz renormalizacijskih uvjeta slijedi da je

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{i}{\not{p} - \underbrace{(m + \Sigma(\not{p} = m))}_{=m} + (\not{p} - m) \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} + \dots}}_{=\not{p}-m} &\xrightarrow{\not{p} \rightarrow m} \frac{i}{\not{p} - m}, \\ \underbrace{\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2(1 - \underbrace{\Pi(0)}_{=1}) + \dots}}_{=1} &\xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}, \\ -ie\Gamma^\mu(p', p) &\xrightarrow{q^\mu \rightarrow 0} -ie\gamma^\mu, \end{aligned} \quad (1366)$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} \Sigma(\not{p} = m) &= 0, \\ \frac{d}{d\not{p}}\Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=m} &= 0, \\ \Pi(q^2 = 0) &= 0, \\ -ie\Gamma^\mu(p' - p = 0) &= -ie\gamma^\mu. \end{aligned} \quad (1367)$$

Prva od relacija (1367) fiksira masu, druga i treća su zahtjevi da su reziduumi elektronskog i fotonskog propagatora jednaki jedinici. Uz te uvjete zadnja relacija fiksira da je naboj elektrona jednak e . Iz tih uvjeta se mogu odrediti **renormalizacijske konstante** δ_1 , δ_2 , δ_3 i δ_m . One se određuju u perturbativnom računu smetnje i to iterativno, za svaki red računa smetnje posebno.

STRUKTURA QED NA NIVOU JEDNE PETLJE

Sada ćemo naći u drugom redu računa (e^2 odnosno α red) smetnje amputirane 1PI funkcije $\Sigma(p)$, $\Pi(q^2)$ i $\Gamma^\mu(q)$ rabeći Feynmanova pravila renormalizirane QED i dimenzijsku regularizaciju, te infinitezimalnu masu fotona μ_1 za regularizaciju IR divergencija (stavljamo μ_1 jer μ iznačava masu u integracijskoj mjeri). Iz njih i renormalizacijskih uvjeta (1367) odredit ćemo renormalizacijske konstante δ_1 , δ_2 , δ_3 i δ_m u najnižem redu računa smetnje. Indeks 2 na veličinama (npr. Σ_2) označava veličinu izračunatu u drugom redu računa smetnje.

Dijagram vlastite energije elektrona i nalaženje δ_2 i δ_m

U renormaliranoj QED dijagram vlastite energije elektrona pored petlja-doprinos (označavamo ga sa L) ima i doprinos od kontračlana (označavamo ga sa C), za koji znamo oblik ali ne i renormalizacijske konstante δ_2 i δ_m koje se javljaju u njemu,

$$-i\Sigma_2(p) = -i\Sigma_2^L(p) - i\Sigma_2^C(p), \quad (1368)$$

gdje je

$$-i\Sigma_2^C(p) = \begin{array}{c} \leftarrow \otimes \longrightarrow \\ p \end{array} = i(\not{p}\delta_2 - \delta_m), \quad (1369)$$

a $-i\Sigma_2^L(p)$ doprinos petlje koji ćemo sada izračunati,

$$\begin{aligned} -i\Sigma_2^L(p) &= \begin{array}{c} p-k \\ \text{cloud} \\ \leftarrow p \quad \leftarrow k \quad \leftarrow p \end{array} \\ &= -e^2 \int \frac{\mu^{4-D} d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma_\mu}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)((p-k)^2 - \mu_1^2 + i\varepsilon)} \\ &= -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{\mu^{4-D} d^D \ell}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)(\not{\ell} + \not{p}x) + Dm}{[\ell^2 - \underbrace{((1-x)m^2 + x\mu_1^2 - p^2x(1-x))}_{\equiv \Delta} + i\varepsilon]^2} \\ &= -ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{\mu^{4-D} d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)(\not{p}x) + Dm}{[l_E^2 + \Delta]^2} \\ &= -ie^2 \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)} \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2-D/2} [(2-D)\not{p}x + Dm]. \quad (1370) \end{aligned}$$

Tu je $\Delta = (1-x)m^2 + x\mu^2 - p^2x(1-x)$. Množenjem (1370) s i i deriviranjem po \not{p} dobijamo

$$\Sigma_2^L(p) = e^2 \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_0^1 dx \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}} [(2-D)\not{p}x + Dm]$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma_2^L(p)}{d\rlap{/}p} &= e^2 \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_0^1 dx \left(\frac{\mu}{\Delta}\right)^{2 - \frac{D}{2}} \\ &\times \left[(2 - D)x + \frac{((2 - D)x\rlap{/}p + Dm)x(1 - x)(2 - \frac{D}{2})\rlap{/}p}{\Delta} \right]. \end{aligned} \quad (1371)$$

S druge strane (1369) slijedi

$$\begin{aligned} \Sigma_2^C(p) &= -\rlap{/}p\delta_2 + \delta_m, \\ \frac{d\Sigma_2^C(p)}{d\rlap{/}p} &= -\delta_2. \end{aligned} \quad (1372)$$

Rabeći (1368), (1371), (1372), iz drugog od renormalizacijskih uvjeta (1367) dobijamo,

$$\begin{aligned} \delta_2 &= -\left. \frac{d\Sigma_2^C(p)}{d\rlap{/}p} \right|_{\rlap{/}p=m} = \left. \frac{d\Sigma_2^L(p)}{d\rlap{/}p} \right|_{\rlap{/}p=m} \\ &= -\frac{e^2 \Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_0^1 dx \left(\frac{\mu^2}{m^2(1-x)^2 + x\mu_1^2} \right)^{2 - \frac{D}{2}} \\ &\times \left[(D - 2)x - \underbrace{\left(2 - \frac{D}{2} \right) \frac{2x(1-x)((2-D)x + D)}{(1-x)^2 + x(\mu_1^2/m^2)}}_{\text{konačno}} \right] \\ &\xrightarrow{D \rightarrow 4} -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[2x \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{\mu^2}{m^2} - 1 - \ln \left[(1-x)^2 + \frac{\mu_1^2}{m^2} \right] \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2x(1-x)(4-2x)}{(1-x)^2 + x\frac{\mu_1^2}{m^2}} \right]. \end{aligned} \quad (1373)$$

Primjetite da drugi član u uglatoj zagradi u drugom redu jednadžbe (1373) daje konačan rezultat jer sadrži faktor $2 - D/2$ koji u kombinaciji sa $\Gamma(2 - \frac{D}{2})$ daje 1. Rabeći (1368), (1371), (1372), te rezultat (1373) iz prvog od renormalizacijskih uvjeta (1367) dobijamo

$$\begin{aligned} \delta_m &= \delta_2 m - \Sigma_2^C(m) = \delta_2 m + \Sigma_2^L(m) \\ &= -\frac{e^2 m \Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_0^1 dx \left(\frac{\mu^2}{m^2(1-x)^2 + x\mu_1^2} \right)^{2 - \frac{D}{2}} \\ &\times \left[D - \underbrace{\left(2 - \frac{D}{2} \right) \frac{2x(1-x)((2-D)x + D)}{(1-x)^2 + x(\mu_1^2/m^2)}}_{\text{konačno}} \right] \\ &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[4 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{1}{2} - \ln \left[(1-x)^2 + \frac{\mu_1^2}{m^2} \right] \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2x(1-x)(4-2x)}{(1-x)^2 + x\frac{\mu_1^2}{m^2}} \right]. \end{aligned} \quad (1374)$$

Dijagram vlastite energije fotona (tj. vakuumske polarizacije) i nalaženje δ_3

Kao kod dijagrama vlastite energije elektrona, u renormaliziranoj QED dijagram vlastite energije fotona jednak je zbroju petlja-doprinosa i kontračlan doprinosa,

$$\begin{aligned} i(\Pi_2)_{\mu\nu}(q) &= i(\Pi_2^L)_{\mu\nu}(q) + i(\Pi_2^C)_{\mu\nu}(q) \\ &= (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) i\Pi_2(q^2) \end{aligned} \quad (1375)$$

(druga jednakost je posljedica baždarne invarijantnosti). Tu je prema Feynmanovom dijagramu za kontračlan (vidi četvrti dijagram u (1363))

$$i(\Pi_2^C)_{\mu\nu}(q) = -i\delta_3(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) i\Pi_2^C. \quad (1376)$$

Petlja-doprinosa smo izračunali već ranije (vidi jednadžbe (1263) i (1264)) ali sa golim parametrima m_0 i e_0 . Rezultat je isti, samo treba zamijeniti $m_0 \rightarrow m$ i $e_0 \rightarrow e$,

$$\begin{aligned} -i(\Pi_2^L)^{\mu\nu}(q) &= \begin{array}{c} \text{Diagram: A circular loop with two external wavy lines. The top-left wavy line has momentum $k+p$ and the bottom-left wavy line has momentum p. The top-right wavy line has momentum $k+p$ and the bottom-right wavy line has momentum k. \\ \\ &= -4e^2 \int \frac{d^D k \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu(k+q)^\nu + k^\nu(k+q)^\mu - g^{\mu\nu}(k \cdot (k+q) - m^2)}{[k^2 - m^2 + i\varepsilon][(k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\ &= (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) i\Pi_2(q^2), \end{array} \quad (1377) \end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned} \Pi_2^L(q^2) &= \frac{-8e^2}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2 - D/2)(\mu^2)^{2-D/2}}{\Delta^{2-D/2}} \\ &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi + \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{\Delta}{m^2} \right) \end{aligned} \quad (1378)$$

gdje je $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$. Iz (1376), (1377) i (1375) slijedi

$$\begin{aligned} \Pi_2(q^2) &= \Pi_2^L(q^2) + \Pi_2^C(q^2) \\ &= -\delta_3 - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi + \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{\Delta}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (1379)$$

Iz trećeg od QED renormalizacijskih uvjeta (1367) slijedi

$$\begin{aligned} \delta_3 &= \Pi_2^L(0) \\ &= \frac{-8e^2 \Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \\ &= -\frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (1380)$$

Dijagram vrha i određivanje kontračlana δ_1

U renormaliziranoj QED amplituda vrha ima tri doprinosa

$$\bar{u}(p')[-ie\Gamma^\mu(p', p)]u(p) = \bar{u}(p') \left[-ie \left(F_1(q^2)\gamma^\mu + F_2(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right) \right] u(p)$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{c} \mu \\ \downarrow q \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ / \quad \backslash \\ p' \quad p \end{array} \quad + \quad \begin{array}{c} \mu \\ \downarrow q \\ \text{---} \otimes \text{---} \\ / \quad \backslash \\ p' \quad p \end{array} \quad + \quad \begin{array}{c} \mu \\ \downarrow q \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ / \quad \backslash \\ p' \quad p \end{array} \end{array} \quad (1381)$$

Prva dva člana daju doprinos samo form faktoru $F_1(q^2)$

$$\begin{aligned} (\Gamma^\mu)_{a+b} &= \gamma^\mu + \gamma^\mu \delta_1, \\ (F_1)_{a+b}(q^2) &= 1 + \delta_1, \end{aligned} \quad (1382)$$

dok treći član daje doprinos za oba form faktora. Promjetite da iz toga izlazi da se form faktor $F_2(q^2)$ ne treba renormalizirati na nivou jedne petlje. (To je opće svojstvo za svaki operator koji se javlja tek na nivou s n petlji – na tom nivou njega se ne treba renormalizirati.) Za nalaženje renormalizacijske konstante dovoljno je izračunati treću amplitudu za $p = p'$ tj. $q = 0$,

$$\begin{aligned} &\bar{u}(p')[-ie\Gamma_c^\mu(p', p)]u(p) \\ &= \int \frac{d^D k \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p')\gamma_\alpha(\not{k} + \not{q} + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\alpha u(p)(-e^3)}{[k^2 - m^2 + i\varepsilon][(k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p-k)^2 - \mu_1 + i\varepsilon]} \\ &= (-e^3) \int_0^1 dx dy dz 2\delta(x+y+z) \int \frac{d^D \ell \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{B}{[\ell^2 - \Delta + i\varepsilon]^3}, \end{aligned} \quad (1383)$$

gdje je $\Delta = m^2(1-z)^2 - q^2xy$, a B je dan izrazom

$$\begin{aligned} B &= \bar{u}(p')[\gamma_\alpha(\not{\ell} + \not{q}(1-y) + \not{p}z + m)\gamma^\mu(\not{\ell} - \not{q}y + \not{p}z + m)\gamma^\alpha]u(p) \\ &\xrightarrow{q \rightarrow 0} \bar{u}[\gamma_\alpha(\not{\ell} + \not{p}z + m)\gamma^\mu(\not{\ell} + \not{p}z + m)\gamma^\alpha]u(p) \\ &= \bar{u}(p)\gamma^\mu u(p) \left[\frac{(2-D)^2}{D} + m^2((2-D)(z^2+1) + 2zD) \right] u(p). \end{aligned} \quad (1384)$$

Odatle sređivanjem, rabeći $\Delta(0) = (1-z)^2m^2 + z\mu^2$ (omogućuje integraciju po x i y), te integracijom po 4 impulsu dobijamo

$$\begin{aligned} \bar{u}(p)[-ie\Gamma_c^\mu(p, p)]u(p) &= \bar{u}(p)\gamma^\mu u(p)[-ieF_1(0)] \\ &= (-2e^3)\bar{u}(p)\gamma^\mu u(p) \int_0^1 dz(1-z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{(2-D)^2}{D} \int \frac{\mu^{4-D} d^D \ell}{(2\pi)^D} \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta(0) + i\varepsilon]^3} \right. \\
& \quad \left. + m^2((2-D)(z^2+1) + 2zD) \int \frac{\mu^{4-D}}{d^D \ell} (2\pi)^D \frac{1}{[\ell^2 - \Delta(0) + i\varepsilon]^3} \right] \\
& = \frac{-2ie^3}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dz(1-z) \left[\left(\frac{\mu^2}{\Delta(0)} \right)^{2-\frac{D}{2}} \frac{(2-D)^2 \Gamma(2-\frac{D}{2})}{2} \right. \\
& \quad \left. + \Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right) \left(\frac{\mu^2}{\Delta(0)} \right)^{2-\frac{D}{2}} \frac{m^2[(D-2)(z^2+1) - 2Dz]}{\Delta(0)} \right] \\
& = \frac{(-2ie^3) \bar{u}(p) \gamma^\mu u(p)}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz(1-z) \\
& \quad \times \left[\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi - 1 + \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \ln \frac{\Delta(0)}{m^2} \left(+ \frac{m^2}{\Delta(0)} (z^2+1-4z) \right) \right) \right]. \quad (1385)
\end{aligned}$$

Odatle možemo očitati izraz za $(F_1)_c(0)$. Ukupni $F_1(0)$ jednak je zbroju vrijednosti (1382) i (1385) i on prema četvrtom od QED renormalizacijskih uvjeta (1367) mora biti jednaka jedinici, $F_1(0) = 1$. Odatle za δ_2 dobijamo

$$\begin{aligned}
\delta_1 & = -F_1^L(0) \\
& = -\frac{e^2}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dz(1-z) \left(\frac{\mu^2}{m^2(1-z)^2 + \mu_1^2 z} \right)^{2-\frac{D}{2}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{(2-D)^2 \Gamma(2-\frac{D}{2})}{2} + \Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right) \frac{[(D-2)(z^2+1) - 2Dz]}{((1-z)^2 + \frac{\mu_1^2}{m^2} z)} \right) \right]. \quad (1386)
\end{aligned}$$

Rabeći izraze za δ_1 (1386) i δ_2 (1373) možemo provjeriti da li vrijedi jednakost $Z_1 = Z_2$, odnosno $\delta_1 = \delta_2$. Da bi se to to dokazalo treba rabiti parcijalnu integraciju i razvoj po $\varepsilon = 4 - D$. Konačan rezultat koji se dobiva gornjim postupkom za $\delta_1 - \delta_2$ jednak je nuli.

DZ. Za domaću zadaću pokažite da je $\delta_1 - \delta_2 = 0$ polazeći od izraza za δ_1 (1386) i δ_2 (1373) koji su "egzaktni" tj. ovise o D (nisu razvijeni po ε).

Dokaz relacije $\delta_1 = \delta_2$ na nivou jedna petlje iz Wardovog identiteta

Kao i u prijašnjim računima jednakost $\delta_1 = \delta_2$ slijedi iz Wardovog identiteta. QED Lagrangijan bez kontračlanova

$$\mathcal{L}_r = -\frac{1}{4} (F_r^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_r (i\rlap{/}\partial - m) \psi_r - e \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r A_r^\mu \quad (1387)$$

je baždarno invarijantan. Ako je regulator baždarno invarijantan, a je jer rabimo dimenzijsku regularizaciju, to implicira da je Wardov identitet ispunjen bez kontračlanova. Posebice to osigurava da je ispunjena jednakost

$$\delta F_1^L(0) + \left. \frac{d\Sigma_2^L}{d\rlap{/}p} \right|_{\rlap{/}p=m} = 0. \quad (1388)$$

Zbog toga će i kontračlanovi koji poništavaju $F_1^L(0)$ odnosno $(d\Sigma_2^L/d\not{p})|_{\not{p}=m}$ biti jednaki (Sjetimo se $\delta_1 = -F_1^L(0)$ i $\delta_2 = (d\Sigma_2^L/d\not{p})|_{\not{p}=m}$). Stoga je u α redu $\delta_1 = \delta_2$.

Dokaz relacije $\delta_1 = \delta_2$ iz Wardovog identiteta u bilo kojem redu računa smetnje

Upotrebom istog argumenta i metoda koje smo rabili da bi dokazali Wardov identitet u bilo kojem redu računa smetnje u "goloj" teoriji možemo dokazati jednakost $\delta_1 = \delta_2$ u bilo kojem redu računa smetnje. Generalizacijom argumenata koji su korišteni u "goloj" teoriji, može se pokazati da vrijedi jednakost (Peskin 7.68) ako su uključeni i kontračlanovi. Ako je pokazana jednakost $\delta_1 = \delta_2$ u α^n -tom radu računa smetnje, tada slijedi da je $(d\Sigma_2/d\not{p})|_{\not{p}=m} = F_1(0)$ u α^{n+1} -vom redu računa smetnje. Da bi bio ispunjen renormalizacijski uvjet (Peskin 10.40) tada moramo staviti da je $\delta_1 = \delta_2$ u α^{n+1} -vom redu računa smetnje. Opisani postupak daje dodatni dokaz relacije $Z_1 = Z_2$ u bilo kojem redu računa smetnje.

(Amon intepretacija : Nulti red : vrijedi Ward u renormaliziranoj teoriji (RT):

$$\begin{aligned} q_\mu \Gamma_0^\mu &= q_\mu \gamma^\mu \\ &= (\not{p} + \not{q} - m) - (\not{p} - m) = i(S_0^{-1}(p+q) - S_0^{-1}(p)) . \end{aligned} \quad (1389)$$

Wardov identitet po Peskinu vrijedi u svakom redu računa smetnje, dakle i u prvom. Razlog za to je indirektan. On vrijedi za голу teoriju. Dakle vrijedi i za teoriju s kontračlanovima u bilo kojem redu računa smetnje. Samo sve veličine treba razviti u red po e i gledati članove uz dani red računa smetnje – on mora biti zadovoljavati Wardov identitet u tom redu računa smetnje. Odatle u prvom redu slijedi (dodajemo kontračlanove, vrijedi $F_1(0) = 1$, pol propagatora je 1),

$$\begin{aligned} q_\mu \Gamma_1^\mu(0) &= \not{q}(1 - \delta_1) \\ &= ((\not{p} + \not{q})(1 - \delta_2) - m(1 + \delta_m)) - (\not{p}(1 - \delta_2) - m(1 + \delta_m)) . \end{aligned} \quad (1390)$$

Odatle dobijamo $\delta_1 = \delta_2$ u prvom redu računa smetnje. Postupak ponovimo za drugi red računa smetnje, uključujući i kontračlanove u prvom redu računa smetnje. Tada ćemo dobiti $\delta_1 = \delta_2$ u drugom redu računa smetnje. Postupak nastavljamo ...)

Univerzalnost naboja

Jednakost $Z_1 = Z_2$ ima jednu bitnu implikaciju koja slijedi iz definicije renormaliziranog naboja (1360),

$$\begin{aligned} Z_1 e &= Z_2 Z_3^{1/2} e_0 \\ \xrightarrow{Z_1=Z_2} e &= Z_3^{1/2} e_0 . \end{aligned} \quad (1391)$$

Kao što se vidi iz druge jednakosti veza između golog i renormaliziranog naboja ovisi samo o jakosti renormalizacije fotonskog polja, Z_3 a ne o svojstvima čestice s kojim foton

međudjeluje (osim njenog golog naboja). Npr, za elektron i mion imamo,

$$\begin{aligned} e_e &= (Z_3^e)^{1/2} e_0, \\ e_\mu &= (Z_3^\mu)^{1/2} e_0. \end{aligned} \quad (1392)$$

Kako elektron i mion imaju iste gole naboje to su i njihovi renormalizirani naboji jednaki. To znači da su fizikalni naboji svih čestica istog golog naboja međusobno jednaki, tj da je naboj univerzalna veličina.

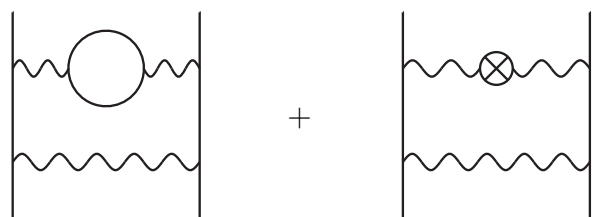
6.4 Renormalizacija u višim redovima računa smetnje

- U prethodnim poglavljima razvijen je algoritam za račun amplituda raspršenja u bilo kojem redu računa smetnje renormalizabilne teorije polja.
- Pokazali smo da taj algoritam daje konačne rezultate na nivou jedne petlje u ϕ^4 teoriji i QED.
- Prema naivnoj/jednostavnoj analizi u poglavlju 6.1. algoritam bi trebao raditi i u višim redovima računa smetnje. Međutim u toj analizi su zanemareni poddijagrami.

Divergentni poddijagrami

A. Konačni dijagram s divergentnim poddijagramom

Ako inače konačni dijagram sadrži beskonačan poddijagram, divergenciju je lako tretirati. Npr. suma dijagrama,



$$(1393)$$

je konačna. Divergencija fotonskog propagatora se poništava na isti način kada se takve strukture,



$$(1394)$$

javljaju u drvastom dijagramu. Konačna suma propagatorska dijagrama daje integrand vanjskoj petlji koja konvergira dovoljno brzo (u impulsu petlje) da integral još uvijek

konvergira. Pokažimo to na gornjem primjeru.

Rabeći izraze za $\Pi_2(q^2)$ (vidi (1264) i (1265) i za fotonski kontračlan (vidi (1363) i (1380)), nalazimo,

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^L(q) &= i(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\Pi_2(q^2) \\
&= i(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu) \\
&\quad \times \left[-\frac{e^2\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{\mu^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right)^{4-D} \right], \\
\Pi_{\mu\nu}^C(q) &= i(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)[- \delta_2] \\
&= i(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)[- \Pi_2(0)].
\end{aligned} \tag{1395}$$

Odatle nalazimo,

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}(q^2) &= \Pi_{\mu\nu}^L(q^2) + \Pi_{\mu\nu}^C(q^2) \\
&= i(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)[\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0)] \\
&= i(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu) \frac{-e^2\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \\
&\quad \times \int_0^1 dx x(1-x) \underbrace{\left[\left(\frac{\mu^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right)^{4-D} - 1 \right]}_{\text{proporcionalno } \varepsilon = 4 - D} \\
&= i(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu) \cdot \frac{-8e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \cdot \frac{q^2}{m^2} x(1-x) \\
&= i(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu) \frac{-\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2}.
\end{aligned} \tag{1396}$$

Uvrštavajući taj izraz u kao efektivni operator u kvadratični dijagram nalazimo da je amplituda (1393) jednaka

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_3) (-ie\gamma_\mu) \frac{i(\not{\ell} + \not{p}_3 + m)}{(\ell + p_3)^2 - m^2 + i\varepsilon} (-ie\gamma_\nu) u(p_1) \\
&\quad \times \bar{u}(p_4) (-ie\gamma_\rho) \frac{i(-\not{\ell} + \not{p}_4 + m)}{(-\ell + p_4)^2 - m^2 + i\varepsilon} (-ie\gamma_\sigma) u(p_2) \\
&\quad \times \frac{-ig^{\nu\sigma}}{(\ell + p_3 - p_1)^2 + i\varepsilon} \cdot \frac{-ig^{\mu\mu_1}}{\ell^2 + i\varepsilon} \left[i(g_{\mu_1\mu_2}\ell^2 - \ell_{\mu_1}\ell_{\mu_2}) \frac{-\alpha}{15\pi} \frac{\ell^2}{m^2} \right] \frac{-ig^{\mu_2\rho}}{\ell^2 + i\varepsilon},
\end{aligned} \tag{1397}$$

gdje su p_3 i p_4 izlazni a p_1 i p_2 ulazni impulsi elektrona, a ℓ impuls koji prolazi kroz fotonski dijagram vlastite energije (ostale možete lako naći). Dimenzija integrala u ℓ impulsima jednaka je -4 , pa je cjelokupni integral konačan i stoga je opravdano integrirati u $D = 4$ dimenzija.

B. Ugnježdene/preklopne divergencije

- Kompliciranije situacija se javlja ako imamo **ugnježdene ili preklapajuće divergencije**. Evo nekih **primjera**

u ϕ^4 teoriji

u QED . (1398)

Fotonski dijagram vlastite energije na nivou dvije petlje

- Razmotrimo fotonski dijagram vlastite energije,

(1399)

Jedan doprinos dijagramu se javlja kada je k_2 jako velik. To znači da su točke x, y, z jako bliske, dok w može biti dalje od njih. U tom području impulsa možemo misliti o virtualnom fotonu misliti kao o korekciji na vrh u točki x .

-Divergencije

Rabeći Pauli-Villarsovu regularizaciju za korekciju vrha našli smo da je korekcija vrha ima logaritamsku divergenciju oblika

$\sim -ie\gamma^\mu \cdot \alpha \ln \Lambda^2$ (1400)

u limesu $\Lambda \rightarrow \infty$. Umećući taj izraz u ostatak dijagrama i integrirajući po k_1 dobijamo izraz za vlastitu energiju $\Pi_2(q^2)$ pomnoženu s dodatnom logaritamskom divergencijom

$\sim \alpha(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi_2(q^2) \cdot \alpha \ln \Lambda^2$

$$\sim \alpha(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi_2(q^2)(\ln \lambda^2 + \ln q^2) \cdot \alpha \ln \Lambda^2. \quad (1401)$$

- Izvor $(\ln \Lambda)^2$ članova je područje impulsa gdje su i k_1 i k_2 veliki.

- $\ln q^2 \ln \Lambda^2$ član dolazi iz područja gdje je k_2 velik a k_1 malen.

Drugi takav član javlja se kada je k_1 velik a k_2 malen, i njemu odgovara dijagram u kojem su točke y , z i w bliske, pa se virtualni foton koji se izmjenjuje između y i z može uzeti kao korekcija vrha u w .

-Problem s kriterijem "prividne divergencije i njegovo rješenje"

- Članovi proporcionalni $\Pi_2(q^2) \ln \Lambda^2$ u vakuumskom polarizacijskom dijagramu s dvije petlje (1399) su u kontradikciji s naivnim argumentom, baziranim na kriteriju prividne divergencije, da su divergentni članovi Feynmanovih integrala uvijek JEDNOSTAVNI POLINOMI u q^2 .

- Divergencije koje se javljaju uz POLINOME u q^2 zovemo **LOKALNIM DIVERGENCIJAMA**.

- Divergencije koje se javljaju uz FUNKCIJE KOJE NISU POLINOMI u q^2 zovemo **NELOKALNIM DIVERGENCIJAMA**.

- Iz našeg izvoda se vidi **fizikalni smisao nelokalnih divergentnih članova**: To su **lokalne divergencije okružene sa običnim, ne-divergentnim procesima u QFT**.

- Sukcesivno poništenje kontračlanovima

Ako ta slika opisuje sve divergentne članove u dijagramu s dvije petlje, očekuje se da se divergencije mogu poništiti s dva tipa kontračlanskih dijagrama:

1. Dijagrami reda α koji se dobijaju ubacivanjem kontračlanova reda α u dijagram vakuumske polarizacije s jednom petljom:



$$\quad \quad \quad (1402)$$

Ti bi dijagrami trebali poništiti nelokalne divergencije u (1399). Oni odgovaraju doprinosima kada je jedan od impulsa k_1 , k_2 velik a drugi malen.

Detaljna analiza pokazuje da suma dijagrama (1399) i ta dva dijagrama kontračlana (1402) sadrže **samo lokalne divergencije**.

2. Preostala divergencija reda α^2 može se poništiti dijagramom



$$\quad \quad \quad (1403)$$

tj. dodajući α^2 doprinos renormalizacijskoj konstanti δ_3 .

DIVERGENCIJE FEYNMANOVIH DIJAGRAMA SA VIŠE PETLJI I NJIHOVO PONIŠTENJE

Gornji primjer se može proširiti na opću sliku divergencija Feynmanovih dijagrama s više petlji i njihovo poništenje.

- Dijagram može sadržati lokalne divergencije.
- Dijagram može sadržati nelokalne divergencije zbog divergentnih poddijagrama umetnutih u petlje s malim impulsima. Te se divergencije krata sa dijagramima u kojima su divergentni poddijagrami zamjenjeni sa dijagramima-kontračlanovima. Pokazuje se da ta procedura **uklanja sve nelokalne divergencije**.
- Nadalje, pokazuje se da se sve **preostale lokalne divergencije mogu ukloniti kontračlanovima polinomijalnog oblika** i time se postiže **konačnost** sveukupnih amplituda.

Prvi su dokaz gornjih tvrdnji u bilo kojem redu računu smetnje našli Bogoliubov i Parasiuk (koji su započeli dokaz), Hepp (koji je završio dokaz) i Zimmermann (koji je elegantno formulirao njihove rezultate). Njihov rezultat je poznat kao **BPHZ teorem**. On tvrdi da se **za svaku renormalizabilnu teoriju polja** (u Dysonovom smislu?) **divergencije uklanjaju u svakom redu računa smetnje vrhovima-kontračlanovima koji odgovaraju "prividno" divergentnim amplitudama** (npr. u QED to su

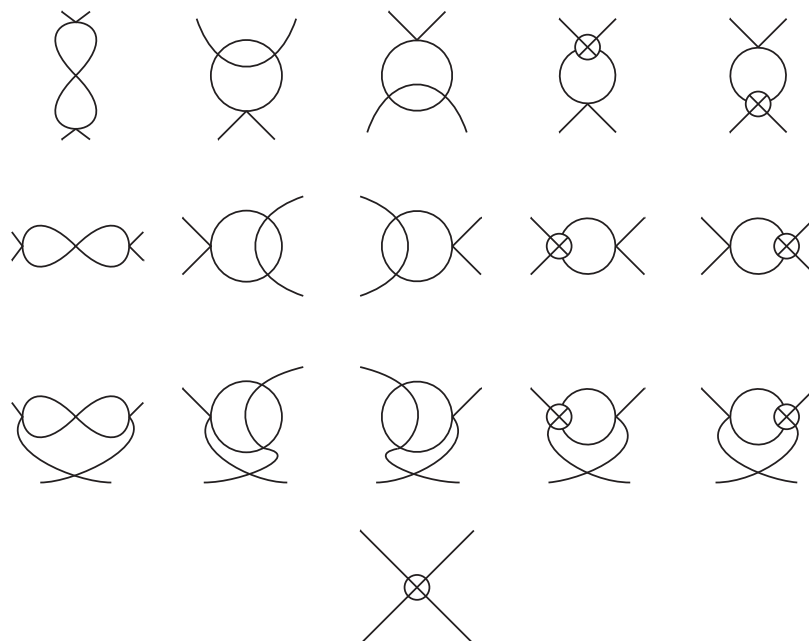


To zapravo znači da se svaka prividno divergentna teorija može napraviti konačnom sa danim kompletnim (konačnim) skupom kontračlanova.

Kako je dokaz BPHZ teorema dosta kompliciran, umjesto njega ovdje će uklanjanje divergencija biti ilustrirano na primjeru računa sa dvije petlje u ϕ^4 teoriji u kojem će se ilustrirati poništenje nelokalnih divergencija.

6.5 Ilustracija BPHZ teorema na primjeru s dvije petlje

Ilustrirajmo teme diskutirane u prethodnom poglavlju na primjeru korelacijske funkcije 4 polja i dvije petlje u ϕ^4 teoriji. Ima 16 dijagrama koji opisuju tu korelacijsku funkciju



(Pored tih dijagrama postoje dijagrami s dvije petlje koje sadrže kao poddijagrame vlastitu energiju skalarnog polja na nivou jedne petlje, međutim oni se poništavaju sa kontračlanovima, kao što je pokazano u i ispod jedn. (1350), pa ih ne uzimamo u obzir).

Križna simetrija

Uočimo među tim dijagramima grupe od po 5 dijagrama koji su međusobno povezani križnom simetrijom. Zbog toga je dovoljno razmatrati samo sljedećih 6 nezavisnih dijagrama,

$$\begin{array}{cccccc}
 \text{diagram 1} & + & \text{diagram 2} & + & \text{diagram 3} & + & \text{diagram 4} & + & \text{diagram 5} & + & \text{diagram 6} & & (1404)
 \end{array}$$

- Zadnji 6-ti dijagram ima oznaku s što označava da se gleda samo s -kanalsni doprinos kontračlanu drugog reda (vidi jedn. (1408)).


- Ako je suma gornjih dijagrama konačna, onda se zamjenom $s \rightarrow t \rightarrow u$ dobijaju doprinosi ostalih dijagrama.

- **Vrijednost zadnjeg dijagrama** u (1404) je konstanta koja se podešava tako da se apsorbiraju divergencije neovisne od vanjskih impulsa.

- **Cilj** ovog računa je pokazati da se **divergentni članovi ovisnu o impulsu** koji se javljaju u preostalih 5 dijagrama **krate** (to je ideja BPHZ teorema).

Kontračlan na nivou jedne petlje

- Četvrti i peti dijagram u (1404) sadrže kontračlan koji smo izračunali ranije (vidi (1336), (1339), (1343) i (1344)). Kratko ponavljamo račun. Funkciju petlje $iV(p^2)$ definirali smo kao,



$$= (-i\lambda)^2 iV(p^2),$$

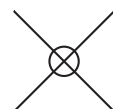
$$iV(p^2) = -\frac{i(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}\Gamma(2-\frac{D}{2})}{2\Gamma(2)(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_0^1 \frac{dx}{[m^2 - p^2x(1-x)]^{2-\frac{D}{2}}}$$

$$= -\frac{i}{(32\pi^2)} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi + \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \ln \left[1 - \frac{p^2}{m^2}x(1-x) \right] \right). \quad (1405)$$

- Iz renormalizacijskog uvjeta (1336) (amputirana korelacijska funkcija 4 polja na pragu reakcije, $s = 4m^2$, $t = u = 0$ jednaka je $-i\lambda$) slijedi da kontračlan mora poništavati doprinose triju dijagrama (za s , t i u kanale) na nivou jedne petlje,

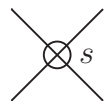
$$(-i\lambda)^2 [iV(4m^2) + i2V(0)] + (-i\delta_\lambda). \quad (1406)$$

Odatle nalazimo



$$= \delta_\lambda = (-i\lambda)^2 [-iV(4m^2) - 2iV(0)]. \quad (1407)$$

- Odvajamo s doprinos od $t + u$ doprinosa kontračlanu jer se divergencije svakog od dvaju doprinosa poništavaju u zasebnoj grupi dijagrama,



$$= (-i\lambda)^2 (-iV(4m^2)),$$


$$= (-i\lambda)^2 (-2iV(0)). \quad (1408)$$

Tri grupe dijagrama

- Dijagrame iz jedn. (1404) razdvajamo na tri grupe,

$$I: \quad \text{[Diagram 1]} + \text{[Diagram 2]} + \text{[Diagram 3]}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{II :} \\
 \\
 \text{III :}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{---} \quad \text{---} \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 \text{---} \quad \text{---} \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \text{---} \quad \text{---}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \text{---} \quad \text{---} \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 \text{---} \quad \text{---} \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \text{---} \quad \text{---} \\
 \text{---} \quad \text{---} \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 \text{---} \quad \text{---} \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \text{---} \quad \text{---}
 \end{array}
 t + u
 \end{array}$$

- Pokazat ćemo da se divergencije ovisne o impulsu krata za svaku grupu zasebno.
- Grupe II i III su povezane jednostavnom zamjenom impulsa pa je stoga dovoljno gledati grupe I i II (Napomena: t i u dijagrami se razlikuju samo po tome koji se skalari vežu na početno/konačno stanje, a ovdje radimo sa amputiranim amplitudama.)

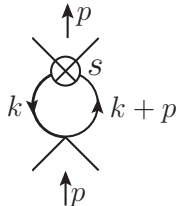
Grupa I

Faktorizacija amplituda

Račun u grupi I je jednostavan jer se svaki od 3 dijagrama faktorizira na članove koje smo već izračunali. Za prvi dijagram dobijamo

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \uparrow p \\
 p_3 \quad p_4 \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 k \quad k + p \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 k \quad k + p \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 p_1 \quad p_2 \\
 \uparrow p
 \end{array}
 \end{array}
 = \frac{(-i\lambda)^3}{2 \cdot 2} \overbrace{\left(\int \frac{d^D k_1 \mu^{4-D}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{i}{k_1^2 - m^2} \frac{i}{(k_1 + p)^2 - m^2} \right)}{=iV(p^2)}
 \times \left(\int \frac{d^D k_2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{i}{k_2^2 - m^2} \frac{i}{(k_2 + p)^2 - m^2} \right)
 = (-i\lambda)^3 [iV(p^2)]^2 . \tag{1409}$$

Primjetite da svaki poddijagram ima simetrijski faktor 1/2. Za drugi dobijamo (rabimo izraz za s dio renormalizacijske konstante δ_λ (1408) – označavamo ga sa $(-i\delta_\lambda)_s$)



$$\begin{aligned}
&= (-i\delta_\lambda)_s \frac{-i\lambda}{2} \left(\int \frac{d^D k \mu^{4-D}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \right) \\
&= (-i\lambda)^3 [iV(p^2)] [-iV(4m^2)] \\
&= \text{diagram} \quad . \quad (1410)
\end{aligned}$$

Treći dijagram je očigledno jednak drugom.

Suma dijagrama i ne postojanje p^2 ovisnih divergencija

Suma amplituda gornjih triju dijagrama se može napisati na sljedeći način

$$\begin{aligned}
&(-i\lambda)^3 \left([iV(p^2)]^2 - 2[iV(p^2)][-iV(4m^2)] \right) \\
&= (-i\lambda)^3 \left(-[V(p^2) - V(4m^2)]^2 + [V(4m^2)]^2 \right) . \quad (1411)
\end{aligned}$$

Drugi član je divergentan i konstantan - ne sadrži p^2 . Prvi član je ovisan o p^2 ali je konvergentan (vidi (1405)),

$$V(p^2) - V(4m^2) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \frac{1 - \frac{p^2}{m^2}x(1-x)}{1 - 4x(1-x)} . \quad (1412)$$

Zbog toga se u s dijelu amplitude s dvije petlje za $2 \rightarrow 2$ raspršenje p^2 divergencije krata.

Kraćenje preostale divergencije

Divergencija koja se nalazi u $[V(4m^2)]^2$ je neovisna o p^2 , dakle lokalna je, pa se može apsorbirati konstantnim kontračlanom drugog reda u (1404)



$$\text{diagram} \quad . \quad (1413)$$

Napomene u vezi s (1411)

1. Divergencija (a s time i kontračlan drugog reda je proporcionalna ($D = 4 - \varepsilon$))

$$[V(4m^2)]^2 \propto [\Gamma(2 - \frac{D}{2})] \xrightarrow{D \rightarrow 4} \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 . \quad (1414)$$

Drugim riječima javlja se dvostruki pol, za razliku od onog koji se javlja u kontračlanu (renormalizacijskoj konstanti) prvog reda.

Općenito dijagrami s n petlji sadržavat će polove višeg reda (do pola $(2/\varepsilon)^n$). Pol najvišeg reda je uvijek p^2 neovisna konstanta.

2. Nadalje, u visoko-enegetskom limesu je

$$V(p^2) - V(m^2) \stackrel{p^2 \rightarrow \infty}{\sim} \ln \frac{p^2}{m^2} \quad (1415)$$

Odatle slijedi da je vrh sa dvije petlje proporcionalan $(\ln^2 \frac{p^2}{m^2})$, i sa λ^3 jer ima tri vrha. Dijagram iste strukture s n petlju ima oblik i p^2 -zavisnost

$$\underbrace{\text{diagram s } n \text{ petlji}}_{n \text{ petlji}} \sim \lambda^{n+1} \left(\ln \frac{p^2}{m^2} \right)^n. \quad (1416)$$

To asimptotsko ponašanje je zapravo opće ponašanje dijagrama s više petlji i može se opisati renormalizacijskom grupom.

Grupa II

Račun amplitude u grupi II je puno teži jer prvi od dva dijagrama sadrži preklopnu divergenciju. Njega ćemo sada analizirati.

Amplituda dijagrama s preklopnom divergencijom

Amplituda prvog dijagram iz grupe II glasi

$$\begin{aligned} & \text{diagram s petljama } p_1, p_2, p_3, p_4, k, k+p \\ &= \frac{(-i\lambda)^3}{2} \left(\int \frac{d^D k \mu^{4-D}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \right) \\ & \times \underbrace{\left(\int \frac{d^D k_1 \mu^{4-D}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{i}{k_1^2 - m^2} \frac{i}{(k_1+p+k)^2 - m^2} \right)}_{iV((p_3+k_1)^2)} \\ &= (-i\lambda)^3 \int \frac{d^D k \mu^{4-D}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \left(iV((k+p_3)^2) \right) \\ &\equiv \mathcal{M}_{IIa}. \end{aligned} \quad (1417)$$

U računu amplitude kombinirat ćemo nazivnike tako da će biti direktno moguće izvući divergentne članove. Taj postupak komplicira nalaženje konačnih članova, međutim njih ovdje ne tražimo. Postoji i alternativni postupak za nalaženje UV divergencija u kojem se zanemaruju mase (vidi Peskin zad. 10.4).

- Kombinacija nazivnika

Za $iV((k + p_3)^2)$ uvrštavamo izraz (1343) uz zamjenu $p \rightarrow k + p_3$. U prvom od integrala rabimo Feynmanovu parametrizaciju

$$\mathcal{M}_{IIa} = -\frac{\lambda^3}{2} \frac{(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int \frac{d^D(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + 2k \cdot py + p^2y - m^2]^2} \frac{1}{[m^2 - (k + p_3)^2x(1-x)]^2} . \quad (1418)$$

- Feynmanova parametrizacija za realne potencije

Da bismo sveli dva nazivnika na jedan rabimo sljedeći identitet (α i β su realni brojevi)

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \int_0^1 dw \frac{w^{\alpha-1}(1-w)^{\beta-1}}{[wA + (1-w)B]^{\alpha+\beta}} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} . \quad (1419)$$

- Dokaz identiteta

Dokaz je sličan identičan dokazu (1006), a posebno dokazu (1009) (oba dokaza radili ste na vježbama) jer se u tom dokazu nigdje nismo pozivali na cjelobrojnost potencija. Uvodimo varijablu z ,

$$z \equiv \frac{wA}{wA + (1-w)B} , \quad (1420)$$

odakle

$$\begin{aligned} 1 - z &= \frac{(1-w)B}{wA + (1-w)B} , \\ dz &= \frac{dwAB}{[wA + (1-w)B]^2} dw = \frac{z(1-z)}{w(1-w)} dw, \\ dw &= \frac{w(1-w)}{z(1-z)} dz . \end{aligned} \quad (1421)$$

Iz (1420) i (1420) slijedi da se desna strana u (1419) može napisati

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{w^{\alpha-1}(1-w)^{\beta-1}}{[wA + (1-w)B]^{\alpha+\beta}} &= \int_0^1 dz \frac{1}{z(1-z)} \underbrace{w(1-w) \frac{w^{\alpha-1}(1-w)^{\beta-1}}{[wA + (1-w)B]^{\alpha+\beta}}}_{z^\alpha(1-z)^\beta} \\ &= \frac{1}{A^\alpha B^\beta} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} . \end{aligned} \quad (1422)$$

DZ. Dokažite generalizaciju relacije (1419) za bilo koji broj faktora u nazivniku,

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n A_i} = \int_0^1 \prod_{i_1=1}^n dw_{i_1} \delta(1 - \sum_{i_2=1}^n w_{i_2}) \frac{\prod_{i_3}^n w_{i_3}^{\alpha_{i_3}-1}}{[\sum_{i_4} w_{i_4} A_{i_4}]^{\sum_{i_5} \alpha_{i_5}}} \frac{\Gamma(\sum_{i_6}^n \alpha_{i_6})}{\prod_{i_7=1}^n \Gamma(\alpha_{i_7})}. \quad (1423)$$

- Sređivanje izraza

Primjenom relacije (1419) za \mathcal{M}_{IIa} (1418) dobijamo

$$\mathcal{M}_{IIa} = -\frac{\alpha^3 (\mu^2)^{4-D} \Gamma(4 - \frac{D-2}{2})}{2 (4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dw \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{\underbrace{\{w[m^2 - x(1-x)(k+p_3)^2] + (1-w)[m^2 - k^2 - 2k \cdot py - p^2 y]\}_{4-\frac{D}{2}}}_{m^2 - P^2(w,x) - ((1-w) + wx(1-x))\ell^2}}. \quad (1424)$$

Kao što je naznačeno u gornjem izrazu, svođenje izraza u nazivniku na potpuni kvadrat daje polinom oblika

$$[(1-w) + wx(1-x)]\ell^2 + P^2(w, x) - m^2, \quad (1425)$$

gdje je

$$P^2(w, x) = wx(1-x)p_3^2 + (1-w)yp^2 - \frac{(wx(1-x)p_3 + y(1-w)p)^2}{(1-w) + wx(1-x)}. \quad (1426)$$

DZ. Dokažite relacije (1425) i (1426)

- Ponašanje $P^2(w, x)$ u limesu $w \rightarrow 0$

Za analizu divergencija će nam biti bitno samo ponašanje $P^2(w, x)$ u limesu $w \rightarrow 0$, koje se moze direktno očitati iz (1426),

$$P^2(w, x) \xrightarrow{w \rightarrow 0} y(1-y)p^2 + \mathcal{O}(w) \quad (1427)$$

- Integracija po impulsu - konačan izraza

Primjenom Wickove rotacije i integracijom po impulsu

$$\mathcal{M}_{IIa} = -\frac{i\lambda^3 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \Gamma(4 - \frac{D}{2})}{2 (4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_0^1 dx dy dw \times \int \frac{d^D \ell_E (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}a}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{w^{1-\frac{D}{2}}}{[m^2 - P^2(w, x) + ((1-w) + wx(1-x))\ell_E^2]^{4-\frac{D}{2}}} \quad (1428)$$

Izvlačenjem faktora $((1-w) + wx(1-x))$ iz uglate zagrade u nazivniku dobija se integral oblika (1254),

$$\int \frac{d^D \ell_E (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} = \frac{(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \Gamma(n - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(n)} \frac{1}{[\ell^2 + \Delta]^n} \quad (1429)$$

uz $n = 4 - \frac{D}{2}$ i

$$\Delta = \frac{m^2 - P^2(w, x)}{(1-w) + wx(1-x)}. \quad (1430)$$

Sređivanjem tog izraza za \mathcal{M}_{IIa} dobija se

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{IIa} &= -\frac{i\lambda^3 (\mu^2)^{4-D} \Gamma(4-D)}{2 (4\pi)^D} \int_0^1 dx dy dw \\ &\times \frac{w^{1-\frac{D}{2}} (1-w)}{((1-w) + wx(1-x))^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{(m^2 - P^2(w, x))^{4-D}}. \end{aligned} \quad (1431)$$

* Nalaženje polova

- Gornji izraz ima očigledno pol za $D \rightarrow 4$ koji dolazi od $\Gamma(4-D)$
- Pored toga on sadrži još jedan pol koji nije toliko očigledan i koji se javlja zbog nule koje se javlja na granici integralnog područja. Da bismo detektirali taj pol napišimo (1431) kao

$$\mathcal{M}_{IIa} \equiv \int dw w^{1-\frac{D}{2}} f(w), \quad (1432)$$

gdje $f(w)$ sadrži sve faktore koji nisu eksplicite napisani.

- Da bismo izolirali pol u $w = 0$ dodat ćemo i oduzeti $f(0)$

$$\mathcal{M}_{IIa} = \int dw w^{1-\frac{D}{2}} f(0) + \int dw w^{1-\frac{D}{2}} [f(w) - f(0)] \equiv \mathcal{M}_{IIa}^{(1)} + \mathcal{M}_{IIa}^{(2)}. \quad (1433)$$

- Prvi član

Prvi član glasi

$$\mathcal{M}_{IIa}^{(1)} = -\frac{i\lambda^3 (\mu^2)^{4-D} \Gamma(4-D)}{2(4\pi)^D} \int_0^1 dx dy \overbrace{\int_0^1 dw w^{1-\frac{D}{2}}}^{=\frac{1}{2-\frac{D}{2}}} \underbrace{\frac{1}{[m^2 - P^2(0)]^{4-D}}}_{=[m^2 - p^2 y(1-y)]}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i\lambda^3\Gamma(4-D)}{2(4\pi)^D} \frac{1}{2-\frac{D}{2}} \int_0^1 dy \frac{1}{[m^2 - p^2y(1-y)]^{4-D}} \\
&= -\frac{i\lambda^3}{2(4\pi)^2} \frac{2}{\varepsilon} \int_0^1 dy \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi + \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \underbrace{\ln\left[1 - \frac{p^2}{m^2}y(1-y)\right]}_{\text{nonlocal divergence}} \right]. \quad (1434)
\end{aligned}$$

- U računu smo zadržali samo divergentne članove ($1/\varepsilon^2$ i $1/\varepsilon$), tj. nismo integral po dy razvijali do ε^2 .

- Član $\frac{2}{\varepsilon} \ln[m^2 - p^2y(1-y)]$ je nelokalna divergencija, koja se, kao što ćemo vidjeti, poništava sa petljom sa $t + u$ kontračlanom.

- Problematična nelokalna divergencija je iznosa

$$\frac{i\lambda^3}{2(2\pi)^4} \frac{2}{\varepsilon} \int_0^1 dy \ln\left[1 - \frac{p^2}{m^2}y(1-y)\right]. \quad (1435)$$

- Drugi član

Drugi član glasi

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{IIa}^{(2)} &= -\frac{i\lambda^3\Gamma(4-D)(\mu^2)^{4-D}}{2(4\pi)^D} \int_0^1 dx dy \int_0^1 dw w^{1-\frac{D}{2}} \\
&\times \left[\underbrace{\frac{1}{[1-w+wx(1-x)]^{\frac{D}{2}}}}_{f(w)} \frac{1}{[m^2 - P^2(w,x)]} - \underbrace{\frac{1}{[m^2 - P^2(0,x)]}}_{f(0)} \right]. \quad (1436)
\end{aligned}$$

Analizirajmo Taylorov razvoj po w oko nule prvog člana u uglatoj zagradi,

$$f(w) = f(0) + wf^{(1)}(0) + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} f^{(m)}(0). \quad (1437)$$

Primjetimo da samo nulti član, $f(0)$, koji se poništava sa $-f(0)$ daje divergentan integral u w ; ostali su proporcionalni konačnim integralima,

$$\int_0^1 dw w^{1-\frac{D}{2}+m} = \frac{1}{m+2-\frac{D}{2}}, \quad (1438)$$

gdje je $m \geq 1$ potencija w koja se javlja u m -tom članu u Taylorovom razvoju za $m \neq 0$. Zbog toga divergenciju daje samo faktor $\Gamma(4-D)$. Nadalje $f(w)$ impulsnu zavisnost sadrži samo u članu

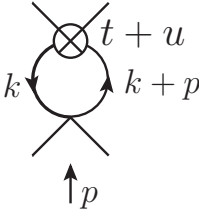
$$1/(m^2 - P^2(w,x))^{4-D} = 1 - \varepsilon \ln[m^2 - P^2(w,x)], \quad (1439)$$

tako da se p^2 zavisnost javlja uvijek sa faktorom ε . U kombinaciji sa faktorom $\Gamma(4-D)$ to daje konačne doprinose ovisne o p^2 . Stoga viši članovi u Taylorovom razvoju ne mogu

doprinjeti nelokalnim divergencijama. U drugom članu javlja se samo lokalna, tj. p^2 neovisna divergencija (kada se faktor $1/(m^2 - P^2(w, x))^{4-D}$ zamjeni s 1).

Amplituda dijagrama s $t + u$ kontračlanom

Unutar grupe II je još tzv. kontračlan-dijagram kojega moramo čiju amplitudu moramo dodati amplitudi \mathcal{M}_{IIa} čije smo divergentne članove upravo izračunali. Račun je jednostavan,



$$\begin{aligned}
&\equiv \mathcal{M}_{IIb} \\
&= \frac{1}{2}(-i\lambda)[(-i\lambda)^2(-2iV(0))] \\
&\times \int \frac{d^D k \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \\
&= (-i\lambda)^3(-2iV(0))(-2iV(p^2)) \\
&= (2i\lambda^3) \left[\frac{-i\Gamma(2 - \frac{2}{D})}{2\Gamma(2)(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{2-\frac{D}{2}} \right] \\
&\times \left[\frac{-i\Gamma(2 - \frac{2}{D})}{2\Gamma(2)(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{2-\frac{D}{2}} \int_0^1 \frac{dx}{[1 - \frac{p^2}{m^2}x(1-x)]^{2-\frac{D}{2}}} \right] \\
&\xrightarrow{D \rightarrow 4} \frac{(2i\lambda^3)}{2(2\pi)^4} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right) \\
&\times \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi + \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \ln \left[1 - \frac{p^2}{m^2}x(1-x) \right] \right) \\
&= \frac{(2i\lambda^3)}{2(2\pi)^4} \left(\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)(-\gamma + \ln 4\pi + \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{2}{\varepsilon} \int_0^1 dx \ln [1 - \frac{p^2}{m^2}x(1-x)] \right)
\end{aligned}$$

nelokalna divergencija

(1440)

U gornjem računu nismo razvijali pojedine integrale do ε^1 reda, jer nas interesiraju samo divergentni članovi $((1/\varepsilon)^2$ i $1/\varepsilon$). Primjetimo da amplituda \mathcal{M}_{IIb} sadrži i pol drugog reda proporcionalan $(2/\varepsilon)^2$ i nelokalnu divergenciju prvog reda iznosa

$$-\frac{i\lambda^3}{2(2\pi)^4} \frac{2}{\varepsilon} \int_0^1 dy \ln [1 - \frac{p^2}{m^2}y(1-y)] . \quad (1441)$$

Ona je po iznosu jednaka nelokalnoj divergenciji u \mathcal{M}_{IIa} amplitudi a po predznaku mu je suprotna. Stoga se nelokalne divergencije amplituda dijagrama grupe II međusobno krata.

Zaključci

Svojstva amplituda dijagrama grupe I i grupe II su iste:

1. Krate se nelokalne divergencije.
2. Javljaju se dvostruki polovi, $(\frac{2}{\epsilon})^2$.
3. Konačni članovi sadrže dvostruke logaritme koji se ponašaju kao $\lambda^3 \ln^2 p^2$ kada $p^2 \rightarrow \infty$.
(Ovo nismo pokazali za obje grupe dijagrama već samo za jednu.)

DZ. Naći konačne članove grupe II i pokazati da su u limesu $p^2 \rightarrow \infty$ proporcionalni sa $\lambda^3 \ln^2 p^2$.

7 DODACI

7.1 Dodatak 1: Metode za izračunavanje Greenove funkcije

Metoda stacionarne faze : wikipedia

Aproksimacija stacionarne faze je bazični princip za asimptotsku analizu oscilatornih funkcija

$$I(k) = \int g(x)e^{ikf(x)} dx \quad (1442)$$

u n -dimenzijskom prostoru \mathbf{R}^n . f i g su glatke funkcije. Uloga g je da osigura konvergenciju – ona je tzv. test funkcija. k je realni parametar koji se razmatra u limesu $k \rightarrow \infty$.

Osnovna ideja metode bazirana je na Lebesgue-Riemannovom teoremu, po kojemu beskonačni integral oscilatorne funkcije iščezava. Iz toga izlazi da je integral funkcije koja je približno sinusoidalana i jako brzo mijenja fazu približno jednak nuli.

Primjer koji ilustrira metodu

Razmatramo funkciju

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} F(\omega)e^{ikx - i\omega t} d\omega \quad (1443)$$

Stacionarnost faze $\phi = kx - \omega t$ definira se uvjetom

$$\frac{d}{d\omega}(kx - \omega t) \approx 0 \quad (1444)$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{dk} \approx \frac{x}{t} \quad (1445)$$

Rješenja te jednadžbe daju dominantne frekvencije $\omega_{dom}(x, t)$ kao funkcije danih x i t . Ako se ϕ razvije u Taylorov red oko ω_{dom} i ako se zanemare svi članovi osim nultog i prvog u razvoju po $(\omega - \omega_{dom})$ dobija se

$$\phi \sim k(\omega_{dom}) - \omega_{dom}t + \frac{x}{2} \frac{d^2k}{d\omega^2} (\omega - \omega_{dom})^2. \quad (1446)$$

Za vrlo velike x i male razlike $(\omega - \omega_{dom})$ generiraju brze oscilacije koje vode na poniženje integrala. Stoga se integracija može proširiti izvan limesa Taylorovog razvoja. To vodi na sljedeći rezultat (wikipedia),

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} 2\mathbf{Re} \left\{ \exp[i[k(\omega_{dom})x - \omega_{dom}t]] |F(\omega_{dom})| \times \int_{\mathbf{R}} d\omega \exp \left[\frac{ix}{2} \frac{d^2k}{d\omega^2} (\omega - \omega_{dom})^2 \right] \right\} \quad (1447)$$

$$\sim \frac{|F(\omega_{dom})|}{\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{x \left| \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|}} \cos \left[k(\omega_{dom})x - \omega_{dom}t \pm \frac{\pi}{4} \right] \quad (1448)$$

U formulama (1447) i (1447) je uključen doprinos negativnih ω doprinosa.

Izvod po A. Ilakovcu:

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \exp[i[k(\omega_{dom})x - \omega_{dom}t]] F(\omega_{dom}) \right. \\ \left. \times \int_{\mathbf{R}} \exp \left[\frac{ix}{2} \frac{d^2k}{d\omega^2} (\omega - \omega_{dom})^2 \right] \right\} \quad (1449)$$

$$= \frac{F(\omega_{dom})}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{|x \frac{d^2k}{d\omega^2}|}} \exp \left[i \left[k(\omega_{dom})x - \omega_{dom}t - \frac{\pi}{4} \text{sign} \left(x \frac{d^2k}{d\omega^2} \right) \right] \right] \quad (1450)$$

$$\sim \exp[i[k(\omega_{dom})x - \omega_{dom}t]] \quad (1451)$$

U zadnjem retku gornjeg izvoda zadržao sam samo fazni faktor jer mi je on dovoljan za raspravu koja se vodi u poglavlju 2.1.

Dodatak 1.B Aproksimativan račun $D(x - y)$ za vremenolike udaljenosti

- Pretpostavljamo da su x i y vremenoliko udaljeni, $(x - y)^2 > 0$. Račun $D(x - y)$ provedimo u sustavu u kojem je $|\vec{x} - \vec{y}| = 0$. Uvodimo pokratu $x^0 - y^0 = t$. Integracijom po kutnim varijablama dobijamo (161). Podintegralna funkcija nema polova već samo točke reza u $E = m$ i u beskonačnosti – odabiremo je u $E = -\infty$. Rabeći metode kompleksne analize zatvaramo krivulju po sljedećim dijelovima a. po pozitivnoj realnoj osi $E \in (m + \epsilon, +\infty)$, b. beskonačna polukružnica u negativnom smjeru sa fazama $\phi \in (0, 3\pi/2)$, c. po negativnoj imaginarnoj osi $E \in (m - i\infty, m - i\epsilon)$, d. po četvrtkružnici infinitezimalnog radijusa ϵ s fazama $\phi \in (3\pi/2, 0)$. Zbog eksponenta e^{-iEt} doprinos beskonačne četvrtkružnice iščezava. Doprinos infinitezimalne četvrtkružnice je proporcionalan ϵ^2 pa isto iščezava. Stoga integral po realnoj osi možemo zamijeniti integralom po imaginarnoj osi. Uvodimo novu varijabu x zadanu sa $E = -ix + m$. Konstantnu fazu e^{-im} izvlačimo van integrala – ostaje integral I . Integral I nećemo izračunati već ćemo ocijeniti njegovu gornju apsolutnu vrijednost rabeći $|-x^2 - 2imx|^{1/2} < x + m$.

$$D(x - y) \stackrel{(161)}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ \stackrel{(161)}{=} \frac{1}{4\pi^2} \int_m^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{m-i\infty}^m dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \\ = \frac{-ie^{-imt}}{4\pi^2} \underbrace{\int_0^\infty dx \sqrt{-x^2 - 2imx} e^{-xt}}_I$$

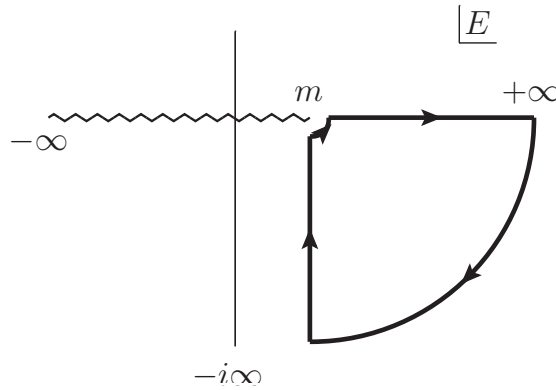


Figure 7: D.1 $D(x - y) (x - y)^2 > 0$

$$|I| \leq \int_0^\infty dx (x + m) e^{-xt} = \frac{1 + mt}{t^2} \quad (1452)$$

Stoga za $D(x - y)$ dobijamo ocjenu

$$D(x - y) \sim \frac{-ie^{-imt}}{4\pi^2} \frac{m}{t} e^{i\phi} \sim e^{-imt} \quad (1453)$$

U prvom izrazu je $e^{i\phi}$ neodređena faza. Ta faza je mala i nalazi se u trećem kvadrantu, $\phi \in (\pi/2, 3\pi/2)$. Zbog toga je možemo zanemariti prema e^{-imt} fazi. U drugom izrazu je zadržano dominantno ponašanje $D(x - y)$. Ono se podudara sa Peskin-Schroederovim rezultatom.

Integral I može se izračunati i egzaknto uz pretpostavku da je $\text{Im}(m) < 0$, tj. da masa ima mali negativni imaginarni član (dobiveno mathematicom71),

$$I = \frac{1}{t} e^{imt} \sqrt{-m^2} K_1(imt) \quad (1454)$$

tako da uz taj uvjet za $D(x - y)$ dobijamo

$$D(x - y) = \frac{-i\sqrt{-m^2}}{4\pi^2 t} K_1(imt) \xrightarrow{mt \gg 1} \frac{-m^{3/2}}{(2i)^{1/2} 4\pi^{3/2} t^{3/2}} e^{-imt} \quad (1455)$$

Zadnji redak dobio sam rabeći ("http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function")

$$K_a(x) \xrightarrow{x \gg a^2 - 1/4} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (1456)$$

DZ. Provedite račun $D(x-y)$ opisan formulama (1452), (1452), (1453) i tekstom uz njih.

Dodatak 1.C Egzaktan i aproksimativan račun $D(x-y)$ za prostornolike udaljenosti

- Pretpostavimo da su x i y prostornoliko udaljeni, $(x-y)^2 < 0$. Račun $D(x-y)$ provedimo u sustavu u kojem je $x^0 - y^0 = 0$. Uvodimo pokratu $x = |\vec{x} - \vec{y}|$. Integracijom po kutnim varijablama dobijamo

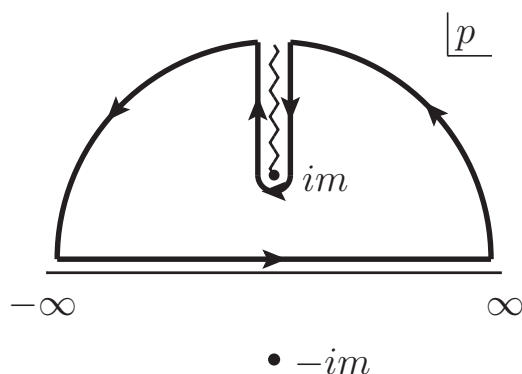


Figure 8: D.1 $D(x-y)$ $(x-y)^2 < 0$

$$\begin{aligned}
 D(x-y) &\stackrel{(160)}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} \\
 &\rightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\
 &= \int_0^\infty \frac{pdp}{2i(2\pi)^2 x \sqrt{p^2 + m^2}} (e^{ipx} - e^{-ipx}) \\
 &= \int_{-\infty}^\infty \frac{pdp}{2i(2\pi)^2 x \sqrt{p^2 + m^2}} e^{ipx} \tag{1457}
 \end{aligned}$$

Točke reza su u $p = \pm im$ i u beskonačnosti – rezove odabiremo duž imaginarne osi, $(-\infty, -im]$, $[im, \infty)$. Podintegralni izraz (1457) je analitičan svuda osim u blizini točaka reza. Integral provodimo po krivulji koja zaobilazi gornji rez da nam dijelovi beskonačne polukružnice ne bi davali doprinosa – vidi Sl. ... (a. duž realne osi, b. duž beskonačne četvrt-kružnice s fazom $(0, \pi/2)$, c. s desne strane od reza $(+i\infty + \epsilon, +im)$, d. po maloj polukružnici radijusa ϵ koja zaobilazi točku $+im$ odozdo, e. s lijeve strane reza $(+im, +i\infty - \epsilon)$ f. po beskonačnoj četvrtkružnici s fazom $(\pi/2, \pi)$. Zbog faze $e^{ip \cdot x}$ doprinosi b. i f. jednaki su nuli. Doprinos d. iščezava jer je $pdp/\sqrt{p^2 + m^2} \sim \sqrt{\epsilon}$, a svi drugi dijelovi podintegralne funkcije su konačni. Stoga je integral po realnoj osi jednak zbroju

integrala b. i e. u suprotnom smjeru. Na tim dijelovima staza treba samo paziti na fazu koju ima $\sqrt{p^2 + m^2}$. Uvodeći varijablu ρ sa $p = i\rho$ (dakle $\rho = -ip$, $ip = -\rho$), pa zatim varijable $\rho = \rho_1 + i\epsilon$, $\rho = \rho_2 - i\epsilon$, $\rho_1, \rho_2 \in [m, \infty)$ dobijamo

$$\begin{aligned}
D(x-y) &= \frac{1}{2ix(2\pi)^2} \left(- \int_{m+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{-d\rho\rho e^{-\rho x}}{\sqrt{-\rho^2 + m^2}} + \int_{m-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} \frac{-d\rho\rho e^{-\rho x}}{\sqrt{-\rho^2 + m^2}} \right) \\
&= \frac{1}{2ix(2\pi)^2} \left(- \int_m^{\infty} \frac{-d\rho_1\rho_1 e^{-\rho_1 x}}{\sqrt{-\rho_1^2 + m^2 - i\epsilon}} + \int_m^{\infty} \frac{-d\rho_2\rho_2 e^{-\rho_2 x}}{\sqrt{-\rho_2^2 + m^2 + i\epsilon}} \right) \\
&= \frac{1}{x(2\pi)^2} \int_m^{\infty} \frac{-d\rho'\rho' e^{-\rho' x}}{\sqrt{\rho'^2 - m^2}} \\
&\stackrel{M}{=} \frac{1}{x(2\pi)^2} mK_1(mx) \\
&\stackrel{m \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{1}{x^{3/2}(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{m} e^{-mx} \propto e^{-mx}
\end{aligned} \tag{1458}$$

Integral u trećem redu se podudara sa Peskin-Schroederovim rezultatom. Izraz u četrtom redu je izračunat programom *Mathematica*. K_1 je Besselova funkcija treće vrste. Izraz u petom redu je dobiven analizom izraza u četvrtom redu. Njegovo dominantno ponašanje u m varijabli je e^{-mx} što je u skladu sa Peskin-Schroederovim rezultatom.

DZ. Provedite račun $D(x-y)$ opisan formulama (1457), (1458) i tekstom uz njih.

7.2 Dodatak 2 : KG operatori stvaranja i poništenja

A. Realno skalarno polje

Iz jednađbi (114) i (115) slijedi

$$a_{\vec{k}} = \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{1}{2} (\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\phi(\vec{x}) + \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}}}\pi(\vec{x})) \quad (1459)$$

$$a_{-\vec{k}}^\dagger = \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{1}{2} (\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\phi(\vec{x}) - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}}}\pi(\vec{x})) \quad (1460)$$

Odatle, rabeći kanonska kvantizacijska pravila (102) dobijamo

$$\begin{aligned} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \\ [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] &= [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{p}'}^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (1461)$$

B. Kompleksno skalarno polje

Iz jednađbi (1505) i (1506) dobijamo

$$a_{\vec{k}} = \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{1}{2} (\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\phi(\vec{x}) + \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}}}\pi^*(\vec{x})) \quad (1462)$$

$$b_{-\vec{k}}^\dagger = \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{1}{2} (\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\phi(\vec{x}) - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}}}\pi^*(\vec{x})) \quad (1463)$$

Iz (1463) je lako naći $b_{\vec{k}}^\dagger$ a odatle i iz (1462) izraze za $a_{\vec{k}}^\dagger$ i $b_{\vec{k}}$. Rabeći kanonska kvantizacijska pravila (1478) dobijamo

$$\begin{aligned} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \\ [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] &= [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{p}'}^\dagger] = 0; \end{aligned} \quad (1464)$$

$$\begin{aligned} [b_{\vec{p}}, b_{\vec{p}'}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \\ [b_{\vec{p}}, b_{\vec{p}'}] &= [b_{\vec{p}}^\dagger, b_{\vec{p}'}^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (1465)$$

7.3 Dodatak 3. Račun Greenovih funkcija skalarnog polja

A. Amplituda propagacije iz točke x u točku y

Definicija:

$$D(x-y) = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{ip \cdot (x-y)} \quad (1466)$$

A.1. Aproksimativni račun $D(x-y)$ za vremenoliki interval

- Pretpostavljamo $(x-y)^2 > 0$. Stoga postoji sustav u kojem je $\vec{x} - \vec{y} = 0$. U tom sustavu (definiramo $x^0 - y^0 \equiv t$ i stavljamo $E = E_{\vec{p}}$; rabimo $pdp = E dE$, $E = \sqrt{p^2 + m^2}$)

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} e^{iEt} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_m^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \quad (1467)$$

- Podintegralna funkcija je analitična svuda osim u području reza koji definiramo kao $E \in (-\infty, m)$. Kako e^{-iEt} iščezava za $E \rightarrow \infty$ i $\text{Im}E < 0$ možemo zatvoriti integracijsku konturu na dolje sa beskonačnim $\pi/2$ kružnim lukom (beskonačni luk ne doprinosi integralu; u biti treba oko $E = m$ napraviti još jedan dodatni $\pi/4$ luk, međutim ni taj luk ne doprinosi integralu jer je za $E \approx m$, $\sqrt{E^2 - m^2} \approx 0$) i u vezi s time napraviti sljedeće zamjene integrala,

$$\int_m^\infty dE \rightarrow \int_m^{m-i\infty} dE \rightarrow \int_{-im}^{-im-i\infty} idE' \rightarrow \int_0^{-\infty} idF \quad (1468)$$

gdje su $E' = -iE$, $E \in (-im, -im - \infty)$; $F = E' + im$, $E' = F - im$, $F \in (0, -\infty)$. Odatle

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-im}^{-im-i\infty} idE' \sqrt{-E'^2 - m^2} e^{E't} \\ &= \frac{e^{-imt}}{2\pi^2} \int_0^{-\infty} idF \sqrt{F^2 + 2iFm} e^{Ft} \propto e^{-imt}. \end{aligned} \quad (1469)$$

- Konačan izraz za $D(x-y)$ je jednak umnošku e^{-imt} i integrala po F . Integral po F je dobro definiran jer nigdje ne sječe rez, a eksponencijalna funkcija osigurava konačnost integrala. Stoga je integral konačan kompleksan broj ovisan o t i proporcionalan e^{-imt} kao što se i tvrdi u Peskin-Schroederovoj knjizi.

A.2. Aproksimativni račun $D(x-y)$ za prostornoliki interval

- Pretpostavljamo da je $(x-y)^2 < 0$. Stoga postoji sustav u kojem je $x^0 - y^0 = 0$. U tom

sustavu (definiramo $\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$)

$$\begin{aligned}
D(x-y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \\
&= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{2E_{\vec{p}}} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr} \\
&= \frac{-i}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{pe^{ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}} \tag{1470}
\end{aligned}$$

- Integrand ima rezove koji počinju u točkama $\pm im$ a zavišavaju u beskonačnosti (mi odabiremo krajnje točke reza $\pm i\infty$). Rabeći analitičnost funkcija izvan reza, integral po realnoj osi zamjenjujemo integralom po krivulji koja "omata" rez: $p = +i\infty - \epsilon \rightarrow p = im - \epsilon \rightarrow$ (polukružnica radijusa ϵ koja omata im s donje strane) $\rightarrow p = im + \epsilon \rightarrow p = +i\infty + \epsilon$. Tome bi trebalo pridodati još doprinose dvaju četvrtkružnica, međutim one ne doprinose zbog faze e^{ipr} koja je na njima jednaka nuli. Integral po ϵ -polukružnici iščezava kao $\sqrt{\epsilon}$, pa ostaju samo doprinosi po polupravcima uz rez. Uvodimo varijablu ρ , gdje je $p = i\rho \mp \epsilon$ za integraciju lijevo/desno od reza. Uzimamo u obzir da je

$$\sqrt{p^2 + m^2} = \sqrt{-(\rho^2 - m^2) \mp \epsilon\rho} = \mp i\sqrt{\rho^2 - m^2} \tag{1471}$$

Tako se za $D(x-y)$ dobija

$$\begin{aligned}
D(x-y) &= \frac{-i}{2(2\pi)^2 r} \int_{+i\infty-\epsilon}^{im-\epsilon} dp \frac{pe^{ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}} + \frac{-i}{2(2\pi)^2 r} \int_{im+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dp \frac{pe^{ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}} \\
&= \frac{1}{4\pi^2 r} \int_m^\infty \frac{d\rho\rho e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2 - m^2}} \\
&\stackrel{\rho=x+m}{=} \frac{e^{-mr}}{4\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{dx(x+m)e^{-xr}}{\sqrt{x^2 + 2xm}} \propto e^{-mr} \tag{1472}
\end{aligned}$$

- Integral po varijabli x , $x = \rho - m$, je konačan, pa je $D(x-y)$ proporcionalan sa e^{-mr} , kao što se tvrdi u Peskin-Schroederovoj knjizi.

7.4 Dodatak 4. Kompleksno skalarno polje

A. Lagrangijan, svojstva

- Kompleksno skalarno polje i realno skaarno polje su u istoj relaciji kao kompleksni broj(evi) i realni broj(evi). Svako kompleksno skalarno polje se može prikazati preko dva realna skalarna polja iste mase.
- Akcija i Lagrangijan kompleksnog skalarnog polja glase

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi), \\ \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \end{aligned} \quad (1473)$$

- Ako prikažemo skalarno polje preko dvaju realnih skalarnih polja

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x)) \quad (1474)$$

vidimo da je Lagrangijan kompleksnog skalarnog polja jednak zbroju Lagrangijana pripadnih realnih skalarnih polja iste mase,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1^* \partial^\mu \phi_1 + m^2 \phi_1^* \phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2^* \partial^\mu \phi_2 + m^2 \phi_2^* \phi_2) \\ &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \end{aligned} \quad (1475)$$

- Uočimo također da su polja ϕ i ϕ^* međusobno nezavisna i povezana kompleksnom konjugacijom. Drugim riječima, za dva skalarna polja iste mase opis sistema preko nezavisnih varijabli ϕ i ϕ^* je prirodan.

B. Kanonski impulsi, Hamiltonijan, KG jednadžba

- Kanonski impulsi polja ϕ i ϕ^* su

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^*, \\ \pi^* &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (1476)$$

- Pripadni Hamiltonijan je

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x (\pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3x (\underbrace{\dot{\phi} \dot{\phi}^*}_{\pi^* \pi} + \nabla \phi^* \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi). \end{aligned} \quad (1477)$$

- Kanonske komutacijske relacije su (napisane su samo komutacijske relacije različite od nule)

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] &= i\delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\phi^*(\vec{x}, t), \pi^*(\vec{y}, t)] &= i\delta(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (1478)$$

- Heisenbergove jednadžbe gibanja su (površinski integrali zanemareni)

$$\begin{aligned} i\dot{\phi}(\vec{x}, t) &= [\phi(\vec{x}, t), H] = \pi^*(\vec{x}, t), \\ i\dot{\phi}^*(\vec{x}, t) &= [\phi^*(\vec{x}, t), H] = \pi(\vec{x}, t); \end{aligned} \quad (1479)$$

$$\begin{aligned} i\dot{\pi}^*(\vec{x}, t) &= [\pi^*(\vec{x}, t), H] = -i(-\nabla^2 + m^2)\phi(\vec{x}, t), \\ i\dot{\pi}(\vec{x}, t) &= [\pi(\vec{x}, t), H] = -i(-\nabla^2 + m^2)\phi^*(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (1480)$$

- Iz njih slijedi da polja ϕ i ϕ^* zadovoljavaju KG jednadžbe,

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi &= 0, \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi^* &= 0. \end{aligned} \quad (1481)$$

- Iste se jednadžbe dobijaju iz principa stacionarnosti akcije, varirajući akciju po $\delta\phi$ i $\delta\phi^*$ i zahtjevajući da su varijacije polja na graničnoj plohi integracije jednake nuli.

C. Dijagonalizacija Hamiltonijana

Dijagonalizaciju Hamiltonijana provest ćemo u analogiji sa dijagonalizacijom kompleksnog harmoničkog oscilatora.

C.1. Dijagonalizacija jednočestičnog kompleksnog HO

Dva degenerirana HO

Dva jednostavna HO iste osnovne frekvencije titranja mogu se shvatiti kao jedan kompleksni harmonički oscilator. Kako proceduru za kvantizaciju realnog HO imamo, analizu ćemo prvo napraviti za dva degenerirana HO. Hamiltonijan za njih je

$$H_{SHO}^{2R} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}\omega^2(\phi_1^2 + \phi_2^2). \quad (1482)$$

Rabeći Heisenbergove jednadžbe gibanja za ϕ_1 i ϕ_2

$$i\dot{\phi}_1 = [\phi_1, H^{2R}] = ip_1 \quad i\dot{\phi}_2 = [\phi_2, H^{2R}] = ip_2 \quad (1483)$$

Lagrangijan je stoga

$$L = p_1\dot{\phi}_1 + p_2\dot{\phi}_2 - H = \frac{1}{2}(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) - \frac{1}{2}\omega^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) \quad (1484)$$

Kanonski impulsi su

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = \dot{\phi}_1 \\ p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = \dot{\phi}_2 \end{aligned} \quad (1485)$$

Odatle slijede kanonske komutacijske relacije (samo relacije različite od nule su napisane)

$$[\phi_1, p_1] = i, \quad [\phi_2, p_2] = i \quad (1486)$$

Dijagonalizaciju Hamiltonijana možemo provesti u analogiji sa 1-čestičnim slučajem, izražavajući operatore ϕ_1 , ϕ_2 , p_1 i p_2 preko operatora (koji će se pokazati da su operatori) stvaranja i poništenja,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a_1 + a_1^\dagger) & p_1 &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a_1 - a_1^\dagger) \\ \phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a_2 + a_2^\dagger) & p_2 &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a_2 - a_2^\dagger) \end{aligned} \quad (1487)$$

Komutacijske relacije za operatore stvaranja i poništenja slijede iz kanonskih komutacijskih relacija (1486)

$$[a_1, a_1^\dagger] = 1, \quad [a_2, a_2^\dagger] = 1 \quad (1488)$$

(samo relacije različite od nule su napisane).

Zamjenama (1487) Hamiltonijan postaje

$$\begin{aligned} H &= \frac{\omega}{2}(a_1^\dagger a_1 + a_1 a_1^\dagger + a_2^\dagger a_2 + a_2 a_2^\dagger) \\ &= \omega(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1) \end{aligned} \quad (1489)$$

Kompleksni HO

Provedimo sada dijagonalizaciju kompleksnog HO.

Uvodeći

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \quad (1490)$$

dobijamo Lagrangijan za kompleksni HO

$$L = \dot{\phi}^* \dot{\phi} - \omega^2 \phi^* \phi. \quad (1491)$$

Iz njega slijede kanonski impulsi za ϕ i ϕ^*

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^* \\ p^* &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi} \end{aligned} \quad (1492)$$

a odatle izraz za Hamiltonijan,

$$H = p\dot{\phi} + p^*\dot{\phi}^* - L = p^*p + \omega^2\phi^*\phi \quad (1493)$$

Primjetimo da je

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi}^* = \dot{\phi}_1 - i\dot{\phi}_2 = p_1 - ip_2 \\ p^* &= \dot{\phi} = \dot{\phi}_1 + i\dot{\phi}_2 = p_1 + ip_2 \end{aligned} \quad (1494)$$

što je u skladu sa interpretacijom operatora impulsa preko QM zamjene

$$p \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial \phi} \quad p^* \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial \phi^*} \quad (1495)$$

Sada možemo provesti dijagonalizaciju Hamiltonijana kompleksnog HO. Upotrebljavajući zamjene koordinata i impulsa realnih stupnjeva slobode operatorima stvaranja i poništenja (1487) nalazimo

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + b^\dagger), & p &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(b - a^\dagger); \\ \phi^* &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a^\dagger + b), & p^* &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - b^\dagger); \end{aligned} \quad (1496)$$

$$a = \frac{a_1 + ia_2}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{a_1 - ia_2}{\sqrt{2}}. \quad (1497)$$

Primjetimo da ϕ i ϕ^* ne zavise o jednom stupnju slobode (npr. a i a^\dagger) već o dva. Iz (1488) i (1497) možemo naći komutacijske relacije za a , a^\dagger , b , b^\dagger ,

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [b, b^\dagger] = 1 \quad (1498)$$

Iz (1493), (1496) i (1498) slijedi izraz za Hamiltonijan

$$H = \frac{\omega}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a + bb^\dagger + b^\dagger b) = \omega(a^\dagger a + b^\dagger b + 1) \quad (1499)$$

Dijagonalizacija Hamiltonijana sada slijedi iz komutacijskih relacija,

$$\begin{aligned} [H, a^\dagger] &= \omega a^\dagger, & [H, a] &= -\omega a, \\ [H, b^\dagger] &= \omega b^\dagger, & [H, b] &= -\omega b, \end{aligned} \quad (1500)$$

i iz zahtjeva da postoji stanje najniže energije za svaki stupanj slobode, $|0\rangle_a, |0\rangle_b$. Stanje najniže energije je produktno stanje tih dva stanja i ima energiju koja je zbroj energija pojedinih vakuumskih stanja,

$$|0\rangle = |0\rangle_a \otimes |0\rangle_b, \quad (1501)$$

$$E_0 = E_0^a + E_0^b = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} = \omega \quad (1502)$$

Ostala stanja i energije

$$\begin{aligned} |mn\rangle &= \frac{(a^\dagger)^m (b^\dagger)^n}{m! n!} |0\rangle, \\ E_{mn} &= \omega(m + n + 1). \end{aligned} \quad (1503)$$

C.2. Dijagonalizacija Hamiltonijana za kompleksno skalarno polje

- Kompleksno skalarno polje ima istu Fourierovu dekompoziciju kao realno (vidi Eq. (104) i svaka Fourierova komponenta zadovoljava KG jednadžbu energije $(p^2 + m^2)^{1/2}$.
- Detaljnija Fourierova dekompozicija za realno (114) kompleksno skalarno polje

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \quad (1504)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} (a_{\vec{p}} + b_{-\vec{p}}^\dagger) \quad (1505)$$

se razlikuju jer svaka Fourierova komponenta kompleksnog skalarnog polja odgovara kompleksnom HO, koji ovisi o dva stupnja slobode.

- Fourierov raspis pripadnog kanonskog impulsa je

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \dot{\phi}^*(x) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} (b_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} (b_{\vec{p}} - a_{-\vec{p}}^\dagger) \end{aligned} \quad (1506)$$

- Izrazi za $\phi^*(x)$ i $\pi(x)$ dobijaju se kompleksnom (hermitskom) konjugacijom (1505) i (1506).
- Uočite da se strukture koje se javljaju u donjim jednadžbama (1505) i (1506) podudaraju sa izrazima za raspis koordinate i impulsa kompleksnog HO (1496).
- Komutatori operatora stvaranja i poništenja dani su u (1465).
- Uvrštavajući izraze (1505) i (1506) u izraz za Hamiltonijan (1477) dobijamo Hamiltonijan

izražen preko operatora stvaranja i poništenja,

$$\begin{aligned}
H &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\vec{p}}}{2} (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}} + b_{\vec{p}} b_{\vec{p}}^\dagger) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}}) + \underbrace{\int d^3p \omega_{\vec{p}}}_{E_0} \overbrace{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)}^V
\end{aligned} \tag{1507}$$

$$\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \tag{1508}$$

Tu je E_0 energija vakuuma kompleksnog skalarnog polja.

- Iz (1465) i (1507) slijedi da se operatori $a_{\vec{p}}^\dagger$, $a_{\vec{p}}$, $b_{\vec{p}}^\dagger$, i $b_{\vec{p}}$ mogu interpretirati kao operatori stvaranja i poništenja

$$\begin{aligned}
[H, a_{\vec{p}}^\dagger] &= \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger, & [H, a_{\vec{p}}] &= -\omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}, \\
[H, b_{\vec{p}}^\dagger] &= \omega_{\vec{p}} b_{\vec{p}}^\dagger, & [H, b_{\vec{p}}] &= -\omega_{\vec{p}} b_{\vec{p}},
\end{aligned} \tag{1509}$$

- Shvaćajući svaki stupanj slobode kao nezavisni HO, odabirući za njega vakuumsko stanje $(|0\rangle_{\vec{p},a}, |0\rangle_{\vec{p},b})$, definirajući vakuum kao produkt svih takvih vakuumskih stanja i definirajući sva pobuđena stanja djelovanjem operatora stvaranja na vakuum postiže se dijagonalizacija Hamiltonijana – potpun skup stanja i potpun skup svojstvenih vrijednosti Hamiltonijana slobodnog kompleksnog polja.

- Rabeći činjenicu da se energija može mjeriti samo relativno prema nekom stanju, odbacujemo energiju osnovnog stanja tj. vakuum definiramo kao stanje nulte energije. Odatle,

$$H|0\rangle = 0, \tag{1510}$$

$$H|\vec{p}\rangle_a = H a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = \omega_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle_a \tag{1511}$$

$$H|\vec{p}\rangle_b = H b_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = \omega_{\vec{p}} b_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = \omega_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle_b \tag{1512}$$

Primjetimo da stanja a i b imaju iste energije, kao što se odmah vidi iz (1507).

D. Naboj kompleksnog skalarnog polja

Akcija (1473) je invarijantna na globalnu faznu transformaciju polja (vidi Primjer 2 Noetherinog TM)

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi, \quad \phi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \phi^*. \tag{1513}$$

i njoj odgovara struja (82)

$$(82) \equiv j^\mu = i[(\partial_\mu \phi^*)\phi - (\partial_\mu \phi)\phi^*].$$

Pripadni naboj je

$$\begin{aligned}
 Q &= \int d^3x i \left(\dot{\phi}^*(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}, t) - \dot{\phi}(\vec{x}, t) \phi^*(\vec{x}, t) \right) \\
 &= \int d^3p (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger - b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}} - b_{\vec{p}} b_{\vec{p}}^\dagger) \\
 &= \int d^3p (a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} - b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}}) \tag{1514}
 \end{aligned}$$

- Uočimo da stanja a i b imaju suprotne naboje. To ukazuje na to da akcija slobodnog skalarnog polja opisuje sistem parova čestica iste mase i suprotnog naboja - čestica i antičestica.

- Ako rastavimo kompleksno skalarno polje (1505) na dio sa pozitivnim fazama ($e^{-ip \cdot x}$), $\phi^+(x)$, i dio sa negativnim fazama ($e^{ip \cdot x}$), $\phi^-(x)$, vidimo da $\phi^+(x)$ sadrži samo operatore poništenja čestica a $\phi^-(x)$ samo operatore stvaranja antičestica. Operator stvaranja čestice i pripadni operator poništenja čestice imaju suprotne naboje, kao što je lako provjeriti iz komutatora naboja s tim operatorima. Operator poništenja čestice i operator stvaranja antičestice imaju isti naboj. Zbog toga **svi dijelovi polja $\phi(x)$ imaju isti naboj** – u ovom slučaju naboj suprotan naboju čestice. Polje $\phi^*(x)$ ima isti naboj kao čestice.

7.5 Dodatak 5. POVEZANE LIEVE GRUPE*

(Uzeto iz Weinberg I knjige)

U kvantnoj mehanici fizikalna stanja su prikazana zrakama

Zraka = skup normaliziranih vektora iz Hilbertovog prostora, $(\Psi, \Psi) = 1$ koji se razlikuju do na fazu:

$$\Psi, \Psi' \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \Psi' = \xi\Psi \quad \text{i} \quad |\xi| = 1. \quad (1515)$$

Transformacija simetrije = promjena našeg gledišta (point of view), koja nije mjerljiva

$$\begin{array}{ccc} S & S' & \\ T : \mathcal{R} & \rightarrow \mathcal{R}' & P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = P(\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}'_n). \\ & : \mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}'_n & \end{array} \quad (1516)$$

Jednakost (1516), $P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = P(\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}'_n)$, je nužan uvjet (nije i dovoljan) za simetrijsku transformaciju [ispunjeno je 'simetrija \Rightarrow (1516)' dok '(1516) \Rightarrow simetrija' ne mora biti ispunjeno].

Definicija povezane Lieve grupe

Definicija : Skup transformacija simetrije $\{T(\theta)\}$ sa svojstvima:

- (1) opisan konačnim skupom realnih kontinuiranih parametara, npr. $\{\theta^A\}$.
- (2) svaki element skupa je kontinuirano povezan sa identičnom transformacijom

$$T(0) = 1, \quad (1517)$$

kojoj je pridjeljen skup parametara $\theta = 0 \equiv \{\theta^a = 0\}$.

(3) množenje :

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(f(\bar{\theta}, \theta)). \quad (1518)$$

gdje je $f(\bar{\theta}, \theta)$ analitička funkcija skupova parametara $\bar{\theta} \equiv \{\bar{\theta}^a\}$ i $\theta \equiv \{\theta^a\}$

Uporabom (1517) dobija se

$$f^a(\theta, 0) = f^a(0, \theta) = \theta^a. \quad (1519)$$

Reprezentacija transformacija Lieve grupe u Hilbertovom prostoru

- kao što smo pokazali zbog povezanosti s operatorom identiteta, reprezentanti simetrijskih transformacija u Hilbertovom prostoru su **unitarni** i **linearni**.

- u konačnoj blizini identiteta unitarni operatori se mogu prikazati Taylorovim razvojem

$$U(T(\theta)) = \mathbf{1} + i\theta^a \mathbf{t}_a + \frac{1}{2} \theta^a \theta^b \mathbf{t}_{ab} + \dots, \quad (1520)$$

$$f^a(\bar{\theta}, \theta) \stackrel{(1519)}{=} \bar{\theta}^a + \theta^a + f_{bc}^a \bar{\theta}^b \theta^c + \dots \quad (1521)$$

gdje su t_a, t_{ab}, \dots Hermitski operatori neovisni o parametrima θ^a i simetrični u indeksima ako imaju više od jednog indeksa. Hermitičnost t_a i t_{ab} je lako pokazati iz uvjeta unitarnosti $U(T(\theta))$.

Izvod Lieve algebre uz pretpostavku obične (ne-projektivne) reprezentacije

* neprojektivnost

$$U(T(\bar{\theta}))U(T(\theta)) = U(T(\bar{\theta})T(\theta)) \stackrel{(1518)}{=} U(T(f(\bar{\theta}, \theta))). \quad (1522)$$

* Taylorov razvoj do drugog reda u parametrima

$$\begin{aligned} & [1 + i\bar{\theta}^a \mathbf{t}_a + \frac{1}{2} \bar{\theta}^b \bar{\theta}^c \mathbf{t}_{bc} + \dots] [1 + i\theta^a \mathbf{t}_a + \frac{1}{2} \theta^b \theta^c \mathbf{t}_{bc} + \dots] \\ &= [1 + i \underbrace{(\theta^a + \bar{\theta}^a + f_{bc}^a \bar{\theta}^b \theta^c + \dots)}_{f^a(\bar{\theta}, \theta)} \mathbf{t}_a + \frac{1}{2} \underbrace{(\theta^b + \bar{\theta}^b + \dots)}_{f^b(\bar{\theta}, \theta)} \underbrace{(\theta^c + \bar{\theta}^c + \dots)}_{f^c(\bar{\theta}, \theta)} \mathbf{t}_{bc} + \dots] \end{aligned} \quad (1523)$$

Linearni članovi se poništavaju, a od bilinearnih članova ostaju

$$\begin{aligned} -\bar{\theta}^b \theta^c t_b t_c &= i\bar{\theta}^b \theta^c f_{bc}^a t_a + \frac{1}{2} (\theta^b \bar{\theta}^c + \bar{\theta}^b \theta^c) t_{bc} \\ \Rightarrow t_{bc} &\stackrel{\text{sim}}{=} -t_b t_c - i f_{bc}^a t_a \\ &\stackrel{\text{sim}}{\Rightarrow} [t_b, t_c] = -i \underbrace{(f_{bc}^a - f_{cb}^a)}_{C_{bc}^a} t_a. \end{aligned} \quad (1524)$$

U drugom i trećem redu (1524) upotrijebljena je simetrija t_{ab} operatora. Zadnja od jednažbi (1524) je jednažba Lieve algebre opće Lieve grupe. C_{bc}^a su tzv. strukturne konstante Lieve algebre.

JEDNOZNAČNOST : $t_{bc}, t_{bcd}, t_{bcde}, \dots$ su svi jednoznačno određeni Lievom algebrom. $\Rightarrow U(T(\theta))$ je jednoznačno određen u blizini 1-ice.

ABELOVA GRUPA :

Definicija : $f^a(\bar{\theta}, \theta)$ je aditivna

$$f^a(\bar{\theta}, \theta) = \bar{\theta}^a + \theta^a \quad (1525)$$

$$\Rightarrow [t^a, t^b] = 0 \quad (1526)$$

$$\Rightarrow U(T(\theta)) \stackrel{(1525)}{=} \underbrace{U\left(T\left(\frac{\theta}{N}\right)\right)^N}_{(1 + \frac{i}{N} t^a \theta_a)^N} \rightarrow \exp(i\theta^a t_a) . \quad (1527)$$

7.6 Dodatak 6. DIRACOVA ALGEBRA U PROIZVOLJNOM BROJU PROSTORNO-VREMENSKIH DIMENZIJA

- U bilo kojem broju prostornih dimenzija potpun skup matrica koje zadovoljavaju Cliffordovu algebru (281) uz jedničnu matricu tvore sve antisimetrične kombinacije γ^μ matrica,

$$\begin{aligned}
 &1, \\
 &\gamma^\mu, \\
 &\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \equiv \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}, \\
 &\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]} \equiv \frac{1}{6}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu), \\
 &\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^{\sigma]}, \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{1528}$$

Matrice (1528) čine tzv. Diracovu algebru.

- Broj svih matrica u n dimenzija jednak je broju antisimetričnih tenzora 0-tog, 1-vog, ... n -tog reda,

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} = 2^n \tag{1529}$$

- U slučaju da je n paran sve su matrice nezavisne, zato jer sve imaju različita transformacijska svojstva na Lorentzove transformacije i zato što antisimetrična kombinacija sa maksimalnim brojem indeksa n , $\gamma^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ antikomutira sa svim γ^μ matricama.

DZ. Rabeći (281) pokažite da svaki sumand u $\gamma^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ antikomutira sa bilo kojom γ^μ matricom. Stoga $\gamma^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ antikomutira sa bilo kojom γ^μ matricom.

- U slučaju da je n neparan, $\gamma^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ komutira sa svim γ^μ matricama, dakle i sa svim matricama Diracove algebre (1528). To znači da je $\gamma^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ proporcionalan jedinici. Nadalje, to ukazuje na ekvivalentnost $\gamma^{\mu_1\dots\mu_i}$ matrica sa $\gamma^{\mu_{i+1}\dots\mu_n}$ matricama. Stoga je pola od matrica danih u (1528) zavisno i ukupan broj nezavisnih matrica je 2^{n-1} .

DZ. Pokažite da za n neparan $\gamma^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ komutira sa svakom γ^μ matricom.

DZ. Za $n = 3$ euklidski prostor Diracove matrice su dane sa (284). Pokažite da je γ^{ijk} proporcionalan jedinici. Pokažite također da su matrice γ^i i γ^{jk} , gdje je i različit od j i k , međusobno proporcionalne. Nađite ukupan broj nezavisnih matrica i provjerite da ih ima $2^{3-1} = 4$.

7.7 Dodatak 7: POINCARÉOVA ALGEBRA U HILBERTOVOM PROSTORU

Infinitezimalne transformacije Poincaréove grupe, broj parametara

* Motivacija : svojstva Lieve grupe oko identičnog elementa sadrže većinu svojstava Lieve simetrije

* Transformacije oko 1-ice $[(\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu, a^\mu = 0); (1,0)]$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad a^\mu = \varepsilon^\mu. \quad (1530)$$

* uvjet (208) $\equiv g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$:

$$[\text{Konvencije : } g_{\mu\nu}T^{\nu\alpha\dots}{}_\beta = T_\mu{}^{\alpha\dots}{}_\beta ; \quad g^{\mu\nu}T_\nu{}^{\alpha\beta\dots} = T^{\mu\alpha\beta\dots} .] \quad (1531)$$

$$\begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= g_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho)(\delta^\nu{}_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma) = g_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} + \mathcal{O}(\omega^2) \\ &\equiv \omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho} \end{aligned} \quad (1532)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{antisim. tenzor } \omega_{\rho\sigma} \text{ (} 4 \times 4 \text{)} \\ \varepsilon^\epsilon \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow 6 \text{ parametara} \\ \Rightarrow 4 \text{ parametra} \end{array}$$

\Rightarrow P.G. je 10-parametarska grupa.

* Digresija : Konvencije (1531) i razni zapisi uvjeta (208) :

$$(208) \equiv g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} | \cdot g^{\sigma\bar{\sigma}} \Rightarrow \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda_\mu{}^{\bar{\sigma}} = \delta_\rho{}^{\bar{\sigma}}, \quad (1533)$$

$$(209) \equiv \Lambda^\rho{}_\mu\Lambda^\sigma{}_\nu g^{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} | \cdot g_{\sigma\bar{\sigma}} \Rightarrow \Lambda^\rho{}_\mu\Lambda_{\bar{\sigma}}{}^\mu = \delta_{\bar{\sigma}}{}^\rho. \quad (1534)$$

Uočiti: $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$.

Jedinični operator u Hilbertovom prostoru; Operatori bliski jediničnom operatoru i generatori Poincaréove grupe u Hilbertovom prostoru

• Jedinični operator $U(1,0)$:

$$T(1,0) : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad U(1,0) : \{\Psi_{\mathcal{R}}\} = \mathcal{R} \rightarrow \{\Psi_{\mathcal{R}}\} = \mathcal{R}$$

$$\Rightarrow \quad U(1,0) = e^{i\varphi} 1.$$

ODABIR FAZE : $U(1, 0) = 1$.

• Operatori bliski jediničnom : $U(1 + \omega, \varepsilon)$: razvoj po ω i ε

$$U(1 + \omega, \varepsilon) = 1 - \frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} + i\varepsilon_{\rho}P^{\rho} + \dots \quad (1535)$$

Predznak "–" ispred P^{ρ} je konvencija (vidi ispod fizikalno značenje operatora). Operatori $J^{\rho\sigma}$ i P^{ρ} su nezavisni.

(W-PS usporedba: Predznak uz $J^{\rho\sigma}$ definiran je komutacijskim relacijama Poincaréove grupe (1558)-(1564); Predznak uz P^{ρ} definiran je tako da su faze u (1568) numerički iste kao u W; $\omega_{\mu\nu}^{PS} = -\omega_{\mu\nu}^W$)

* unitarnost U i realnost parametara $\omega_{\rho\sigma}$, ε_{ρ} \Rightarrow hermitičnost $J^{\rho\sigma}$ i P^{ρ} :

$$J^{\rho\sigma\dagger} = J^{\rho\sigma} \quad P^{\rho\dagger} = P^{\rho} . \quad (1536)$$

* antisimetričnost $\omega_{\rho\sigma}$ \Rightarrow antisimetričnost $J^{\rho\sigma}$

$$J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho} . \quad (1537)$$

* Fizikalno značenje : P^0 : op. energije \equiv Hamiltonijan,
 P^1, P^2, P^3 : komponente op. impulsa,
 J^{23}, J^{31}, J^{12} : komponente op. momenta impulsa.

Poincaréove transformacije generatora grupe

Dobijaju se razmatranjem transformacije sličnosti operatora bliskih identitetu,

$$\begin{aligned} & U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \varepsilon)U^{-1}(\Lambda, a) \\ & \stackrel{(1535)}{=} U(\Lambda, a)\left(1 - \frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} + i\varepsilon_{\rho}P^{\rho} + \dots\right)U^{-1}(\Lambda, a) \\ & \stackrel{(135)}{=} 1 - \frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) + i\varepsilon_{\rho}U(\Lambda, a)P^{\rho}U^{-1}(\Lambda, a) \\ & = U((\Lambda, a)(1 + \omega, \varepsilon)(\Lambda, a)^{-1}) \\ & \stackrel{(1539)}{=} U(1 + \Lambda\omega\Lambda^{-1}, \Lambda\varepsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a) \\ & = 1 - \frac{1}{2}i(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} + i(\Lambda\varepsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_{\rho}P^{\rho}, \end{aligned} \quad (1538)$$

$$\begin{aligned} (\Lambda, a)(1 + \omega, \varepsilon)(\Lambda, a)^{-1} & = (\Lambda, a)(1 + \omega, \varepsilon)(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \\ & = (\Lambda, a)((1 + \omega)\Lambda^{-1}, (1 + \omega)(-\Lambda^{-1}a) + \varepsilon) \\ & = (1 + \Lambda\omega\Lambda^{-1}, (-1 - \Lambda\omega\Lambda^{-1})a + \Lambda\varepsilon + a) \\ & = (1 + \Lambda\omega\Lambda^{-1}, \Lambda\varepsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a) . \end{aligned} \quad (1539)$$

(1538),(1539) \Rightarrow

$$\varepsilon_\rho U(\Lambda, a) P^\rho U^{-1}(\Lambda, a) = (\Lambda \varepsilon)_\rho P^\rho \quad (1540)$$

$$\omega_{\rho\sigma} U(\Lambda, a) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\Lambda, a) = (\Lambda \omega \Lambda^{-1})_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} + 2(\Lambda \omega \Lambda^{-1} a)_\rho P^\rho . \quad (1541)$$

Za nalaženje transformacija generatora trebamo izraze za inverze Λ_ν^μ ,

$$(\Lambda^{-1})_\rho^\mu \Lambda_\mu^\sigma = \delta_\rho^\sigma, \quad \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\mu^\sigma \stackrel{(1533)}{=} \delta_\rho^\sigma \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})_\rho^\mu = \Lambda_\rho^\mu, \quad (1542)$$

$$\Lambda_\mu^\rho (\Lambda^{-1})_\rho^\sigma = \delta_\mu^\sigma, \quad \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\rho^\sigma \stackrel{(1534)}{=} \delta_\mu^\sigma \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})_\rho^\mu = \Lambda_\rho^\mu, \quad (1543)$$

i moramo malo "pregrupirati" članove,

$$(\Lambda \varepsilon)_\rho P^\rho = (\Lambda \varepsilon)_\mu P^\mu, = \Lambda_\mu^\rho \varepsilon_\rho P^\mu \quad (1544)$$

$$(\Lambda \omega \Lambda^{-1})_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} = (\Lambda \omega \Lambda^{-1})_{\mu\nu} J^{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\rho \omega_{\rho\sigma} (\Lambda^{-1})_\nu^\sigma J^{\mu\nu} \stackrel{(1543)}{=} \omega_{\rho\sigma} \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma J^{\mu\nu}, \quad (1545)$$

$$\begin{aligned} 2(\Lambda \omega \Lambda^{-1} a)_\rho P^\rho &= 2\Lambda_\mu^\rho \omega_{\rho\sigma} (\Lambda^{-1})_\nu^\sigma a^\nu P^\mu \stackrel{(1543)}{=} 2\Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma \omega_{\rho\sigma} a^\nu P^\mu \\ &\stackrel{(1532)}{=} \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma \omega_{\rho\sigma} (a^\nu P^\mu - a^\mu P^\nu). \end{aligned} \quad (1546)$$

Odatle slijede transformacije generatora Poincaréove grupe na Poincaréove transformacije,

$$U(\Lambda, a) P^\rho U^{-1}(\Lambda, a) \stackrel{(1540,1544)}{=} \Lambda_\mu^\rho P^\mu, \quad (1547)$$

$$U(\Lambda, a) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\Lambda, a) \stackrel{(1541,1545,1546)}{=} \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma (J^{\mu\nu} - a^\mu P^\nu + a^\nu P^\mu) . \quad (1548)$$

(1547,1548) \Rightarrow P^μ je vektor na homogenu Lorentzovu transformaciju $(\Lambda, 0)$,
 $J^{\mu\nu}$ je tenzor na homogenu Lorentzovu transformaciju $(\Lambda, 0)$,
 P^μ je translacijski invarijantan (L. transformat ne zavisi o a^μ),
 $J^{\mu\nu}$ nije translacijski invarijantan.

Poincaréova algebra (Lieva algebra Poincaréove grupe)

* dobija se analizom (1547) i (1548) za infinitezimalnu L. transformaciju $(\Lambda, a) = (1 + \omega, \varepsilon)$

:

$$U(1 + \omega, \varepsilon) = 1 - \frac{1}{2} i \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + i \varepsilon_\mu P^\mu,$$

$$U^{-1}(1 + \omega, \varepsilon) \approx U(1 - \omega, -\varepsilon) = 1 + \frac{1}{2} i \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i \varepsilon_\mu P^\mu . \quad (1549)$$

[Upotrebljena je relacija $(1 + \omega, \varepsilon)^{-1} = ((1 + \omega)^{-1}, -(1 + \omega)^{-1} \varepsilon) \approx (1 - \omega, -\varepsilon)$].

$$(1547) \Rightarrow i \left[-\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + \varepsilon_\mu P^\mu, P^\rho \right] = \omega_\mu^\rho P^\mu, \quad (1550)$$

$$(1548) \Rightarrow i \left[-\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + \varepsilon_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma} \right] = \omega_\mu^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\nu^\sigma J^{\rho\nu} - \varepsilon^\rho P^\sigma + \varepsilon^\sigma P^\rho \quad (1551)$$

$$(1550) \Rightarrow [P^\mu, P^\rho] = 0, \quad (1552)$$

$$(1550) \Rightarrow -i\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}[J^{\mu\nu}, P^\rho] = \frac{1}{2}(\omega_\mu{}^\rho P^\mu + \omega_\nu{}^\rho P^\nu) = \frac{1}{2}(g^{\nu\rho}\omega_{\mu\nu}P^\mu + g^{\mu\rho}\omega_{\nu\mu}P^\nu) \\ = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(g^{\nu\rho}P^\mu - g^{\mu\rho}P^\nu),$$

\(\Downarrow\)

$$i[J^{\mu\nu}, P^\rho] = -g^{\nu\rho}P^\mu + g^{\mu\rho}P^\nu, \\ \equiv i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = -g^{\mu\rho}P^\sigma + g^{\mu\sigma}P^\rho. \quad (1553)$$

Analogno

$$(1551) \Rightarrow i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = -g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} + g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + g^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} - g^{\sigma\nu}J^{\rho\mu}. \quad (1554)$$

RESUME : Lieva algebra Poincaréove grupe

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = -g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} + g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + g^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} - g^{\sigma\nu}J^{\rho\mu} \\ i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = -g^{\mu\rho}P^\sigma + g^{\mu\sigma}P^\rho \\ i[P^\mu, P^\rho] = 0$$

Standardni zapis Poincaréove algebre; Sačuvani operatori

- QM : specijalnu ulogu imaju **sačuvani operatori** (koji komutiraju sa $H = P^0$) :

$$[P^0, P^\mu] \stackrel{(1552)}{=} 0, \quad [P^0, J^{ij}] \stackrel{(1553)}{=} 0$$

\(\Rightarrow\)

$$\vec{P} = \{P^1, P^2, P^3\} \quad \text{tvore operator impulsa,} \quad (1555)$$

$$\vec{J} = \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\} \quad \text{tvore operator kutne količine gibanja,}$$

$$(J_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J^{jk}). \quad (1556)$$

* preostali generatori L.T.,

$$\vec{K} = \{J^{10}, J^{20}, J^{30}\}, \quad (1557)$$

tvore vektor "boostova" (potisnuća). Oni nisu sačuvani. Zbog toga se njihove svojstvene vrijednosti ne mogu rabiti za označavanje fizikalnih stanja kao $H \equiv P^0$, \vec{P} i \vec{J} .

* Zapis komutacijskih relacija L.T. (1552), (1553), (1554) preko H , \vec{P} , \vec{J} , \vec{K} operatora (sačuvani operatori su istaknuti) :

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad (1558)$$

$$[J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad (1559)$$

$$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad (1560)$$

$$[J_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k, \quad (1561)$$

$$[K_i, P_j] = iH\delta_{ij}, \quad (1562)$$

$$[K_i, H] = iP_i, \quad (1563)$$

$$[J_i, H] = [P_i, H] = [H, H] = [P_i, P_j] = 0. \quad (1564)$$

Primjeri dokaza relacija (1558-1564) :

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0 \\ \Rightarrow [P^0, P^0] &= 0 \quad \equiv \quad [H, H] = 0, \\ [P^0, P^i] &= 0 \quad \equiv \quad [H, P^i] = 0, \\ [P^i, P^j] &= 0 \quad \equiv \quad [P^i, P^j] = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] &= -g^{\mu\rho}P^\sigma + g^{\mu\sigma}P^\rho \\ \Rightarrow i[P^0, J^{jk}] &= 0 \mid \varepsilon_{ijk} \quad \equiv \quad [H, J_i] = 0, \\ i[P^0, J^{i0}] &= -g^{0i}P^0 + g^{00}P^i = P^i \quad \equiv \quad i[H, K_i] = P_i, \\ i[P^i, J^{j0}] &= -g^{ij}P^0 + g^{i0}P^j = \delta_{ij}H \quad \equiv \quad i[P_i, K_j] = \delta_{ij}H, \\ i[P^i, J^{ab}] &= -g^{ia}P^b + g^{ib}P^a \mid \varepsilon_{jab} \quad \equiv \quad i[P_i, J_j] = -\varepsilon_{ijk}P_k. \end{aligned}$$

Za DZ dokažite relacije (1558-1564) koje ovdje nismo dokazali.

Primjeri aditivnih podgrupa Poincaréove grupe

* Translacije $T(1, a) : T(1, a)T(1, \bar{a}) \equiv T(1, a + \bar{a})$

$$\Rightarrow U(1, a) \stackrel{(1535)}{=} \exp(iP^\mu a_\mu). \quad (1565)$$

* Rotacija za konačan kut oko osi $\vec{\theta}$, $R_{\vec{\theta}}$ iznosa $|\vec{\theta}|$ ($\vec{\theta} = (-\omega_{23}, -\omega_{31}, -\omega_{12})$)

$$U(R_{\vec{\theta}}) \stackrel{(1535)}{=} \exp(i\vec{J}\vec{\theta}). \quad (1566)$$

7.8 Dodatak 8: JEDNOČESTIČNA STANJA

(Uzeto iz Weinberga I)

LABELE (OZNAKE) STANJA

$$* [P^\mu, P^\nu] = 0$$

\Rightarrow prirodno je označiti stanje sa vrijednošću 4-impulsa $p : \Psi_p$ }
ostale stupnjeve slobode označimo sa $\sigma \Psi_{p\sigma}$ }

$$P^\mu \Psi_{p\sigma} = p^\mu \Psi_{p\sigma} . \quad (1567)$$

* **PRETPOSTAVKA** : indeksi σ su diskretni.

* **NAPOMENA** : Ψ označava bilo koje slobodno-gibajuće stanje (ne nužno elementarnu česticu)

TRANSLACIJA ($U(1, a) = \exp(iPa)$) : **PROMJENA STANJA, SV. VRIJ. P_μ**
:

$$U(1, a) \Psi_{p\sigma} = e^{ipa} \Psi_{p\sigma}, \quad (1568)$$

$$P_\mu [U(1, a) \Psi_{p\sigma}] = p_\mu [U(1, a) \Psi_{p\sigma}]. \quad (1569)$$

DJELOVANJE P_μ NA LORENTZ TRANSFORMIRANO STANJE : PROBLEM ODREĐIVANJA KOEFICIJENATA KOJE MIJEŠAJU σ -ME

· oznaka za homogenu L.T.

$$U(\Lambda, 0) \equiv U(\Lambda) . \quad (1570)$$

Njen inverz dan je sa

$$U(\Lambda)^{-1} = U(\Lambda^{-1}), \quad (1571)$$

a umnožak dvije homogene L.T glasi

$$U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) = U(\Lambda_1\Lambda_2). \quad (1572)$$

· Dokaz da $U(\Lambda)\Psi_{p\sigma}$ ima sv. vrijednost Λp s obzirom na P_μ

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} &= U(\Lambda)[U(\Lambda)^{-1}P^\mu U(\Lambda)]\Psi_{p\sigma} \stackrel{(1547,1570,1571)}{=} U(\Lambda)[(\Lambda^{-1})^\mu_\rho P^\rho]\Psi_{p\sigma} \\ &\stackrel{(1544)}{=} \Lambda^\mu_\rho p^\rho U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} \end{aligned} \quad (1573)$$

$\Rightarrow U(\Lambda)\Psi_{p\sigma}$ je lin. komb. $\Psi_{\Lambda p, \sigma'}$:

$$U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)\Psi_{\Lambda p, \sigma'} . \quad (1574)$$

* **ZADAĆA** : naći **strukturu** $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ koeficijenta i ireducibilnih reprezentacija (ir-rep) nehomogene L. grupe.

STRUKTURA $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ U IRREP-ovima nehomog. L. grupe

* jedine f-je p^μ ($p^2 \leq 0$) invarijantne na svojstvene ortokrone L.T. Λ^μ_ν su

$$p^2 = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu, \quad (1575)$$

$$\text{sign}(p^0) \quad \text{za } p^2 \geq 0 . \quad (1576)$$

\Rightarrow mogućnost izbora **standardnog 4-impulsa** k^μ , preko kojeg se može izraziti svaki p^μ

$$p^\mu = L^\mu_\nu(p)k^\nu . \quad (1577)$$

L^μ_ν je tzv. **standardna L.T** ovisna samo o p .

* definicija $\Psi_{p\sigma}$

$$\Psi_{p\sigma} \equiv N(p)U(L(p))\Psi_{k\sigma} . \quad (1578)$$

- $N(p)$ je normalizacijski faktor stanja $\Psi_{p\sigma}$ koji će biti odabran poslije (vidi (1607)).

- **VAŽNO** : (1578) **veže stanja istog σ i različitog 4-impulsa**

• **mala grupa** (s obzirom na smjer k^μ)

* Definicija male grupe :

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} &\stackrel{(1578)}{=} U(\Lambda)N(p)U(L(p))\Psi_{k\sigma} \\ &\stackrel{(1572)}{=} N(p)U(L(\Lambda p)) \cdot U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\Psi_{k\sigma} . \end{aligned} \quad (1579)$$

□ Wignerova rotacija :

$$W(\Lambda, p) \equiv W \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) : k \xrightarrow{L(p)} p \xrightarrow{\Lambda} \Lambda p \xrightarrow{L^{-1}(\Lambda p)} k : \quad (1580)$$

$$W^\mu_\nu k^\nu = k^\mu . \quad (1581)$$

MALA GRUPA s obzirom na smjer k^μ u vekt. pr. : skup svih transf. koje čuvaju smjer k^μ

Odatle slijedi da $U(W)$ djelujući na stanje $\Psi_{k\sigma}$ samo pomiješa indekse σ

$$U(W)\Psi_{k\sigma} = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k\sigma'} . \quad (1582)$$

□ **D(W) čine repr. male grupe (za smjer \vec{k})**

$$\begin{aligned} U(\overline{W}W)\Psi_{k\sigma} &= D_{\sigma'\sigma}(\overline{W}W)\Psi_{k\sigma'} \\ &= U(\overline{W})U(W)\Psi_{k\sigma} = D_{\sigma'\sigma''}(\overline{W})D_{\sigma''\sigma}(W)\Psi_{k\sigma'} \\ &\Downarrow \\ D_{\sigma'\sigma}(\overline{W}W) &= D_{\sigma'\sigma''}(\overline{W})D_{\sigma''\sigma}(W) \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned} \quad (1583)$$

Table 2: Standardni 4-impulsi i pripadne male grupe za razne klase 4-impulsa ($\kappa > 0$, energija po volji). $SO(3)$ je grupa rotacija u 3D; $SO(2, 1)$, $SO(3, 1)$ su Lorentzove grupe u 2+1 i 3+1 D; $ISO(2)$ je grupa euklidske geometrije - sadrži rotacije i translacije u 2D.

	standardni k^μ	mala grupa	
(a)	$p^2 = -M^2 < 0, p^0 > 0$	$(M, 0, 0, 0)$	$SO(3)$ fiz č. mase > 0
(b)	$p^2 = -M^2 < 0, p^0 < 0$	$(-M, 0, 0, 0)$	$SO(3)$
(c)	$p^2 = 0, p^0 > 0$	$(\kappa, 0, 0, \kappa)$	$ISO(2)$ fiz č. mase $= 0$
(d)	$p^2 = 0, p^0 < 0$	$(-\kappa, 0, 0, \kappa)$	$ISO(2)$
(e)	$p^2 = N^2 > 0$	$(0, 0, 0, N)$	$SO(2, 1)$
(f)	$p^\mu = 0$	$(0, 0, 0, 0)$	$SO(3, 1)$ fiz vakuum

□ Lorentz transformat $\Psi_{p\sigma}$

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} &\stackrel{(1579,1582)}{=} N(p)D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))U(L(\Lambda p))\Psi_{k\sigma'} \\ &\stackrel{(1578)}{=} \left(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \right) D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))\Psi_{\Lambda p, \sigma'} . \end{aligned} \quad (1584)$$

\Rightarrow - problem nalaženja $C_{\sigma'\sigma}$ sveo se na problem nalaženja **repki male grupe** za razne smjerove k_μ (vidi tabelu 2).
- to je tzv. **metoda induciranih reprezentacija** (nalaženje repki grupe preko repki male grupe).

NORMALIZACIJA STANJA

* Normalizacija $\Psi_{k\sigma}$ stanja po Weinbergu (Peskinova normalizacija je dana u (131))

$$(\Psi_{k'\sigma'}, \Psi_{k\sigma}) \equiv \delta(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{\sigma'\sigma} . \quad (1585)$$

$$\Rightarrow D^\dagger(W) = D^{-1}(W) . \quad (1586)$$

D:

$$\begin{aligned} (U(W)\Psi_{k'\sigma'}, U(W)\Psi_{k\sigma}) &\stackrel{(1669,1670,135,1583)}{=} D^*(W)_{\bar{\sigma}'\sigma'} D(W)_{\bar{\sigma}\sigma} (\Psi_{k'\bar{\sigma}'}, \Psi_{k\bar{\sigma}}) \\ &= D^\dagger(W)_{\sigma'\bar{\sigma}} D(W)_{\bar{\sigma}\sigma} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \quad (1587) \\ &\stackrel{(135)}{=} (\Psi_{k'\sigma'}, \Psi_{k\sigma}) \stackrel{(1585)}{=} \delta_{\sigma'\sigma} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \quad (1588) \\ &\stackrel{(1587,1588)}{\Rightarrow} \text{Q.E.D. (1586)} \end{aligned}$$

* Normalizacija $\Psi_{p\sigma}$ stanja

$$[(1579) \equiv U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} = N(p)U(L(\Lambda p)) \underbrace{U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))}_{D_{\sigma'\sigma}(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\Psi_{k\sigma'}} \Psi_{k\sigma}]$$

$$\begin{aligned} (\Psi_{p'\sigma'}, \Psi_{p\sigma}) &= \underbrace{U^{-1}(L(p))}_{U(L^{-1}(p))} \Psi_{p'\sigma'}, \underbrace{U^{-1}(L(p))}_{\stackrel{(1578)}{=} N(p)\Psi_{k\sigma}} \Psi_{p\sigma} \\ &\stackrel{(1579)}{=} \left(N(p') \underbrace{U(L(L^{-1}(p)p'))}_{\Lambda} U(L^{-1}(L^{-1}(p)p')) \underbrace{L^{-1}(p)L(p')}_{\Lambda} \right) \Psi_{k\sigma'}, N(p)\Psi_{k\sigma} \\ &\quad \underbrace{D_{\bar{\sigma}'\sigma'}(L^{-1}(L^{-1}(p)p')L^{-1}(p)L(p'))}_{\Psi_{k\bar{\sigma}'}} \\ &= N^*(p')N(p)D_{\bar{\sigma}'\sigma'}^* \underbrace{(L^{-1}(L^{-1}(p)p')L^{-1}(p)L(p'))}_{W(L^{-1}(p),p')} \\ &\quad \times \underbrace{\left(\underbrace{U(L(L^{-1}(p)p'))}_{N^{-1}(k')\Psi_{k'\bar{\sigma}'}} \Psi_{k\bar{\sigma}'}, \Psi_{k\sigma} \right)}_{N^{-1}(k')\delta(\vec{k}'-\vec{k})\delta_{\bar{\sigma}'\sigma}} . \quad (1589) \end{aligned}$$

Iz $\delta(\vec{k}' - \vec{k})$ u (1589) slijedi

$$k = k' \quad (1590)$$

$$\Rightarrow k' \equiv L^{-1}(p)p' = k \Rightarrow p' = L(p)k \equiv p, \quad (1591)$$

$$(1590) \Rightarrow N(k') = N(k) = 1 \quad (1592)$$

$$\Rightarrow L(k') = L(k) = 1, \quad (1593)$$

$$(1591) \Rightarrow N(p') = N(p) \quad (1594)$$

$$\Rightarrow L(p') = L(p) \quad (1595)$$

$$\Rightarrow L(L^{-1}(p)p') = L(k') = 1, \quad (1596)$$

$$(1594, 1595, 1596) \Rightarrow D_{\vec{\sigma}'\sigma'}^* \left(W(L^{-1}(p), p') \right) = D_{\vec{\sigma}'\sigma'}^*(1) = \delta_{\vec{\sigma}'\sigma'}. \quad (1597)$$

Stoga iz (1589) slijedi,

$$(\Psi_{p'\sigma'}, \Psi_{p\sigma}) = |N(p)|^2 \delta_{\sigma'\sigma} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \propto \delta_{\sigma'\sigma} \delta(\vec{p}' - \vec{p}), \quad (1598)$$

gdje je proporcionalnost posljedica (1591). Nezavisan dokaz proporcionalnosti slijedi iz nalaženja faktora proporcionalnosti između $\delta(\vec{k}' - \vec{k})$ i $\delta(\vec{p}' - \vec{p})$.

Određivanje faktora proporcionalnosti između $\delta(\vec{k}' - \vec{k})$ i $\delta(\vec{p}' - \vec{p})$

- sljedeće razmatranje vrijede za fizikalna čestična stanja (slučajevi (a) i (c) u tablici 2) za koju postoje obje invarijante p^μ (1575) i (1576)

- Lorentz invarijantan integral opće skalarne funkcije $f(p^\mu) = f(p^2)$ može se napisati na sljedeći način :

$$\begin{aligned} & \int d^4p \delta(p^2 - M^2) \theta(p^0) f(\vec{p}, p^0) \\ &= \int d^3p dp^0 \delta((p^0)^2 - \vec{p}^2 - M^2) \theta(p^0) f(\vec{p}, p^0) \\ &= \int d^3p \frac{f(\vec{p}, \sqrt{\vec{p}^2 + M^2})}{2\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}} \end{aligned} \quad (1599)$$

$$\Rightarrow \text{integracijska mjera } \frac{d^3p}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}} \text{ je inv. na L.T.} \quad (1600)$$

- Radeći nadalje definiciju δ -funkcije i invarijantnost mjere (1600) nalazimo

$$F(\vec{p}) \equiv \int d^3p' \delta(\vec{p} - \vec{p}') F(\vec{p}') = \int \frac{d^3p'}{\sqrt{\vec{p}'^2 + M^2}} (\sqrt{\vec{p}'^2 + M^2} \delta(\vec{p} - \vec{p}')) F(\vec{p}') \quad (1601)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\vec{p}^2 + M^2} \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \stackrel{def}{\equiv} p^0 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \equiv \text{INV NA L.T.} \quad (1602)$$

$$\Rightarrow p^0 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) = k^0 \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) \quad (1603)$$

$$\Rightarrow (\Psi_{p'\sigma'}, \Psi_{p\sigma}) \stackrel{(1598)}{=} |N(p)|^2 \delta_{\sigma'\sigma} \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) \stackrel{(1603)}{=} \frac{p^0}{k^0} |N(p)|^2 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{\sigma'\sigma} . \quad (1604)$$

- Primjetimo da je jednadžbom (1603) dokazana proporcionalnost $\delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$ i $\delta^3(\vec{k}' - \vec{k})$.
- Postoji sloboda odabira norme, npr. može se odabrati $N(p) = 1$.

KONVENCIJA TJ. ODABIR NORME U PESKIN-SCHROEDEROVOJ KNJIZI

$$(\Psi_{k'\sigma'}, \Psi_{k\sigma}) = \underbrace{(2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\vec{k}' - \vec{k})}_{(2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})} \quad (1605)$$

odakle uporabom (1589) slijedi

$$\begin{aligned} (\Psi_{p'\sigma'}, \Psi_{p\sigma}) &= |N(p)|^2 (\Psi_{k'\sigma'}, \Psi_{k\sigma}) \\ &= |N(p)|^2 (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \end{aligned} \quad (1606)$$

Peskin odabire relativistički invarijantnu normalizaciju (499) odakle slijedi

$$N(p) = 1, \quad (1607)$$

Stoga vrijedi

$$(\Psi_{p'\sigma'}, \Psi_{p\sigma}) = 2E_{\vec{p}} \delta_{\sigma'\sigma} \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) . \quad (1608)$$

Napomena: U Weinbergovoj knjizi, odakle je uzet ovaj tekst, je $N(p) = \sqrt{k^0/p^0}$ i uzeto je da vrijedi $(\Psi_{p'\sigma'}, \Psi_{p\sigma}) = \delta_{\sigma'\sigma} \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$.

7.8.1 $M > 0$ (Stanja, mala grupa itd. za $M > 0$)

* mala grupa je $SO(3)$ - 3D rotacijska grupa (može se očitati iz standardnog 4-impulsa

$$k^\mu = (M, \underbrace{0, 0, 0}) . \quad (1609)$$

\Rightarrow unitarne reprezentacije mogu se prikazati kao direktne sume ireducibilnih unitarnih reprezentacija $D_{\sigma'\sigma}^j(R)$ dimenzionalnosti $2j + 1$ gdje je $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

- za inf. rotaciju u x -prostoru ($\vec{\theta} = (-\theta_{23}, -\theta_{31}, -\theta_{12})$),

$$R_{ik} = \delta_{ik} + \theta_{ik}, \quad \theta_{ik} = -\theta_{ki} . \quad (1610)$$

$D_{\sigma'\sigma}^j(R)$ matrice rotacija u $\Psi_{p\sigma}$ prostoru glase,

$$D_{\sigma'\sigma}^j(1 + \theta) = \delta_{\sigma'\sigma} - \frac{i}{2}\theta_{ik}(J_{ik}^{(j)})_{\sigma'\sigma}, \quad (1611)$$

$$(J_1^{(j)} \pm iJ_2^{(j)})_{\sigma'\sigma} = (J_{23}^{(j)} \pm iJ_{31}^{(j)})_{\sigma'\sigma} = \delta_{\sigma'\sigma \pm 1} \sqrt{j(j+1) - \sigma(\sigma \pm 1)}, \quad (1612)$$

$$(J_3^{(j)})_{\sigma'\sigma} = (J_{12}^{(j)})_{\sigma'\sigma} = \sigma \delta_{\sigma'\sigma}, \quad (1613)$$

gdje $\sigma = -j, \dots, j$.

* L.T. (1584) stanja $M > 0$ i spin = j ,

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} &\stackrel{(1584)}{=} \left(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \right) D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))\Psi_{\Lambda p, \sigma'} \\ &\stackrel{(1607)}{=} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))\Psi_{\Lambda p, \sigma'}, \end{aligned} \quad (1614)$$

gdje je $W(\Lambda, p)$ element male grupe (Wignerova rotacija).

Napomena: U Weinbergu zadnji redak (1614) glasi $\left(\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \right) D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))\Psi_{\Lambda p, \sigma'}$, tj.

$$\left(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \right) = \left(\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \right).$$

U gornjem izrazu još su nam nepoznati stanje $\Psi_{p\sigma}$ i Wignerova rotacija. Za obje veličine nam treba definicija standardnog boosta, $L(p)$.

* **Račun Wignerove rotacije, definicija standardnog boosta, $\Psi_{p\sigma}$**

$$\cdot W(\Lambda, p) \stackrel{(1580)}{=} L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$$

· standardni boost (x prostor) [$\mu \equiv (0, i)$, $\nu \equiv (0, k)$]

$$L_{\nu}^{\mu}(p) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & \hat{p}_k(\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \\ \hline \hat{p}_i(\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}} & \delta_{ik} + (\gamma - 1)\hat{p}_i\hat{p}_k \end{array} \right), \quad (1615)$$

$$\gamma \equiv \frac{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}{M}, \quad \hat{p}_i \equiv \frac{p_i}{|\vec{p}|}. \quad (1616)$$

· $\Psi_{p\sigma}$

Iz (1615), (1578) i (1607) ($k^0 = M$, $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}$) slijedi,

$$\Psi_{p\sigma} = \sqrt{\frac{M}{p^0}} U(L(p))\Psi_{k\sigma}. \quad (1617)$$

* **Dokaz relacije** $\forall p W(\mathcal{R}, p) = \mathcal{R}$.

- Kada je Lorentzova transformacija Λ jednaka proizvoljnoj rotaciji \mathcal{R} pokazat ćemo da je Wignerova rotacija $W(\mathcal{R}, p)$ jednaka rotaciji za bilo koju vrijednost p . Odatle slijedi da se u relativističkoj kvantnoj mehanici kutna količina gibanja definira isto kao u nerelativističkoj. Stoga se tehnike za sferične harmonike, CGK, itd. mogu rabiti isto kao u NR QM. Dokaz slijedi.

□ Pokažimo da se opći Lorentzov boost može prikazati na preko boosta u \hat{z} smjeru i rotacija oko \hat{p} smjerova :

$$L(p) = R(\hat{p})B(|\vec{p}|)R(\hat{p})^{-1}, \quad (1618)$$

$$B(|\vec{p}|) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & (\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad R(p) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{R}(\hat{p}) \end{array} \right), \quad (1619)$$

D:

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \tilde{R}(\hat{p})\hat{z} & (\hat{p}_i &= \tilde{R}_{ia}\hat{z}_a, \quad \hat{z}^T = (0, 0, 1)), \\ \hat{p}^T &= \hat{z}^T \tilde{R}^T = \hat{z}^T \tilde{R}(\hat{p})^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(p) &= \left(\begin{array}{c|c} \gamma & (\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\hat{p}^T \\ \hline (\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\hat{p} & 1 + (\gamma - 1)\hat{p} \times \hat{p}^T \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \tilde{R}(\hat{p}) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \gamma & (\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\hat{z}^T \\ \hline (\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\hat{z} & 1 + (\gamma - 1)\hat{z} \times \hat{z}^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \tilde{R}(\hat{p})^{-1} \end{array} \right) \\ &= R(p)B(|\vec{p}|)R(p)^{-1} \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

□ Dokaz $B(|\vec{\mathcal{R}p}|) = B(|\vec{p}|)$

- iznos 3-impulsa i energije ne ovisi o rotaciji; stoga se ni γ ne mijenja s njom; kako $B(|\vec{p}|)$ ovisi samo o γ (\vec{z} je konstanta), vrijedi i

$$B(|\vec{\mathcal{R}p}|) = B(|\vec{p}|). \quad (1620)$$

□ Dokaz relacije ($\forall p W(\mathcal{R}, p) = \mathcal{R}$)

$$W(\mathcal{R}, p) \stackrel{(1580)}{=} L^{-1}(\mathcal{R}p)\mathcal{R}L(p)$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(1618)}{=} \left(R(\mathcal{R}\vec{p})B(|\vec{p}|)R^{-1}(\mathcal{R}\vec{p}) \right)^{-1} \cdot \mathcal{R} \cdot R(\vec{p})B(|\vec{p}|)R^{-1}(\vec{p}) \\
& = R(\mathcal{R}\vec{p})B^{-1}(|\vec{p}|) \left(R^{-1}(\mathcal{R}\vec{p})\mathcal{R}R(\vec{p}) \right) B(|\vec{p}|)R^{-1}(\vec{p}) . \quad (1621)
\end{aligned}$$

Za operator u velikim zagradama, $R^{-1}(\mathcal{R}\vec{p})\mathcal{R}R(\vec{p})$, \vec{z} je invarijantan smjer,

$$R^{-1}(\tilde{\mathcal{R}}\hat{p})\mathcal{R}R(\hat{p}) : \hat{z} \rightarrow \hat{p} \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}\hat{p} \rightarrow \hat{z}.$$

Stoga cjelokupna transformacija može maksimalno biti proizvoljna rotacija oko osi \hat{z} ,

$$R^{-1}(\tilde{\mathcal{R}}\hat{p})\mathcal{R}R(\hat{p}) = R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1622)$$

Izrazi (1622) i (1619) za $R(\theta)$ i $B(|\vec{p}|)$ očigledno komutiraju. Stoga

$$W(\mathcal{R}, p) \stackrel{(1621)}{=} R(\mathcal{R}\vec{p}) \left(R^{-1}(\mathcal{R}\vec{p})\mathcal{R}R(\vec{p}) \right) R^{-1}(\vec{p}) = \mathcal{R}. \quad \text{Q.E.D. (1623)}$$

7.8.2 M=0 (Mala grupa, analiza male grupe i njene algebre, stanja)

i. Mala grupa

- Table 2 $\Rightarrow k = (1, 0, 0, 1)$.

□ Nalaženje elemenata male grupe

Elementi male grupe (vidi tabelu 2 i Eq. (1581)) zadovoljavaju

$$W_{\nu}^{\mu} k^{\nu} = k^{\mu}, \quad k = (1, 0, 0, 1). \quad (1624)$$

Djelovanjem na vremenoliki 4-vektor

$$t^{\mu} = (1, 0, 0, 0), \quad (1625)$$

Wignerovom rotacijom dobija se 4-vektor Wt koji zbog invarijantnosti na L.T. zadovoljava

$$(Wt)^{\mu}(Wt)_{\mu} = t^{\mu}t_{\mu} \stackrel{(1625)}{=} 1, \quad (1626)$$

$$(Wt)^{\mu}(Wk)_{\mu} = t^{\mu}k_{\mu} \stackrel{(1624,1625)}{=} 1. \quad (1627)$$

Pretpostavljajući najopćenitiji oblik Wt ,

$$Wt = (\xi, \alpha, \beta, \zeta), \quad (1628)$$

nalazimo ξ i ζ kao f-je α i β ,

$$\begin{aligned} (Wt)^\mu(Wk)_\mu &\stackrel{(1624)}{=} (Wt)^\mu(k)_\mu \stackrel{(1625,1628)}{=} \xi - \zeta = -1 \equiv \xi = 1 + \zeta, (1629) \\ (Wt)^\mu(Wt)_\mu &= (1 + \zeta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \zeta^2 = 1 \\ &\Rightarrow \zeta = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned} \quad (1630)$$

Stoga nam je poznat zadnji stupac matrice W^μ_ν ,

$$(W)(t) = \begin{pmatrix} 1 + \zeta & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta & \cdot & \cdot & \cdot \\ \zeta & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1631)$$

Tu "·" predstavljaju još neodređene matrice elemente. Treći stupac možemo naći rabeći relaciju (1624),

$$\begin{aligned} (W)(k) = (k) &\equiv \begin{pmatrix} 1 + \zeta & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta & \cdot & \cdot & \cdot \\ \zeta & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (W) = \begin{pmatrix} 1 + \zeta & \cdot & \cdot & -\zeta \\ \alpha & \cdot & \cdot & -\alpha \\ \beta & \cdot & \cdot & -\beta \\ \zeta & \cdot & \cdot & 1 - \zeta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1632)$$

Preostale neodređene retke ćemo preuzeti iz Weinberga i dati uputu kako se mogu provjeriti.

□ L.T. male grupe. Djelovanje W^μ_ν na t^ν je isto kao djelovanje transformacije

$$S^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 + \zeta & \alpha & \beta & -\zeta \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \zeta & \alpha & \beta & 1 - \zeta \end{pmatrix}. \quad (1633)$$

Provjerimo da li je S^μ_ν Lorentz transformacija. Da bi to bilo zadovoljeno moraju biti ispunjeni uvjeti (??)≡(1533) i (??)≡(1534)

$$(??) \equiv g_{\mu\nu} S^\mu_\rho S^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma} \equiv S^\mu_\rho (gSg)_\mu^{\bar{\rho}} = \delta_\rho^{\bar{\rho}} \equiv S^T \bar{S} = 1, \quad (1634)$$

$$(??) \equiv S^\nu_\sigma S^\kappa_\tau g^{\sigma\tau} = g^{\nu\kappa} \equiv (gSg)_{\bar{\kappa}}^\tau S^\kappa_\tau = \delta_{\bar{\kappa}}^\kappa \equiv \bar{S}^T S = 1, \quad (1635)$$

$$\bar{S} \equiv \{S_\alpha^\beta\} = \{(gSg)_\alpha^\beta\} = \begin{pmatrix} 1 + \zeta & -\alpha & -\beta & \zeta \\ -\alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ -\beta & 0 & 1 & -\beta \\ -\zeta & \alpha & \beta & 1 - \zeta \end{pmatrix}. \quad (1636)$$

Za DZ provjerite relacije (1634) i (1635).

□ veza W i $S \equiv S(\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} S(\alpha, \beta)t &= Wt \Rightarrow S^{-1}(\alpha, \beta)W = \mathcal{R} \in \{3D \text{ rot}\}; \\ S(\alpha, \beta)k &= Wk \Rightarrow S^{-1}(\alpha, \beta)W = R(\theta) \in \{\text{rot oko } \hat{z} \text{ osi}\}; \end{aligned} \quad (1637)$$

$$\Rightarrow R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1638)$$

□ Stoga je **opći grupni element male grupe**

$$W(\theta, \alpha, \beta) = S(\alpha, \beta)R(\theta). \quad (1639)$$

□ **Identifikacija male grupe : ISO(2)**

- $\{W(\theta, \alpha, \beta)\}$ ima dvije Abelove podgrupe, skup rotacija oko \hat{z} osi, $\{R(\theta)\}$, i skup transformacija $\{S(\alpha, \beta)\}$. Za DZ dokažite da vrijedi

$$R(\bar{\theta})R(\theta) = R(\bar{\theta} + \theta), \quad (1640)$$

$$S(\bar{\alpha}, \bar{\beta})S(\alpha, \beta) = S(\bar{\alpha} + \alpha, \bar{\beta} + \beta). \quad (1641)$$

- Nadalje, $\{S(\alpha, \beta)\}$ je invarijanta (normalna) podgrupa grupe $\{W(\theta, \alpha, \beta)\}$:

$$R(\theta)S(\alpha, \beta)R^{-1}(\theta) = S(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta, -\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta). \quad (1642)$$

[Dovoljno je provjeriti za rotacije jer je za svaki $S' \in \{S\}$ očigledno $S'SS'^{-1} \in \{S\}$]

DZ. Dokažite relaciju (1642).

• Struktura $\{W\}$ odgovara tzv. **ISO(2) grupi : sadrži rotacije $\{R(\theta)\}$ i translacije $\{S(\alpha, \beta)\}$ u 2D**

• Budući da mala grupa (ISO(2)) **sadrži Abelovu invarijantnu podgrupu**

\Rightarrow ISO(2) nije polu-jednostavna grupa (semisimple group)

ii. Algebra male grupe

□ Infinitesimalni element male grupe (x prostor)

$$[W(\theta, \alpha, \beta)^\mu_\nu]_{INF} = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \theta & -\alpha \\ \beta & -\theta & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \quad (1643)$$

$$\Rightarrow \omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ -\alpha & 0 & -\theta & \alpha \\ -\beta & \theta & 0 & \beta \\ 0 & -\alpha & -\beta & 0 \end{pmatrix}. \quad (1644)$$

(Usporedba W i PS : primjetiti da po komponentama vrijedi $\omega_{\mu\nu}^{PS} = -\omega_{\mu\nu}^W$ - zbog toga su raspisani $U(\Lambda)$ operatori identični jer su definirani sa suprotnim predznakom u eksponentu)

□ Pripadni op. u Hilb. prostoru:

$$\begin{aligned} U(W(\theta, \alpha, \beta)) &= 1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} = 1 + i\alpha(-J^{13} + J^{10}) + i\beta(-J^{23} + J^{20}) + i\theta J^{12} \\ &= 1 + i\alpha(J_2 + K_1) + i\beta(-J_1 + K_2) + i\theta J_3 \\ &= 1 + i\alpha A + i\beta B + i\theta J_3 \end{aligned} \quad (1645)$$

$$A = J_2 + K_1 \quad B = -J_1 + K_2. \quad (1646)$$

□ algebra male grupe :

(Podsjetnik : Lorentz algebra : (1558) $\equiv [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$,
(1559) $\equiv [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k$, (1560) $\equiv [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k, \dots$)

$$[J_3, A] = iB \quad D : i(-J_1 + K_2) = iB, \quad (1647)$$

$$[J_3, B] = -iA \quad D : i(-J_2 - K_1) = -iA, \quad (1648)$$

$$[A, B] = 0 \quad D : i(J_3 - J_3 + 0 + 0) = 0. \quad (1649)$$

iii. Stanja

Budući da u algebri male grupe postoje dva skupa komutirajućih operatora, $\{A, B\}$ i $\{J_3\}$, imamo dvije mogućnosti označavanja stanja (standardnog 4-impulsa) :

A. Označavanje kvantnim brojevima operatora A i B : $\Psi_{k\dots} \rightarrow \Psi_{kab}$

$$\begin{aligned} A\Psi_{kab} &= a\Psi_{kab}, \\ B\Psi_{kab} &= b\Psi_{kab}. \end{aligned} \quad (1650)$$

Problem : Ako je $a \neq 0$ ili $b \neq 0$ dobija se **kontinuum svojstvenih vrijednosti** koji se dobija zbog toga što transformacije $S(\alpha, \beta)$ čine invarijantnu (normalnu) podgrupu male grupe (vidi (1642)),

$$\begin{aligned} U(R(\theta))AU^{-1}(R(\theta)) &= \cos \theta A - \sin \theta B, \\ U(R(\theta))BU^{-1}(R(\theta)) &= \sin \theta A + \cos \theta B. \end{aligned} \quad (1651)$$

Rabeći argumente poglavlja §2.2 (vidi Eq. (1527)), iz generatora Abelovih podgrupa male grupe nalazimo **operatore Abelovih podgrupa za konačne α, β i θ**

$$U(S(\alpha, \beta)) \stackrel{(1527)}{=} \exp(i\alpha A + i\beta B), \quad (1652)$$

$$U(R(\theta)) \stackrel{(1527)}{=} \exp(iJ_3\theta) . \quad (1653)$$

D (1651):

$$\begin{aligned} U(S(\alpha c_\theta + \beta s_\theta, -\alpha s_\theta + \beta c_\theta)) &= U(R)U(S(\alpha, \beta))U^{-1}(R) \\ &= e^{i(\alpha U(R)AU^{-1}(R) + \beta U(R)BU^{-1}(R))} \\ &= e^{i(\alpha c_\theta + \beta s_\theta)A + i(-\alpha s_\theta + \beta c_\theta)B} = e^{i[\alpha(c_\theta A - s_\theta B) + \beta(s_\theta A + c_\theta B)]} \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Stoga za kontinuum stanja,

$$\Psi_{kab}^\theta \equiv U^{-1}(R(\theta))\Psi_{kab}, \quad (1654)$$

vrijedi

$$\begin{aligned} A\Psi_{kab}^\theta &= (a \cos \theta - b \sin \theta)\Psi_{kab}^\theta, \\ B\Psi_{kab}^\theta &= (a \sin \theta + b \cos \theta)\Psi_{kab}^\theta . \end{aligned} \quad (1655)$$

D: Npr. za $A\Psi_{kab}^\theta$

$$\begin{aligned} A\Psi_{kab}^\theta &= AU^{-1}(R(\theta))\Psi_{kab} \\ &= U^{-1}(R(\theta))(c_\theta A - s_\theta B)\Psi_{kab} = (c_\theta a - s_\theta b)\Psi_{kab}^\theta . \end{aligned}$$

Dakle, postoji kontinuum stanja Ψ_{kab}^θ sa kontinuiranim spektrom $(a \cos \theta - b \sin \theta, a \sin \theta + b \cos \theta)$. Q.E.D.

Exp: Eksperimentalno takav kontinuum nije opažen. Stoga označavanje stanja sa svojstvenim stanjima operatora A i B ne odgovara fizikalnoj situaciji.

B. Označavanje kvantnim brojevima operatora $J_3 : \Psi_{k\dots} \rightarrow \Psi_{k\sigma}$

Stavimo

$$\begin{aligned} A\Psi_{k\sigma} &= B\Psi_{k\sigma} = 0, \\ J_3\Psi_{k\sigma} &= \sigma\Psi_{k\sigma} . \end{aligned} \quad (1656)$$

Pitanje koje se nameće jest što je fizikalno značenje sv. vrijednosti σ . Budući da je smjer 3-impulsa \hat{k} 4-impulsa k po definiciji jednak pozitivnom smjeru z -osi, \hat{z} , vrijedi

$$J_3 = \hat{z}\vec{J} = \hat{k}\vec{J}, \quad (1657)$$

tj. J_3 odgovara projekciji operatora kutne količine gibanja na smjer gibanja, odnosno **operatoru heliciteta**. Stoga je σ helicitet stanja i nije treća komponenta spina stanja.

iv. Račun svojstava općeg $M = 0$ stanja pri L.T.

□ Djelovanje općeg elementa male grupe, danog sa (1639), na stanje "standardnog" impulsa $\Psi_{k\sigma}$

$$U(W)\Psi_{k\sigma} \stackrel{(1639),(1652),(1653)}{=} \exp(i\alpha A + i\beta B) \exp(iJ_3\theta)\Psi_{k\sigma} = \exp(i\theta\sigma)\Psi_{k\sigma} \quad (1658)$$

daje Wignerovu rotaciju za $M = 0$ stanje,

$$D_{\sigma'\sigma}(W) \stackrel{(1582)}{=} \exp(i\theta\sigma)\delta_{\sigma'\sigma} . \quad (1659)$$

□ Uz normalizaciju (1607), djelovanje opće L.T. na opće stanje $\Psi_{p\sigma}$ za $M = 0$ glasi

$$U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} \stackrel{(1584)}{=} \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))\Psi_{\Lambda p\sigma} \\ \stackrel{(1584,1659)}{=} \exp(i\sigma\theta(\Lambda, p))\Psi_{\Lambda p, \sigma}, \quad (1660)$$

gdje je kut $\theta(\Lambda, p)$ definiran relacijom

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \stackrel{(1639)}{\equiv} S(\alpha(\Lambda, p), \beta(\Lambda, p))R(\theta(\Lambda, p)) . \quad (1661)$$

Napomena: U Weinbergu drugi redak (1660) glasi $\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma\theta(\Lambda, p))\Psi_{\Lambda p, \sigma}$, dakle $\frac{N(p)}{N(\Lambda p)} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}$.

v. Diskretnost sv. vrijednosti σ

Diskretnost σ ne proizlazi iz komutacijskih relacija algebre male grupe kao za $M > 0$ slučaj. Dosadašnja analiza pokazuje da je σ realno. Diskretnost σ slijedi iz topoloških razmatranja Lorentzove grupe. Pokazuje se da je ona dvostruko povezana s obzirom na rotacijsku podgrupu, a jednostruko s obzirom na ostale transformacije. Odatle slijedi da rotacija za 4π uvijek daje isto stanje, pa σ u Wignerovoj rotaciji (1659) mora biti polucjelobrojan.

vi. Definicija standardne Lorentzove transformacije za $M = 0$ stanja, račun elementa male grupe

□ Kao i kod $M > 0$ stanja za nalaženje općeg elementa male grupe $W(\Lambda, p)$ potreban je

izraz za standardnu Lorentzovu transformaciju (uočiti razliku stand. L.T. $M > 0$ (1618) i $M = 0$ (1662) stanja)

$$L(p) \equiv R(\hat{p})B(|\vec{p}|/\kappa) \quad (1662)$$

gdje je $B(u)$ boost u \hat{z} smjeru, a $R(\vec{p})$ rotacija koja preslikava \hat{z} u \hat{p} ,

$$B(u) = \begin{pmatrix} (u^2 + 1)/2u & 0 & 0 & (u^2 - 1)/2u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (u^2 - 1)/2u & 0 & 0 & (u^2 + 1)/2u \end{pmatrix}. \quad (1663)$$

D:

* standardni boost bezmasene čestice $B(u)$:

$$\begin{aligned} p^0 &= \gamma k^0 + \beta \gamma k = (\cosh \omega + \sinh \omega)k = e^\omega k = uk, \\ p &= p_0 \\ \Rightarrow \cosh \omega &= \frac{1}{2}(u + \frac{1}{u}), \quad \sinh \omega = \frac{1}{2}(u - \frac{1}{u}). \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

* rotacija $R(\hat{p})$:

- Pretpostavimo da je \hat{p} zadan polarnim i azimutalnim kutovima ϕ i θ

$$\hat{p} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (1664)$$

Rotacija se tada može opisati sa dvama uzastopnim rotacijama, rotacijom oko \hat{y} osi $R(\theta)$: $(0, 0, 1) \rightarrow (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ i rotacijom oko \hat{z} osi $R(\phi)$: $(\sin \theta, 0, \cos \theta) \rightarrow \hat{p}$:

$$U(R(\hat{p})) = \exp(i\phi J_3) \exp(i\theta J_2), \quad (1665)$$

gdje su $0 \leq \theta \leq \pi$ i $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Rotacija nije dana u x tj. p prostoru već u Hilbertovom prostoru jer u Hilbertovom prostoru dodavanjem 2π kutu ϕ $U(R(\hat{p}))$ mijenja predznak dok je u p prostoru jednoznačna.

vii. Helicitet je invarijantan na svojstvene ortokrone Lorentz transformacije

* Iz izraza za element male grupe za opću ortokronu svojstvenu L.T.,

$$(1659) \equiv D_{\sigma'\sigma}(W) = \exp(i\theta\sigma)\delta_{\sigma'\sigma} \propto \delta_{\sigma'\sigma}, \quad (1666)$$

slijedi da je helicitet invarijantan na opću ortokronu svojstvenu L.T. To na prvi pogled znači da bezmasene čestice imaju samo jednu vrijednost heliciteta.

* Paritet međutim mijenja predznak heliciteta. Stoga bezmasene čestice nemaju jednu moguću već imaju dvije moguće vrijednosti heliciteta. Za razliku, masivne čestice imaju

$(2j + 1)$ sv. vrijednosti operatora J_3 .

* Naziv čestica i sačuvanje pariteta:

- jake sile i EM sile čuvaju paritet, pa je paritet dobar QB : oba stanja imaju isto ime (samo je u opisu stanja i helicitet : Npr. $\gamma_{k\pm 1}$)
- slabe sile ne čuvaju paritet; paritet nije dobar QB; stanja suprotnog heliciteta istih aditivnih QB suprotnih heliciteta ne postoje (npr. $\nu_{k-\frac{1}{2}}$ i $\bar{\nu}_{k\frac{1}{2}}$ nemaju isti leptonski broj L); stanja nemaju stoga ni isto ime).

7.9 Dodatak 9 Kvantna Mehanika

(Uzeto iz Weinberg I)

- ista kvantna mehanika kao u NR fizici : kao u Diracovoj knjizi

(i) **FIZIKALNA STANJA** reprezentirana su **zrakama u Hilbertovim prostoru**

- **Hilbertov prostor** = Banachov unitarni vektorski prostor

- **Banachov prostor** = normiran i potpun vektorski prostor

- **kompleksni vektorski prostor** V , $(V, +, \cdot, \mathbb{C})$ = aditivna grupa u kojoj je definirano množenje sa skalarima iz \mathbb{C} :

$$\Phi, \Psi \in V \Rightarrow \xi\Phi + \eta\Psi \in V . \quad (1667)$$

- **unitarni VP** : postoji skalarno množenje vektora (\cdot, \cdot) , $\Phi, \Psi, \dots \in H$; $\xi, \eta, \dots \in \mathbb{C}$ takvo da

$$(\Phi, \Psi) = (\Psi, \Phi)^*, \quad (1668)$$

$$(\Phi, \xi_1\Psi_1 + \xi_2\Psi_2) = \xi_1(\Phi, \Psi_1) + \xi_2(\Phi, \Psi_2), \quad (1669)$$

$$(\eta_1\Phi_1 + \eta_2\Phi_2, \Psi) = \eta_1^*(\Phi_1, \Psi) + \eta_2^*(\Phi_2, \Psi) . \quad (1670)$$

- **normiranost** : postoji norma $||$ (ovdje je $|\Psi|^2 = (\Psi, \Psi)$),

$$|\Psi| \geq 0, \quad (1671)$$

$$|\Psi| = 0 \Leftrightarrow \Psi = 0, \quad (1672)$$

$$|\lambda\Psi| = |\lambda||\Psi|, \quad (1673)$$

$$|\Psi + \Phi| \leq |\Psi| + |\Phi| . \quad (1674)$$

- **potpunost** : svaki Cauchijev niz $\{\Phi_n\}$ konvergira u Hilbertovom prostoru :

$$\{\Phi_n\} : \forall \varepsilon \exists n(\varepsilon), \forall p, q > n(\varepsilon), |\Phi_p - \Phi_q| < \varepsilon . \quad (1675)$$

- **zraka** = skup normaliziranih vektora iz H , $(\Psi, \Psi) = 1$ koji se razlikuju do na fazu:

$$\Psi, \Psi' \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \Psi' = \xi\Psi \quad \text{i} \quad |\xi| = 1 . \quad (1676)$$

(ii) **OBSERVABLE** su reprezentirane **hermitskim operatorima** sa svojstvima

$$A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad (\text{preslikava prostor u samog sebe}), \quad (1677)$$

$$A(\xi\Psi + \eta\Phi) = \xi A\Psi + \eta A\Phi \quad (\text{linearan je}), \quad (1678)$$

$$A = A^\dagger \quad (\text{zadovoljava uvjet realnosti}). \quad (1679)$$

gdje je A^\dagger adjungirani operator operatora A ,

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) = (A\Phi, \Psi) = (\Psi, A\Phi)^* . \quad (1680)$$

Svojstveni vektor (stanje) i svojstvena vrijednost operatora A

$$A\Psi = \alpha\Psi \quad . \quad (1681)$$

- dokažimo TM da je α je realno:

$$\left. \begin{aligned} L &\equiv (\Psi, A\Psi) = (A^\dagger\Psi, \Psi) = (A\Psi, \Psi) \equiv D \\ L &= (\Psi, \alpha\Psi) = \alpha \\ D &= (\alpha\Psi, \Psi) = \alpha^* \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = \alpha^* \quad \text{Q.E.D} \quad (1682)$$

(iii) Ako je sistem u stanju \mathcal{R} i exp. se provodi tako da se mjeri da li je u jednom od stanja $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \dots$, onda je vjerojatnost nalaženja u stanju \mathcal{R}_n

$$P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = |(\Psi, \Psi_n)|^2, \quad (1683)$$

gdje je $\Psi \in \mathcal{R}$ a $\Psi_n \in \mathcal{R}_n$. Ako $\{\Psi_n\}$ čini potpun skup ($\sum_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| = 1$), onda je

$$\sum_n P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = 1 . \quad (1684)$$

D: $\sum_n |(\Psi, \Psi_n)|^2 = \sum_n \langle\Psi|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|\Psi\rangle = \langle\Psi|\Psi\rangle = 1$. Q.E.D.

7.10 Dodatak 10 : Slobodna polja a lá Weinberg

(Uzeto iz Weinberg I)

• Uvod u ovaj dodatak

U ovom dodatku će biti iznesene osnovne pretpostavke izgradnje kvantiziranih polja iz kvantne mehanike (QM) uz pretpostavku Lorentzove invarijantnosti. To je Wignerov pristup teoriji polja. Polja se izgrađuju iz operatora stvaranja i poništenja, koja odgovaraju QM stanjima u Hilbertovom prostoru određenog 4-impulsa i spina. 4-impuls i spin su definirani operatorima Poincarove algebre P^μ i J_3 . U tom se pristupu spin operatora stvaranja i poništenja koji grade polja određuje iz transformacijskih svojstava polja kojima se pojedino polje definira. To se ostvaruje putem jednadžbi koje povezuju Lorentzove reprezentacije polja i operatora stvaranja i poništenja (1723, 1724, 1725, 1726). Te jednadžbe su bile motivacija za pisanje ovog dodatka.

Taj pristup je različit od pristupa u Peskin-Schroederovoj knjizi, u kojem se polazi od klasičnih polja koja se zatim kvantiziraju. Spin operatora stvaranja i poništenja se u Peskin-Schroederovom pristupu određuje preko sačuvane Noetherove struje koja odgovara operatoru treće komponente kutne količine gibanja J_3 (vidi npr. (??)).

Za razumjevanje ovog dodatka trebete prihvatiti dvije činjenice.

Prva je da iz zahtjeva Lorentz invarijantnosti za sustav u međudjelovanju slijede uvjeti na S -operator kojim se opisuju međudjelovanja u raspršenjima. S operator mora komutirati sa svim generatorima Poincareove algebre. Iz uvjeta komutativnosti sa generatorima boosta slijedi vrlo jaki uvjet na Hamiltonijan međudjelovanja V . Taj je uvjet ispunjen ako se Hamiltonijan može prikazati preko gustoće Hamiltonijana (vidi (1685)) i ako gustoće Hamiltonijana komutiraju za prostornolike intervale (vidi (1687)).

Druga je da iz zahtjeva nezavisnosti vrlo udaljenih eksperimenata, iz kojega slijedi da se S matrica može prikazati kao produkt S matrica za pojedine udaljene eksperimente (to je tzv. princip dekompozicije nakupina). Hamiltonijan međudjelovanja se uvijek može prikazati preko operatora stvaranja i poništenja (postoji teorem po kojem se svaki operator može prikazati preko operatora stvaranja i poništenja). Iz principa dekompozicije nakupina slijedi da je najopćenitiji oblik Hamiltonijana dan sa (1688) gdje funkcija h_{NM} sadrži jednu i samo jednu $\delta^{(3)}$ funkciju u impulsima (vidi (1689)).

Za bolje razumjevanje gradiva u podpoglavlju 2.6 ove skripte dovoljno je pročitati sljedeće dijelove ovog dodatka

- Podsjetnik svojstava S -matrice
- Rješenje problema : POLJA
- Nalaženje koeficijentnih funkcija $u_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$, $v_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$ (posebno \square Rotacije)
- Ispunjavanje dodatnog uvjeta Lorentz invarijantnosti (1687)
- Razlog postojanja antičestica kod nabijenih polja

· O jednadžbama gibanja za polja

• **Podsjetnik svojstava S -matrice:**

1. Uvjeti Lorentz invarijantnost S -matrice

S matrica je Lorentz invarijantna ako se Hamiltonijan međudjelovanja može napisati kao integral gustoće Hamiltonijana međudjelovanja koji je Lorentzov skalar,

$$V(t) = \int d^3x \mathcal{H}(\vec{x}, t), \quad (1685)$$

$$U_0(\Lambda, a) \mathcal{H}(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) = \mathcal{H}(\Lambda x + a), \quad (1686)$$

i koja zadovoljava dodatni uvjet

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0 \quad \text{za } (x - x')^2 < 0. \quad (1687)$$

2. Princip dekompozicije nakupina (CDP)

Hamiltonijan međudjelovanja (i slobodni Hamiltonijan) se kao i svaki operator može prikazati preko operatora stvaranja i poništenja,

$$V = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \int dq'_1 \dots dq'_N dq_1 \dots dq_M a^\dagger(q'_1) \dots a^\dagger(q'_N) a(q_M) \dots a(q_1) h_{NM}(q'_1 \dots q'_N, q_1 \dots q_M). \quad (1688)$$

Međutim S matrica zadovoljava dodatni uvjet, princip dekompozicije nakupina (vidi Weinberg I, pogl. 4.4), iz kojeg proizlazi da koeficijentne funkcije Hamiltonijana h_{NM} imaju jednu i samo jednu δ^3 -funkciju,

$$\begin{aligned} & h_{NM}(\vec{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \dots \vec{p}'_N \sigma'_N n'_N, \vec{p}_1 \sigma_1 n_1 \dots \vec{p}_M \sigma_M n_M) \\ &= \delta(\vec{p}'_1 + \dots \vec{p}'_N - \vec{p}_1 - \dots - \vec{p}_M) \\ &\times \tilde{h}_{NM}(\vec{p}'_1 \sigma'_1 n'_1 \dots \vec{p}'_N \sigma'_N n'_N, \vec{p}_1 \sigma_1 n_1 \dots \vec{p}_M \sigma_M n_M). \end{aligned} \quad (1689)$$

□ **Problem :**

Transformacijska svojstva operatora stvaranja i poništenja su komplicirana (PS-W),

$$(503) \equiv U_0(\Lambda, a) a^\dagger(p\sigma n) U_0^{-1}(\Lambda, a) = e^{i(\Lambda p)a} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p)) a^\dagger_{\Lambda p \bar{\sigma} n}, \quad (1690)$$

pa na prvi pogled izgleda da nije moguće zadovoljiti istovremeno raspis Hamiltonijana međudjelovanja preko operatora stvaranja i poništenja i Lorentz invarijantnost S matrice.

- Napomena : u daljnjem razmatranju će Lorentzove transformacije Λ uključivati svojstvene ortokrone L.T ili će još dodatno uključivati paritetnu simetriju.

• Rješenje problema : POLJA

* Lorentz transformacija polja

- Problem se rješava tako da se gustoća Hamiltonijana $\mathcal{H}(x)$ izgrađuje od polja - polja poništanja (čestica) $\psi_\ell^+(x)$ i polja stvaranja (čestica) $\psi_\ell^-(x)$,

$$\psi_\ell^+(x) = \sum_{\sigma n} \int d^3p u_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n) a(\vec{p}, \sigma, n), \quad (1691)$$

$$\psi_\ell^-(x) = \sum_{\sigma n} \int d^3p v_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n) a^\dagger(\vec{p}, \sigma, n), \quad (1692)$$

sa koeficijentima $u_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$ i $v_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$ odabranim tako da se pri Lorentzovim transformacijama polja množe sa x -neovisnim matricama,

$$U_0(\Lambda, a) \psi_\ell^+(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) = \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(\Lambda^{-1}) \psi_{\bar{\ell}}^+(\Lambda x + a), \quad (1693)$$

$$U_0(\Lambda, a) \psi_\ell^-(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) = \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(\Lambda^{-1}) \psi_{\bar{\ell}}^-(\Lambda x + a), \quad (1694)$$

(stavili smo jednake D^\pm matrice za ψ_ℓ^+ i ψ_ℓ^- polja jer se može se pokazati da se uvijek mogu odabrati polja tako da su te matrice jednake).

* Svojstva D matrica

- D matrice tvore reprezentaciju homogene Lorentzove grupe

D:

Rabeći izraz za produkt dvaju Poincaréovih transformacija (vidi Tab 1.),

$$U(\Lambda', a') U(\Lambda, a) = U(\Lambda' \Lambda, \Lambda' a + a'), \quad (1695)$$

i transformacijska svojstva polja (1693) i (1694) nalazimo

$$\begin{aligned} U(\Lambda', a') U(\Lambda, a) : \psi_\ell^\pm(x) &\rightarrow \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(\Lambda^{-1}) D_{\bar{\ell}\bar{\ell}}(\Lambda'^{-1}) \psi_{\bar{\ell}}^\pm(\Lambda' \Lambda x + \Lambda' a + a') \\ &\stackrel{(1695)}{\rightarrow} \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}((\Lambda' \Lambda)^{-1}) \psi_{\bar{\ell}}^\pm(\Lambda' \Lambda x + \Lambda' a + a') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{\bar{\ell}} D_{\bar{\ell}\bar{\ell}}(\Lambda^{-1})D_{\bar{\ell}\bar{\ell}}(\Lambda'^{-1}) &= D_{\bar{\ell}\bar{\ell}}(\Lambda^{-1}\Lambda'^{-1}) \\ \Rightarrow D(\Lambda_1\Lambda_2) &= D(\Lambda_1)D(\Lambda_2) \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned} \quad (1696)$$

- Moguće ireducibilne reprezentacije $D(\Lambda)$ (homogene Lorentzove grupe) : skalarna $D(\Lambda) = 1$, vektorska $D(\Lambda)^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\nu$, te razne tenzorske i spinorne reprezentacije (vidi poslije).
- Razmatranja u ovom poglavlju vrijede i za reducibilne reprezentacije homogene Lorentzove grupe.
- **Napomena :** uočiti da polja čine reprezentacije **Lorentzove grupe** a ne Poincaréove grupe.

• Lorentz invarijantna gustoća Hamiltonijana

- Opći oblik gustoće Hamiltonijana izgrađena preko polja je

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{MN} \sum_{\ell'_1 \dots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \dots \ell_M} g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M} \psi_{\ell'_1}^-(x) \dots \psi_{\ell'_N}^-(x) \psi_{\ell_1}^+(x) \dots \psi_{\ell_M}^+(x), \quad (1697)$$

gdje su $g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M}$ konstantni koeficijenti.

- Uvjet skalarnosti gustoće Hamiltonijana (1686) daje dodatni uvjet na koeficijente $g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M}$,

$$\begin{aligned} g_{\bar{\ell}'_1 \dots \bar{\ell}'_N, \bar{\ell}_1 \dots \bar{\ell}_M} &= \sum_{\ell'_1 \dots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \dots \ell_M} D_{\ell'_1 \bar{\ell}'_1}(\Lambda^{-1}) \dots D_{\ell'_N \bar{\ell}'_N}(\Lambda^{-1}) \\ &\quad \times D_{\ell_1 \bar{\ell}_1}(\Lambda^{-1}) \dots D_{\ell_M \bar{\ell}_M}(\Lambda^{-1}) g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M}. \end{aligned} \quad (1698)$$

D:

$$\begin{aligned} L &\equiv \mathcal{H}(\Lambda x + a) \stackrel{(1686)}{=} U_0(\Lambda, a) \mathcal{H}(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) = D \\ L &= \sum_{MN} \sum_{\bar{\ell}'_1 \dots \bar{\ell}'_N} \sum_{\bar{\ell}_1 \dots \bar{\ell}_M} \\ &\quad g_{\bar{\ell}'_1 \dots \bar{\ell}'_N, \bar{\ell}_1 \dots \bar{\ell}_M} \\ &\quad \psi_{\bar{\ell}'_1}^-(\Lambda x + a) \dots \psi_{\bar{\ell}'_N}^-(\Lambda x + a) \psi_{\bar{\ell}_1}^+(\Lambda x + a) \dots \psi_{\bar{\ell}_M}^+(\Lambda x + a) \end{aligned} \quad (1699)$$

$$\begin{aligned} D &= \sum_{MN} \sum_{\ell'_1 \dots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \dots \ell_M} \sum_{\bar{\ell}'_1 \dots \bar{\ell}'_N} \sum_{\bar{\ell}_1 \dots \bar{\ell}_M} \\ &\quad D_{\ell'_1 \bar{\ell}'_1}(\Lambda^{-1}) \dots D_{\ell'_N \bar{\ell}'_N}(\Lambda^{-1}) D_{\ell_1 \bar{\ell}_1}(\Lambda^{-1}) \dots D_{\ell_M \bar{\ell}_M}(\Lambda^{-1}) g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M} \\ &\quad \psi_{\bar{\ell}'_1}^-(\Lambda x + a) \dots \psi_{\bar{\ell}'_N}^-(\Lambda x + a) \psi_{\bar{\ell}_1}^+(\Lambda x + a) \dots \psi_{\bar{\ell}_M}^+(\Lambda x + a) \end{aligned} \quad (1700)$$

$$(1686, 1699, 1700) \Rightarrow (1698) \quad \text{Q.E.D.} \quad (1701)$$

S uvjetom (1698) koeficijenti $g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M}$ postaju CG koeficijenti za Lorentzovu grupu.

• **Nalaženje koeficijentnih funkcija** $u_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$, $v_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$ **za** $M > 0$

□ **Opće Poincaréove transformacije**

(Napomena : koeficijenti za $M = 0$ bit će nađeni u poglavlju §5.9.)

* Transformacija operatora stvaranja i poništenja

- Unitarnost reprezentacija Wignerovih rotacija $D^{(j)}(W)$ i jednakosti $D^{(j)}(W^{-1}) = D^{(j)^{-1}}(W)$ daje

$$D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)}(W) = (D^{(j)^{-1}})_{\bar{\sigma}\sigma}(W^{-1}) = (D^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma}^\dagger(W^{-1}) = D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j)*}(W^{-1}). \quad (1702)$$

- Uporabom (1702) i L. transf. operatora stvaranja (1690) nalazimo

$$U_0(\Lambda, a) a^\dagger(\vec{p}\sigma n) U_0^{-1}(\Lambda, a) = e^{i(\Lambda p)a} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)*}(W^{-1}(\Lambda, p)) a^\dagger(\vec{p}_\Lambda \bar{\sigma} n), \quad (1703)$$

$$U_0(\Lambda, a) a(\vec{p}\sigma n) U_0^{-1}(\Lambda, a) = e^{-i(\Lambda p)a} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p)) a(\vec{p}_\Lambda \bar{\sigma} n) \quad (1704)$$

- L. transf. $a(p\sigma n)$ dobijena je hermitskom konjugacijom (1703) ($D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j_n)*}(W^{-1}(\Lambda, p))$ su brojevi). j_n je spin čestice n .

- Zbog Einsteinove relacije između energije i impulsa a i a^\dagger operatori ovise samo o prostornim komponentama 4-impulsa, \vec{p} odnosno \vec{p}_Λ , $\Lambda p = (\vec{p}_\Lambda, \Lambda_\mu^0 p^\mu)$.

* Nalaženje koeficijenata $u_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$, $v_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$ iz L. transf. polja

$$L \equiv U_0(\Lambda, a) \psi_\ell^\pm(x) U_0^{-1}(\Lambda, a) \stackrel{(1693, 1694)}{=} \sum_{\bar{\ell}} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda^{-1}) \psi_{\bar{\ell}}^\pm(\Lambda x + a) \equiv R; \quad (1705)$$

$$\begin{aligned} L &\stackrel{\pm}{=} \int \frac{d^3 p_\Lambda p^0}{(\Lambda p)^0} \sum_{\sigma n} \left[u_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n) e^{-i\Lambda p \cdot a} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p)) a(\vec{p}_\Lambda \bar{\sigma} n) \right] \\ &\stackrel{\pm}{=} \int \frac{d^3 p_\Lambda p^0}{(\Lambda p)^0} \sum_{\sigma n} \left[v_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n) e^{i\Lambda p \cdot a} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)*}(W^{-1}(\Lambda, p)) a^\dagger(\vec{p}_\Lambda \bar{\sigma} n) \right], \quad (1706) \end{aligned}$$

$$R \stackrel{\pm}{=} \sum_{\bar{\ell}} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda^{-1}) \int d^3 p_\Lambda \sum_{\bar{\sigma} n} u_{\bar{\ell}}(\Lambda x + a, \vec{p}_\Lambda, \bar{\sigma}, n) a(\vec{p}_\Lambda \bar{\sigma} n)$$

$$\equiv \sum_{\bar{\ell}} D_{\bar{\ell}\bar{\ell}}(\Lambda^{-1}) \int d^3 p_{\Lambda} \sum_{\bar{\sigma}n} v_{\bar{\ell}}(\Lambda x + a, \vec{p}_{\Lambda}, \bar{\sigma}, n) a^{\dagger}(\vec{p}_{\Lambda} \bar{\sigma} n) . \quad (1707)$$

U izrazu za L smo rabili jednakost $d^3 p = d^3 p_{\Lambda} (p^0 / (\Lambda p)^0)$. U izrazu za R rabili smo nijemost integracija i zamijenili $\vec{p} \rightarrow \vec{p}_{\Lambda}$ i $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$. Usporedbom izraza za L i R dobijamo

$$\begin{aligned} & e^{-i\Lambda p \cdot a} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\sigma} u_{\ell}(x; \vec{p}, \sigma, n) D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W^{-1}(\Lambda, p)) \\ & \stackrel{\pm}{=} \sum_{\bar{\ell}} D_{\bar{\ell}\bar{\ell}}(\Lambda^{-1}) u_{\bar{\ell}}(\Lambda x + a, \vec{p}_{\Lambda}, \bar{\sigma}, n), \end{aligned} \quad (1708)$$

$$\begin{aligned} & e^{i\Lambda p \cdot a} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\sigma} v_{\ell}(x; \vec{p}, \sigma, n) D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)*}(W^{-1}(\Lambda, p)) \\ & \equiv \sum_{\bar{\ell}} D_{\bar{\ell}\bar{\ell}}(\Lambda^{-1}) v_{\bar{\ell}}(\Lambda x + a, \vec{p}_{\Lambda}, \bar{\sigma}, n), \end{aligned} \quad (1709)$$

odnosno množeći sa inverznim matricama $D^{(j_n)}(W(\Lambda, p))$ ($D^{(j_n)*}(W(\Lambda, p))$) i $D(\Lambda)$ dobija se zgodniji oblik jednadžbe iz kojeg, kao što ćemo pokazati se mogu naći koeficijentne funkcije $u_{\ell}(x; \vec{p}, \sigma, n)$ i $v_{\ell}(x; \vec{p}, \sigma, n)$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{\ell}}(\Lambda x + a, \vec{p}_{\Lambda}, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) \\ & \stackrel{\pm}{=} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda) e^{-i\Lambda p \cdot a} u_{\ell}(x; \vec{p}, \sigma, n), \end{aligned} \quad (1710)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{\ell}}(\Lambda x + a, \vec{p}_{\Lambda}, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)*}(W(\Lambda, p)) \\ & \equiv \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda) e^{i\Lambda p \cdot a} v_{\ell}(x; \vec{p}, \sigma, n) . \end{aligned} \quad (1711)$$

□ Translacije

Struktura koeficijentnih funkcija $u_{\ell}(x; \vec{p}, \sigma, n)$ i $v_{\ell}(x; \vec{p}, \sigma, n)$ se određuje u par koraka. Pogledajmo prvo slučaj translacija, $\Lambda = 1$, a po volji ($\Rightarrow W(\Lambda, p) = 1$, $D(\Lambda) = 1$, $D^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) = 1$),

$$u_{\ell}(x + a; \vec{p}, \sigma, n) \stackrel{(1710)}{=} e^{-ip \cdot a} u_{\ell}(x; \vec{p}, \sigma, n), \quad (1712)$$

$$v_{\ell}(x + a; \vec{p}, \sigma, n) \stackrel{(1711)}{=} e^{ip \cdot a} v_{\ell}(x; \vec{p}, \sigma, n) . \quad (1713)$$

Rješenja jednadžbi (1712) i (1713)

$$u_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n) = e^{-ip \cdot x} u_\ell(0; \vec{p}, \sigma, n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{-ip \cdot x} u_\ell(\vec{p}, \sigma, n), \quad (1714)$$

$$v_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n) = e^{ip \cdot x} v_\ell(0; \vec{p}, \sigma, n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{ip \cdot x} v_\ell(\vec{p}, \sigma, n), \quad (1715)$$

eliminiraju x ovisnost iz koeficijentnih funkcija $u_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$ i $v_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$. Faktor $1/\sqrt{(2\pi)^3}$ je konvencija. Uvrštavanjem (1712) i (1713) u izraze za polja (1691) i (1692) slijedi

$$\psi_\ell^+(x) \stackrel{(1691,1712)}{=} \sum_{\sigma n} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-ip \cdot x} u_\ell(\vec{p}, \sigma, n) a(\vec{p}, \sigma, n), \quad (1716)$$

$$\psi_\ell^-(x) \stackrel{(1692,1713)}{=} \sum_{\sigma n} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{ip \cdot x} v_\ell(\vec{p}, \sigma, n) a^\dagger(\vec{p}, \sigma, n). \quad (1717)$$

Uvrštavanjem (1712) i (1713) u opće uvjete (1710) i (1711) dobivaju se uvjeti za koeficijentne funkcije $u_\ell(\vec{p}, \sigma, n)$ i $v_\ell(\vec{p}, \sigma, n)$,

$$\sum_{\vec{\sigma}} u_{\vec{\ell}}(\vec{p}_\Lambda, \vec{\sigma}, n) D_{\vec{\sigma}\vec{\sigma}}^{(jn)}(W(\Lambda, p)) \stackrel{(1710,1714)}{=} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\ell} D_{\vec{\ell}\ell}(\Lambda) u_\ell(\vec{p}, \sigma, n), \quad (1718)$$

$$\sum_{\vec{\sigma}} v_{\vec{\ell}}(\vec{p}_\Lambda, \vec{\sigma}, n) D_{\vec{\sigma}\vec{\sigma}}^{(jn)*}(W(\Lambda, p)) \stackrel{(1711,1715)}{=} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\ell} D_{\vec{\ell}\ell}(\Lambda) v_\ell(\vec{p}, \sigma, n). \quad (1719)$$

□ Boostovi

Pogledajmo zatim slučaj kada je u jednadžbama (1718) i (1719) $\vec{p} = 0$ i $\Lambda = L(q)$ standardni boost. Tada je $p = (\vec{0}, m)$, $L(p) = 1$, $q = L(q)p$,

$$W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p) = L(q)^{-1} L(q) = 1. \quad (1720)$$

Stoga

$$u_{\vec{\ell}}(\vec{q}, \sigma, n) = \left(\frac{m}{q^0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell} D_{\vec{\ell}\ell}(L(q)) u_\ell(0, \sigma, n), \quad (1721)$$

$$v_{\vec{\ell}}(\vec{q}, \sigma, n) = \left(\frac{m}{q^0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell} D_{\vec{\ell}\ell}(L(q)) v_\ell(0, \sigma, n). \quad (1722)$$

Drugim riječima, ako poznamo funkcije $u_\ell(0, \sigma, n)$ i $v_\ell(0, \sigma, n)$ za impuls nula, tada znamo funkcije $u_{\vec{\ell}}(\vec{q}, \sigma, n)$ i $v_{\vec{\ell}}(\vec{q}, \sigma, n)$ za svaki \vec{p} (izrazi za $D_{\vec{\ell}\ell}(L(q))$ bit će izračunati za

skalarno, vektorsko i spinorno polje. Za opće polje dano je u poglavlju §5.7 Weinbergove knjige).

□ Rotacije

Pogledajmo sada slučaj $\vec{p} = 0$ uz homogenu Lorentzovu transformaciju jednaku čisto rotaciji $\Lambda = R$. Tada je $p = \Lambda p = (\vec{0}, m)$ $L(p) = L(\Lambda p) = 1$, $W(\Lambda, p) = R$, i jednačbe (1718) i (1719) glase

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{\ell}}(0, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)}(R) = \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(R) u_{\ell}(0, \sigma, n), \quad (1723)$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{\ell}}(0, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)*}(R) = \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(R) v_{\ell}(0, \sigma, n). \quad (1724)$$

Ekvivalentno,

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{\ell}}(0, \bar{\sigma}, n) \vec{J}_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)} = \sum_{\ell} \vec{J}_{\bar{\ell}\ell} u_{\ell}(0, \sigma, n), \quad (1725)$$

$$- \sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{\ell}}(0, \bar{\sigma}, n) \vec{J}_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(j_n)*} = \sum_{\ell} \vec{J}_{\bar{\ell}\ell} v_{\ell}(0, \sigma, n), \quad (1726)$$

gdje su $\vec{J}^{(j_n)}$ i \vec{J} generatori kutne količine gibanja u reprezentacijama rotacija $D^{(j_n)}(R)$ i $D(R)$ (rotacije operatora stvaranja odnosno rotacije polja).

- jedinstvenost rastava na rotacijske irrep:

jednačbe (1723) i (1724) pokazuju da kada se reprezentacija $D(\Lambda)$ ograniči na rotacije $D(R)$ sadrži ireducibilnu spinsku reprezentaciju $D^{(j_n)}$. Može se pokazati da svaka irrep homogene Lorentzove grupe sadrži bilo koju irrep rotacijske grupe najviše jednom, tako ako se polja $\psi_{\bar{\ell}}^{\pm}(x)$ transformiraju ireducibilno, ona su jedinstvena do na skalu.

- Koeficijentne funkcije $u_{\bar{\ell}}(\vec{p}, \sigma, n)$ i $v_{\bar{\ell}}(\vec{p}, \sigma, n)$ iz jednačbi (1721) i (1722) i koeficijentne funkcije $u_{\bar{\ell}}(\vec{0}, \sigma, n)$ i $v_{\bar{\ell}}(\vec{0}, \sigma, n)$ iz jednačbi (1723) i (1724) zadovoljavaju opće uvjete (1718) i (1719):

D:

Dokaz ćemo napraviti za u_{ℓ} funkciju

$$\begin{aligned} (1718)_R &\equiv \left(\frac{p^0}{(\Lambda p)^0} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\bar{\ell}} D_{\bar{\ell}\bar{\ell}}(\Lambda) u_{\bar{\ell}}(\vec{p}, \sigma, n) \\ &\stackrel{(1721)}{=} \left(\frac{p^0}{(\Lambda p)^0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{p^0} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\bar{\ell}\ell} D_{\bar{\ell}\bar{\ell}}(\Lambda) D_{\bar{\ell}\ell}(L(p)) u_{\ell}(0, \sigma, n) \\ &= \left(\frac{m}{(\Lambda p)^0} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda L(p)) u_{\ell}(0, \sigma, n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{m}{(\Lambda p)^0} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell} (D(L(\Lambda p))D(W(\Lambda, p)))_{\bar{\ell}\ell} u_{\ell}(0, \sigma, n) \\
&\stackrel{(1723)}{=} \left(\frac{m}{(\Lambda p)^0} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell_1} D(L(\Lambda p))_{\bar{\ell}\ell_1} \times \sum_{\bar{\sigma}} u_{\ell_1}(0, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) \\
&\stackrel{(1721)}{=} \sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{\ell}}(\Lambda p, \bar{\sigma}, n) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) \equiv (1718)_L \quad \text{Q.E.D.} \quad (1727)
\end{aligned}$$

• **Hamiltonijan izražen preko polja i princip dekompozicije nakupina**

Provjerimo da li Hamiltonijan čija gustoća je izražen preko polja (1697) zadovoljava uvjete principa dekompozicije nakupina (1688), (1689):

$$\begin{aligned}
V &= V(0) = \int d^3x \mathcal{H}(\vec{x}, 0) \\
&\stackrel{(1697)}{=} \int d^3x \sum_{MN} \sum_{\ell'_1 \dots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \dots \ell_M} g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M} \psi_{\ell'_1}^{-}(\vec{x}, 0) \dots \psi_{\ell'_N}^{-}(\vec{x}, 0) \psi_{\ell_1}^{+}(\vec{x}, 0) \dots \psi_{\ell_M}^{+}(\vec{x}, 0) \\
&\stackrel{(1691, 1692)}{=} \sum_{MN} \int d^3p'_1 \dots d^3p'_N d^3p_1 \dots d^3p_M \sum_{\sigma'_1 n'_1} \dots \sum_{\sigma'_N n'_N} \sum_{\sigma_1 n_1} \dots \sum_{\sigma_M n_M} \\
&\quad a^{\dagger}(p'_1 \sigma'_1 n'_1) \dots a^{\dagger}(p'_N \sigma'_N n'_N) a(p_1 \sigma_1 n_1) \dots a(p_M \sigma_M n_M) \\
&\quad \times \delta^3(\vec{p}'_1 + \dots + \vec{p}'_N - \vec{p}_1 - \dots - \vec{p}_M) \\
&\quad \times (2\pi)^{3 - \frac{3}{2}(N+M)} \sum_{\ell'_1 \dots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \dots \ell_M} g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M} \\
&\quad v_{\ell'_1}(\vec{p}'_1 \sigma'_1 n'_1) \dots v_{\ell'_N}(\vec{p}'_N \sigma'_N n'_N) u_{\ell_1}(\vec{p}_1 \sigma_1 n_1) \dots u_{\ell_M}(\vec{p}_M \sigma_M n_M) \quad (1728)
\end{aligned}$$

gdje

$$\begin{aligned}
u_{\ell}(\vec{p}\sigma n) &= \sqrt{\frac{m_n}{p^0}} \sum_{\ell'} D_{\ell\ell'}(L(\vec{p})) u_{\ell'}(0\sigma n), \\
v_{\ell}(\vec{p}\sigma n) &= \sqrt{\frac{m_n}{p^0}} \sum_{\ell'} D_{\ell\ell'}(L(\vec{p})) v_{\ell'}(0\sigma n). \quad (1729)
\end{aligned}$$

Ako označimo δ^3 -funkciju i sve iza nje sa \mathcal{V}_{NM} a sve iza δ^3 -funkcije sa $\tilde{\mathcal{V}}_{NM}$ vidimo da $V \equiv V(t=0)$ ima traženu strukturu (1688) i (1689) sa koeficijentima $h_{NM} = \mathcal{V}_{NM}$ i $\tilde{h}_{NM} = \tilde{\mathcal{V}}_{NM}$ gdje $\tilde{\mathcal{V}}_{NM}$ nemaju δ -funkcijske singularitete i jedini singulariteti su od rezova funkcija $1/\sqrt{p^0}$ koje se javljaju u normama koeficijentnih funkcija $u_{\ell}(\vec{p}\sigma n)$ i $v_{\ell}(\vec{p}\sigma n)$.

• **Ispunjavanje dodatnog uvjeta Lorentz invarijantnosti (1687)**

- Do sada smo za gustoću Hamiltonijana izraženu preko polja (1697) ispunili princip dekompozicija nakupina (1688,1689) a od uvjeta za Lorentz kovarijantnost S matrice ispunili uvjet skalarnosti gustoće Hamiltonijana (1686,1698). Preostalo je još ispuniti uvjet komutativnosti gustoće Hamiltonijana u prostorno udaljenim prostorno-vremenskim točkama (1687),

$$(1687) \equiv [\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0 \quad \text{za } (x - x')^2 < 0 .$$

* **Problem :**

- Taj uvjet nije moguće ispuniti za bilo kakvu kombinaciju polja poništenja i polja stvaranja budući da komutator/antikomutator polja poništenja (1716) i pripadnog polja stvaranja (1717) nije jednak nuli,

$$[\psi_\ell^+(x), \psi_{\bar{\ell}}^-(y)]_{\mp} = (2\pi)^{-3} \sum_{\sigma n} \int d^3 p u_\ell(\vec{p}\sigma n) v_{\bar{\ell}}(\vec{p}\sigma n) e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (1730)$$

(komutator (antikomutator) se javlja ako su čestice koje se poništavaju odnosno stvaraju operatorima poništenja ψ_ℓ^+ polja odnosno operatorima stvaranja $\psi_{\bar{\ell}}^-$ polja bozoni (fermioni)).

- Zbog hermitičnosti Hamiltonijana problem se ne može riješiti izgradnjom gustoće Hamiltonijana samo od polja poništenja odnosno samo od polja stvaranja.

* **Rješenje problema:**

- Jedini način rješavanja problema je izgradnja gustoće Hamiltonijana od **linearnih kombinacija polja poništenja i stvaranja**,

$$\psi_\ell(x) = \kappa_\ell \psi_\ell^+(x) + \lambda_\ell \psi_\ell^-(x), \quad (1731)$$

sa koeficijentima odabranim tako da je za prostornoliki $x - y$ ispunjen uvjet

$$[\psi_\ell(x), \psi_{\ell'}(y)]_{\mp} = [\psi_\ell(x), \psi_{\ell'}^\dagger(y)]_{\mp} = 0 . \quad (1732)$$

Ispunjavanje uvjeta (1732) poljima (1731) opisano je za polja koja tvore ireducibilne L. reprezentacije u nadolazećim poglavljima.

- **Nejednoznačnost:** Uvjeti (1732) fiksiraju samo jednu od dvije konstante. Druga ostaje neodređena. Time "skala" polja $\psi(x)$ ostaje neodređena.

- **Kauzalnost:** Povijesno se uvjeti (1732) povezuju sa kauzalnošću. Naime, ako je $x - y$ prostornolik onda po spec. teor. rel. signal poslan iz x ne može stići u y . Međutim, takva logika vrijedi za polja koja se mogu mjeriti, kao što je EM polje, ali ne za npr. spinorno polje koje nije samo za sebe observabilno.

Uvjet (1732) je zapravo posljedica **dodatnog uvjeta Lorentz invarijantnosti** teorije (1687) a ne zahtjeva kauzalnosti.

• Razlog postojanja antičestica kod nabijenih polja

* Ako polja (1731) sadrže operatore stvaranja i poništenja s **nabojem** (npr. električni naboj) javlja se dodatni problem. Neka je Q operator naboja. Ako je naboj čestica tipa n ima vrijednost $q(n)$ tada je

$$[Q, a(\vec{p}\sigma n)] = -q(n)a(\vec{p}\sigma n), \quad (1733)$$

$$[Q, a^\dagger(\vec{p}\sigma n)] = q(n)a^\dagger(\vec{p}\sigma n), \quad (1734)$$

D:

Q je aditivni operator (vidi Weinberg I). Nadalje svaki tip čestice nosi svoj naboj $q(n)$. Stoga

$$Q = \sum_n Q(n) = \sum_n q(n) \sum_\sigma \int d^3p a^\dagger(\vec{p}\sigma n) a(\vec{p}\sigma n). \quad (1735)$$

Uporabom identiteta

$$[AB, C]_- = [A, C]_- B + A[B, C]_-, \quad (1736)$$

$$[AB, C]_+ = -[A, C]_+ B + A[B, C]_+, \quad (1737)$$

i (anti)komutacijskih relacija za operatore stvaranja i poništenja (463) dobijamo

$$\begin{aligned} [Q, a(\vec{p}\sigma n)] &= [Q(n), a(\vec{p}\sigma n)] = -q(n)a(\vec{p}\sigma n), \\ [Q, a^\dagger(\vec{p}\sigma n)] &= [Q(n), a^\dagger(\vec{p}\sigma n)] = q(n)a^\dagger(\vec{p}\sigma n). \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

- Problem je da Hamiltonijan međudjelovanja V , dakle i gustoća Hamiltonijana $\mathcal{H}(x)$ mora komutirati sa generatorima svih internih simetrija, dakle i sa Q . Da bi to bilo ostvareno komutator Q s poljima $\psi_\ell(x)$ mora biti jednostavan,

$$[Q, \psi_\ell(x)] = -q_\ell \psi_\ell(x), \quad (1738)$$

tj. dijelovi tog polja ne smiju imati različite naboje. Tada je komutativnost $\mathcal{H}(x)$ s Q moguće ostvariti izgrađujući $\mathcal{H}(x)$ od produkta polja $\psi_{\ell_1}(x)\psi_{\ell_2}(x)\dots$ i hermitski pridruženih polja $\psi_{m_1}^\dagger(x)\psi_{m_2}^\dagger(x)\dots$ čiji je ukupni naboj jednak nuli,

$$q_{\ell_1} + q_{\ell_m} + \dots - q_{m_1} - q_{m_2} - \dots = 0. \quad (1739)$$

- Problem se rješava tako da se polje $\psi_\ell(x)$ izgrađuje od operatora stvaranja ($a^\dagger(\vec{p}\sigma\bar{n})$) i poništenja ($a(\vec{p}\sigma n)$) istog naboja, $-q(n) = q(\bar{n}) = -q_\ell$,

$$[Q, a(\vec{p}\sigma n)] = -q(n)a(\vec{p}\sigma n), \quad [Q, a^\dagger(\vec{p}\sigma\bar{n})] = q(\bar{n})a^\dagger(\vec{p}\sigma\bar{n}). \quad (1740)$$

Pri tome se polje poništanja $\psi_\ell^-(x)$ izgrađuje od $a(\vec{p}\sigma n)$ operatora, a polje stvaranja $\psi_\ell^+(x)$ od $a^\dagger(\vec{p}\sigma\bar{n})$ operatora. Sačuvanje naboja stoga implicira za svaku nabijenu česticu

$(a^\dagger(\vec{p}\sigma n))$ postojanje čestice suprotnih sačuvanih naboja $(a^\dagger(\vec{p}\sigma\bar{n}))$, tj. njenu **antičesticu**. Drugim riječima **sačuvanje naboja** implicira **postojanje antičestica u teoriji polja**.

• O jednadžbama gibanja za polja

- Polja (1716) i (1717) su konstruirana uz pretpostavku principa dekompozicija nakupina i Lorentz invarijantnosti. Cjelokupna x -zavisnost polja (1716) i (1717) je u Fourierovim funkcijama $e^{\mp ip \cdot x}$, pa zbog toga zadovoljavaju slobodnu Klein-Gordanovu jednadžbu,

$$(-\square - m_\ell^2)\psi_\ell^\pm(x) = 0. \quad (1741)$$

- Neka od polja (1716) i (1717) mogu zadovoljavati i dodatne jednadžbe, koje se javljaju ukoliko polje ima više komponenti nego stupnjeva slobode (npr. Diracovo polje ima 4 "spinske" komponente i 2 nezavisna "spinska" stupnja slobode).

- U standardnim udžbenicima se kreće od tih jednadžbi gibanja za polja, ili iz gustoće Lagrangijana iz koje se izvode jednadžbe gibanja. Polja se razvijaju po Fourierovim komponentama, u Fourierovim komponentama polja se identificiraju operatori stvaranja i poništenja, i preko operatora stvaranja se definiraju fizikalna stanja. U Weinbergovom pristupu polazi se od stanja, preko njih se definiraju operatori stvaranja i poništenja, od njih se konstruiraju polja uz zahtjev Lorentzove invarijantnosti i principa dekompozicije nakupina, a jednadžbe gibanja su posljedice tako konstruiranih polja - tj. uvjeta ugrađenih u polja kroz njihovu konstrukciju.

• O normalnom uređenju i dodatnom uvjetu Lorentz invarijantnosti

Prema teoremu dokazanom u poglavlju §4.4 princip dekompozicije nakupina je zadovoljen ako gustoća Hamiltonijana $\mathcal{H}(x)$ ima oblik (1688) uz uvjet (1689). Taj uvjet je ispunjen gustoćom Hamiltonijana (1697),

$$\begin{aligned} (1697) \quad \equiv \quad \mathcal{H}(x) &= \sum_{MN} \sum_{\ell'_1 \dots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \dots \ell_M} g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M} \psi_{\ell'_1}^-(x) \dots \psi_{\ell'_N}^-(x) \psi_{\ell_1}^+(x) \dots \psi_{\ell_M}^+(x) \\ &\equiv \mathcal{H}(\{\psi_{\ell'_i}^-(x)\}, \{\psi_{\ell_i}^+(x)\}). \end{aligned} \quad (1742)$$

S druge strane dodatni uvjet Lorentzove invarijantnosti zahtjeva $\mathcal{H}(x)$ koji je funkcija polja (1731),

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &= \sum_{MN} \sum_{\ell'_1 \dots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \dots \ell_M} \bar{g}_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M} \psi_{\ell'_1}(x) \dots \psi_{\ell'_N}(x) \psi_{\ell_1}^\dagger(x) \dots \psi_{\ell_M}^\dagger(x) \\ &\equiv \mathcal{H}(\{\psi_{\ell'_i}(x)\}, \{\psi_{\ell_i}^\dagger(x)\}). \end{aligned} \quad (1743)$$

Usporedba (1742) i (1743) ukazuje da je ispravan oblik $\mathcal{H}(x)$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x) &= \sum_{MN} \sum_{\ell'_1 \dots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \dots \ell_M} g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M} : \psi_{\ell'_1}(x) \dots \psi_{\ell'_N}(x) \psi_{\ell_1}^\dagger(x) \dots \psi_{\ell_M}^\dagger(x) : \\ &\equiv : \mathcal{H}(\{\psi_{\ell'_i}(x)\}, \{\psi_{\ell_i}^\dagger(x)\}) :\end{aligned}\quad (1744)$$

gdje ":: \cdot " označava normalno uređenje, operaciju koja operatore stvaranja (polja stvaranja) stavlja slijeva operatorima poništavanja (poljima poništavanja). Pri tome se komutatori operatora stvaranja i poništavanja zanemaruju a predznaci koji se javljaju pri zamjeni fermionskih polja zadržavaju. Npr. za dva polja

$$\begin{aligned}: \psi_{\ell_1}(x) \psi_{\ell_2}(x) : &= : (\kappa_{\ell_1} \psi_{\ell_1}^+(x) + \lambda_{\ell_1} \psi_{\ell_1}^-(x)) (\kappa_{\ell_2} \psi_{\ell_2}^+(x) + \lambda_{\ell_2} \psi_{\ell_2}^-(x)) : \\ &= \kappa_{\ell_1} \kappa_{\ell_2} \psi_{\ell_1}^+(x) \psi_{\ell_2}^+(x) \pm \kappa_{\ell_1} \lambda_{\ell_2} \psi_{\ell_2}^-(x) \psi_{\ell_1}^+(x) \\ &+ \lambda_{\ell_1} \kappa_{\ell_2} \psi_{\ell_1}^-(x) \psi_{\ell_2}^+(x) + \lambda_{\ell_1} \lambda_{\ell_2} \psi_{\ell_1}^-(x) \psi_{\ell_2}^-(x) \\ &= (\kappa_{\ell_1} \psi_{\ell_1}^+(x) + \lambda_{\ell_1} \psi_{\ell_1}^-(x)) (\kappa_{\ell_2} \psi_{\ell_2}^+(x) + \lambda_{\ell_2} \psi_{\ell_2}^-(x)) \\ &- \kappa_{\ell_1} \lambda_{\ell_2} [\psi_{\ell_1}^+(x), \psi_{\ell_2}^-(x)]_{\mp} \\ &= \psi_{\ell_1}(x) \psi_{\ell_2}(x) - \kappa_{\ell_1} \lambda_{\ell_2} [\psi_{\ell_1}^+(x), \psi_{\ell_2}^-(x)]_{\mp} .\end{aligned}\quad (1745)$$

Primjer sa dva polja ilustrira da se normalno uređeni produkt polja uvijek može prikazati kao suma običnih produkta polja,

$$\begin{aligned}: \psi_{\ell'_1}(x) \dots \psi_{\ell_1}(x) \dots : &= \underbrace{\psi_{\ell'_1}(x) \dots \psi_{\ell_1}(x) \dots}_{2N \text{ polja}} + A_{ij}^1 \underbrace{\psi_{\ell'_1}(x) \dots \psi_{\ell_1}(x) \dots}_{2N-2 \text{ polja (bez ij)}} \\ &\dots + A^N \cdot 1 .\end{aligned}\quad (1746)$$

Time je osiguran i oblik gustoće Hamiltonijana (1742) (zbog normalnog uređenja (1744)) i Lorentz invarijantnost (zbog toga što polja (1731) komutiraju za prostornolike intervale i relacije (1746)).

• Određivanje spina nekih polja

□ Skalarno polje ($m \neq 0$)

- Lorentzova transformacija (ona definira polje)

$$D(\Lambda) = 1, \quad (1747)$$

Ograničenje te transformacije na rotacije, $\{D(R)\}$, je skalarna reprezentacija rotacijske grupe sa $\vec{\mathcal{J}} = 0$, tako da je jedino rješenje jednadžbi (1725,1726) $j = 0$.

D:

$$\begin{aligned}D(R(\vec{\theta})) &= e^{i\vec{\mathcal{J}}\vec{\theta}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{J}} = 0 \\ &\stackrel{(1725),(1726)}{\Rightarrow} \sum_{\vec{\sigma}} u(0\vec{\sigma}) \vec{\mathcal{J}}_{\vec{\sigma}\vec{\sigma}}^{(j)} = 0, \quad \sum_{\vec{\sigma}} v(0\vec{\sigma}) \vec{\mathcal{J}}_{\vec{\sigma}\vec{\sigma}}^{(j)*} = 0, \\ &\Rightarrow (\vec{\mathcal{J}}^{(j)})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad j = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma, \bar{\sigma} = 0\end{aligned}\quad (1748)$$

- Koeficijentne funkcije $u(\vec{p})$, $v(\vec{p})$ su obične c-funkcije jer nemaju niti jednog Lorentzovog indeksa.

□ **Realno vektorsko polje** ($m \neq 0$)

- Lorentzova transformacija polja

$$D(\Lambda)^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu. \quad (1749)$$

- Koeficijentne funkcije $u^\mu(\vec{p}, \sigma)$, $v^\mu(\vec{p}, \sigma)$ imaju stoga jedan tenzorski Lorentzov indeks.

- "Rotacijski" uvjeti za $u^\nu(0, \sigma)$ i $v^\nu(0, \sigma)$

Uvjeti koji slijede iz rotacijske invarijantnosti, (1725,1726), glase

$$\sum_{\bar{\sigma}} u^\mu(0, \bar{\sigma}) \bar{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)} = \vec{J}^\mu{}_\nu u^\nu(0, \sigma), \quad (1750)$$

$$- \sum_{\bar{\sigma}} v^\mu(0, \bar{\sigma}) \bar{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)*} = \vec{J}^\mu{}_\nu v^\nu(0, \sigma). \quad (1751)$$

Rabeći tenzorsku reprezentaciju Lorentzovih generatora (270) nalazimo za generatore rotacije

$$\begin{aligned} \vec{J} &\equiv (\mathcal{J}^{23}, \mathcal{J}^{31}, \mathcal{J}^{12}) \equiv \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mathcal{J}^{jk} \right\} \equiv (\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3) \\ &= \left(-i \left(\begin{array}{c|ccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{array} \right), -i \left(\begin{array}{c|ccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{array} \right), -i \left(\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) \right) \\ &= \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -i \{ \varepsilon_{ij} \}_k \end{array} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1752)$$

odnosno po komponentama,

$$(\mathcal{J}_k)^0{}_0 = (\mathcal{J}_k)^0{}_i = (\mathcal{J}_k)^i{}_0 = 0, \quad (1753)$$

$$(\mathcal{J}_k)^i{}_j = -i \varepsilon_{ijk}. \quad (1754)$$

- Iz jednadžbi (1752), (1753) i (1754) slijedi izraz za $\{(\vec{J}^2)^\mu{}_\nu\}$,

$$\vec{J}^2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2 \end{array} \right), \quad (1755)$$

odnosno po komponentama

$$(\vec{\mathcal{J}}^2)_0^0 = (\vec{\mathcal{J}}^2)_j^0 = (\vec{\mathcal{J}}^2)_0^i = 0, \quad (1756)$$

$$(\vec{\mathcal{J}}^2)_j^i = 2\delta_j^i. \quad (1757)$$

- Iz (1756) i (1757) upotrebom (1750) i (1751) slijedi

$$\sum_{\bar{\sigma}} u^0(0, \bar{\sigma})(J^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 0, \quad (1758)$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} v^0(0, \bar{\sigma})(J^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 0, \quad (1759)$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} u^i(0, \bar{\sigma})(J^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 2u^i(0, \sigma), \quad (1760)$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} v^i(0, \bar{\sigma})(J^{(j)})_{\bar{\sigma}\sigma}^2 = 2v^i(0, \sigma). \quad (1761)$$

što pokazuje da 0-ta i i -te komponente koeficijentnih funkcija za $\vec{p} = 0$, $u^i(0, \sigma)$ i $v^i(0, \sigma)$ imaju spin $j = 0$ odnosno $j = 1$. Stoga vektorsko polje ima komponente spina $j = 0$ i spina $j = 1$.

- Koeficijentne funkcije konačnog impulsa dobijaju se boostiranjem koeficijentnih funkcija impulsa nula, $u^\mu(0, \sigma)$ i $v^\mu(0, \sigma)$.