- Radit ćemo po Weinbergovoj knjizi:
S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Cambridge University Press, 1995.

- Polazna točka Weinbergove knjige je Wignerov prikaz čestica kao reprezentacija nehomogene Lorentzove algebre.
- Budući da su standardne knjige, za razliku od Weinbergove, pisane povijesno, dat ćemo prvo kratak povijesni prikaz teorije polja do 1949 godine.

∗ Jedinice

U Weinbergovoj knjizi i većini knjiga iz teorije polja upotrebljava se Heaviside-Lorentz sustav jedinica i prirodni sustav jedinica.
Veza izmedu Gausovih (CGS) i Heaviside-Lorentz (HL) sustava jedinica dan je u sljedećoj tabeli:

	α	e	$\mathcal{H}$	$j \cdot A$
Heaviside-Lorentz	$\frac{e_{HL}^2}{4\pi\hbar c}$	e_{HL}	$\frac{1}{2}(\vec{E}_{HL}^2 + \vec{B}_{HL}^2)$	$j_{HL} \cdot A_{HL}$
Gaussian (CGS)	$\frac{e_{CGS}^2}{\hbar c}$	e_{CGS}	$\frac{1}{8\pi}(\vec{E}_{CGS}^2 + \vec{B}_{CGS}^2)$	$j_{CGS} \cdot A_{CGS}$

Iz gornje tabele se dobivaju sljedeće relacija veličina u HL i CGS sustavu jedinica,

$$\begin{aligned} e_{HL} &= \sqrt{4\pi} e_{CGS} \\ \vec{E}_{HL} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \vec{E}_{CGS}, \qquad \vec{B}_{HL} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \vec{B}_{CGS}, \qquad A_{HL} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} A_{CGS}, \\ j_{HL} &= \sqrt{4\pi} j_{CGS} \end{aligned} \tag{1}$$

Prirodni sustav jedinica se dobija stavljajući $\hbar = c = 1$.

$*$ Notacija:

- Naboj elektrona = $-e$, $\quad e^2/4\pi(\hbar c) \;=\; e^2/4\pi \;=\; 1/137$
- Metrika : $\quad \eta_{\mu\nu} \;=\; diag(1,1,1,-1), \qquad x^\mu \;=\; (x,y,z,ct)$
- d'Alemberijan : $\quad \Box \;=\; \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} \;=\; \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$
- $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$: $\quad \varepsilon^{0123} \;=\; +1$
- $\theta(s) \;=\; \begin{cases} +1, & s>0 \\ 0, & s<0 \end{cases}$
- Matrične transformacije : A (matrica), A^* (c.c.), A^T (transp.), $A^\dagger$ (h.c.)
- gamma matrice :

$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu \;=\; 2\eta_{\mu\nu}$ (Grasmanova algebra)

$\gamma_5 \;=\; i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$

$\beta \;=\; i\gamma_0$

- Diracova valna funkcija (DVF): $\quad u$
- Diracov konjugat DVF : $\quad \overline{u} \;=\; u^\dagger\beta$

1 Uvod: razvoj QM i TP do 1949

1.1 Relativistička kvantna mehanika

QM odnosno valna mehanika započela je kao relativistička valna mehanika - inspirirana spec. teori. relativnosti (Einstein 1905).

1.1.1 de Broglie 1923

-opis čestica ravnim valom

$$\exp[i\ 2\pi(\vec{\kappa}\vec{x} - \nu t)]\ . \tag{2}$$

ν - frekvencija ($\omega = 2\pi\nu$ kružna frekvencija); $2\pi\vec{\kappa} = \vec{k}$ - valni vektor.

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \text{zahtjev Lorentz invarijantnosti faze} \\ \cdot\ \text{Einsteinova relacija } E = h\nu \end{array}\right\} \qquad \vec{\kappa} = \frac{\vec{p}}{h}, \qquad \nu = \frac{E}{h}\ . \tag{3}$$

$*$ upotreba : u atomima : zatvorena orbita ima $n \in \mathbb{N}$ valnih duljina $\lambda = 1/|\kappa|$
$\Rightarrow$ reproducirao Bohr-Sommerfeldove uvjete kvantizacije.

Iza de Broglie-ovog otkrića slijedio je razvoj **matrične valne mehanike (Heisenberg, Born, Jordan, Pauli)** ali nju nećemo ovdje raspravljati.

1.1.2 Schrödinger : Schrödingerova jednadžba i KG jednadžba

$*$ Schrödinger je prvo našao KGJ pa onda SJ, ali je nije bio odmah objavio a u medjuvremenu su KGJ "otkrili" Klein i Gordon.
$*$ izvod :
- polazi se od jednadžbe za klasični elektron u vanjskom EM polju

$$0 \;=\; (E + e\phi)^2 - c^2(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A})^2 - m^2c^4\ ; \tag{4}$$

- pretpostavlja se de Broglieova interpretacija materije iz koje proizlaze QM zamjene :

$$\text{čestica} \;\sim\; e^{2\pi i(\vec{\kappa}\vec{x} - \nu t)} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{lcl} \vec{p} \;=\; h\vec{\kappa} & \to & -i\hbar\nabla \\ E \;=\; h\nu & \to & i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \end{array}\right. \ ; \tag{5}$$

- zamjenom ravnog vala, koji odgovara slobodnoj čestici, sa općom funkcijom prostora i vremena dobija se **relativistička Schrödingerova ili KG jednadžba**

$$0 \;=\; [(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi)^2 - c^2(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\vec{A})^2 - m^2c^4]\psi(\vec{x}, t)\ . \tag{6}$$

$*$ Rješenja jednadžbe (6) za stacionarna ($\psi(\vec{x},t) \ = \ \psi(\vec{x})e^{-iEt/\hbar}$) vezana stanja vodikovog atoma ($\vec{A} \ = \ 0$, $\phi \ = \ e/4\pi r$),

$$E \ = \ mc^2\Big[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4}\Big(\frac{n}{\ell + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\Big)\Big], \qquad 0 \le \ell \le n-1 \ . \tag{7}$$

$*$ problem trećeg člana : neslaganje sa eksperimentom :

$$n \ = \ 2 \qquad E_{2p} - E_{2s} \ = \ \begin{cases} \alpha^4 mc^2/12 & \text{(rel. Sch. jedn.)} \\ \alpha^4 mc^2/32 & \text{(exp.; Sommerfeld)} \end{cases} \ . \tag{8}$$

Drugi član dobro opisuje spektar H atoma
$\Rightarrow$ Schrodinger razvija NR Sch. jednadžbu koja daje samo drugi član.

$*$ Usporedba sa izrazom za energiju vezanog stanja u Sommerfeldovoj teoriji (stara QM teorija) koja je davala dobar opis QM nivoa:

$$E \ = \ mc^2\Big[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4}\Big(\frac{n}{\kappa} - \frac{3}{4}\Big)\Big], \qquad 1 \le \kappa \le n \ . \tag{9}$$

$*$ rješenje : uključenje spina (Schrödinger ga je naslućivao)

- Spin otkrili Uhlenbeck i Goudsmit 1925:
Pretpostavili su postojanje intristične kutne količine gibanja $\hbar/2$ da bi objasnili anomalni Zeemanov rascjep. Da bi opisali eksperimentalne podatke morali su pretpostaviti da je magnetski moment spinske kutne količine gibanja dva puta veći nego klasični magnetski moment orbitalne kutne količine gibanja

$$\mu_s \ = \ \frac{e\hbar}{2mc} \ = \ \frac{e}{mc}\frac{\hbar}{2} \qquad \Big[\mu_L \ = \ \frac{e}{2mc}\hbar\vec{L}\Big] \tag{10}$$

- Uključenjem spina (Heisenberg, Jordan, Darwin 1927) i efekata spina ($\vec{L}\vec{S}$ vezanja) i relativističkih korekcija tih efekata (Thomas : Thomasova precesija 1926) za energiju se dobio izraz koji je reproducirao ispravno i exp. ($E_{2s_{1/2}} - E_{2p_{3/2}} \ = \ \alpha^4 mc^2/32$) i anomalni Zeemanov efekt (multiplicitet stanja je ispravan),

$$\begin{aligned} E \ &= \ mc^2\Big[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4}\Big(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\Big) + \ldots\Big], \\ j \ &= \ \ell \oplus \frac{1}{2} \ = \ \ell \pm \frac{1}{2}, \quad 0 \le \ell \le \ n-1. \end{aligned} \tag{11}$$

1.1.3 Diracova jednadžba

□ Problem negativnih vjerojatnosti

· Schrödingerova jednadžba
(pretpostavljamo Coulombovo baždarenje : $\nabla\vec{A} = 0$)

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi &= \Big(-e\phi - \frac{-\hbar\nabla + e\vec{A}/c}{2m}\Big)\psi && (12)\\
&\Rightarrow \psi^*(12) - (12)^*\psi \\
&\equiv \frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 - \frac{i\hbar}{2m}\nabla\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) = 0 \\
&\equiv \frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\vec{j} = 0 && (13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \text{Born : gustoća vjerojatnosti : } \rho = |\psi|^2, \\
&\qquad \psi \text{ : amplituda vjerojatnosti .} && (14)
\end{aligned}
$$

· KGJ :

$$
\text{KGJ} \equiv (6) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\vec{j} = 0, \qquad
\begin{aligned}
&\rho = \psi^*\Big(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial t} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t} - \frac{2ie\phi}{\hbar}\Big), \psi \\
&\vec{j} = \psi^*\Big(\overrightarrow{\nabla} - \overleftarrow{\nabla} + \frac{2ie\vec{A}}{\hbar}\Big) .\psi
\end{aligned} \qquad (15)
$$

· Problem : ρ_{KGJ} nije pozitivno definitna; to je posjedica drugog reda KGJ u parcijanoj derivaciji po vremenu.

$*$ Diracovo RJEŠENJE :
Jednadžba mora biti linearna u $\frac{\partial}{\partial t}$. Zbog Lorentz invarijantnosti i ∇ se mora javljati linearno u jednadžbi. Bez prisutnosti vanjskog polja jednadžba glasi (Diracova jednadžba za slobodnu česticu),

$$
i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi \equiv (-i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\nabla + \alpha_4 mc^2)\psi . \qquad (16)
$$

Jednadžba (16) definira i Hamiltonijan Diracove jednadžbe,

$$
\mathcal{H} = (-i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\nabla + \alpha_4 mc^2) . \qquad (17)
$$

• Zahtjev : Jednadžba (16) mora reproducirati slobodnu KGJ jer je ona operatorska preslika Einsteinove relacije $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$. Iteracija (16) daje

$$
-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \mathcal{H}^2\psi \overset{\text{zahtjev}}{\equiv} \left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2\hbar^2\nabla^2 - m^2c^4\right)\psi = 0 . \qquad (18)
$$

Izjednačivanjem članova uz iste derivacije slijedi

$$\begin{aligned}
\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 2\delta_{ij}, \\
\alpha_i \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_i &= 0, \\
\alpha_4^2 &= 1 \; .
\end{aligned} \tag{19}$$

$\Rightarrow$ 1. α_i i α_4 su matrice, ψ je jednostupčana matrica;
2. sv. vrij. α_i i α_4 su ± 1;
3. $Tr\alpha_i \;=\; Tr\alpha_4 \;=\; 0$
$\Rightarrow$ dimenzija α_i i α_4 je parna, $d = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje (4D) (Dirac) jednadžbi (19) je

$$\alpha_i \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_4 \;=\; \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \; . \tag{20}$$

□ Zahtjev Lorentz invarijantnosti :
· Množenjem (16) sa α_4 dobija se formalno Lorentz invarijantan oblik Diracove jednadžbe,

$$0 \;=\; \left[\hbar c \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + mc^2\right]\psi, \tag{21}$$

$$\vec{\gamma} \;\equiv\; -i\alpha_4 \vec{\alpha}, \qquad \gamma^0 \;=\; -i\alpha_4 \; . \tag{22}$$

· Matrice γ^μ zadovoljavaju jednadžbu (Cliffordova algebra),

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu \;=\; 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1} \; . \tag{23}$$

koja je invarijantna na Lorentzovu transformaciju γ^μ matrica u smislu da i $\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ takodjer zadovoljava jednadžbu (23). Iz toga slijedi da su pri transformaciji $\gamma^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ sačuvane invarijante tih matrica, odakle slijedi da su γ^μ i $\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$ vezane transformacijom sličnosti,

$$\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \;=\; S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) \; . \tag{24}$$

· Iz (24) slijedi da je jednadžba (23) invarijantna na istovremenu L.T. koordinata, $x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ i transformaciju i transformaciju valne funkcije $\psi(x) \to S(\Lambda)\psi(x)$.

□ Diracova jednadžba u vanjskom EM polju

· Uvodjenjem EM polja u DJ, koje odgovara tj. opisuje se tzv. minimalnom supstitucijom

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \;\to\; i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi, \qquad -i\hbar\nabla \;\to\; -i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\vec{A}, \tag{25}$$

(usporedi npr. KGJ za česticu u EM polju i slobodnu česticu : ((6) i desnu stranu (19))), dobija se jednadžba

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)\psi \;=\; \left(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\vec{A}\right)\vec{\alpha}\psi + mc^2\alpha_4\psi \; . \tag{26}$$

· Iteracijom jednadžbe dobija se jednadžba koja se od KGJ u EM potencijalu razlikuje za dva člana,

$$
\begin{aligned}
(6)_L &= (6)_R + [-e\hbar c\vec{\sigma}\vec{B} - ie\hbar c\vec{\alpha}\vec{E}]\psi, && (27)\\
\vec{\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .\cdot\vec{\alpha} && (28)
\end{aligned}
$$

· U NR Sch. jednadžbi prvi član odgovara medjudjelovanju $\vec{\mu}{\cdot}\vec{B}$ gdje je $|\vec{\mu}| = (e/mc)(\hbar/2)$ $\Rightarrow$ **DJ automatski reproducira giromagnetski faktor** 2 koji su Uhlenbeck i Goudsmit morali rukom staviti u jednadžbe da bi objasnili exp. rezultate za anomalni Zeemanov efekt.

· DJ za vodikov atom, $\phi = -e/4\pi r$, $\vec{A} = 0$
Dirac je naslućivao a Darwin pokazali da DJ za $\phi = -e/4\pi r$, $\vec{A} = 0$ daje ispravno rascjep fine strukture. Točan izraz za energiju i njegov razvoj do α^4 člana po α je

$$
\begin{aligned}
E &= mc^2\left(1+\alpha^2\left\{n-j-\frac{1}{2}+\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} && (29)\\
&= mc^2\left[1-\frac{\alpha^2}{2n^2}-\frac{\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{n}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}\right)+\dots\right] && (30)
\end{aligned}
$$

(30) $\Rightarrow E_{2(s,p)_{1/2}} - E_{2p_{3/2}} = mc^2\alpha^4/32$.

□ Jednadžba kontinuiteta DJ daje pozitivno definitne vjerojatnosti,

$$
\begin{aligned}
\psi^\dagger(16) - (16)^\dagger\psi &\equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\vec{j} = 0; && (31)\\
&\boxed{\rho = |\psi|^2}\,, \qquad \vec{j} = c\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi\ . && (32)
\end{aligned}
$$

(Time je Dirac ostvario svoj cilj : jednadžba koja daje poz. def. vjer.)

□ Problem negativnih energija :

· Diracova jednadžba za slobodnu česticu (16) ima 4 rješenja : dva pozitivne energije $E = \sqrt{\vec{p}^2c^2+m^2c^4}$ koja odgovaraju dvama projekcijama spina $J_3 = \pm\hbar/2$ i dva negativne energije $E = - = \sqrt{\vec{p}^2c^2+m^2c^4}$, $J_3 = \pm\hbar/2$.

· Problem sa negativnim rješenjima jest da vode na nestabilnost materije.

· Rješenje tog problema je Dirac našao rabeći Paulijev princip isključenja :
- pretpostavio je da su sva negativno energetska stanja popunjena (Diracovo more);
- proglasio je takvo stanje vakuumom; - pretpostavio je da se sva stanja moraju gledati

relativno prema vakuumskom stanju (stanju Diracovog mora).

$\Rightarrow$ nedostatak elektrona u Diracovom moru može se shvatiti kao šupljina suprotne energije, impulsa, naboja i ostalih aditivnih kvantnih naboja od negativno energetskog elektrona koji je uklonjen iz vakuumskog stanja.

$\Rightarrow$ **postojanje pozitrona, čestice iste suprotnog naboja i ista mase kao elektron**

$\Rightarrow$ Višečestična interpretacija D.J., postojanje antičestica.

□ Uspjesi i nedostaci Diracove jednadžbe

· Uspjesi :
1. Relativistička teorija za česticu sa spinom; Objašnjenje giromagnetskog omjera 2.
2. Predvidjanje e^+.
3. Ispravna relacija za finu strukturu H atoma.

· Nedostaci Diracove jednadžbe:
1. Diracova analiza negativnih vjerojatnosti : isključuje čestice cjelobrojnog spina (π^0, Z^0, γ, $\dots$).
2. Uvodjenje Diracovog mora za čestice spina 1/2 : isključuje antičestice za čestice cjelobrojnog spina (π^+, W^+, $\dots$).
3. Reprodukcija magnetskog momenta zasnovana je na "minimalnoj supstituciji", medjutim takodjer su dozvoljeni i Lorentz invarijantni članovi oblika $\kappa\alpha_4[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi F_{\mu\nu}$ (renormalizibilnost).

1.2 Nastanak kvantne teorije polja

1.2.1 Teorija slobodnog radijacijskog polja : Born, Heisenberg, Jordan 1926

- Primjenili matričnu mehaniku na slobodno radijacijsko polje

∗ formulacija problema
- zanemarili polarizacije;
- razmatrali 1 + 1 dimenzijski problem ograničene prostorne duljine $0 \leq x \leq L$ na radijacijsko polje;
- nametnuli uvjet isčezavanja radijacijskog polja $u(x,t)$ u rubnim točkama;
- u analogiji sa teorijom strune napisali Hamiltonijan problema

$$H = \frac{1}{2}\int_0^L \Big\{\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 + c^2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big\}dx \, . \tag{33}$$

∗ Fourijeov transformat
- da bi Hamiltonijan (33) sveli na oblik sume kvadrata koordinata i brzina, Fourier su transformirali radijacijsko polje,

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\sin\Big(\frac{\omega_k x}{c}\Big), \qquad \omega_k = \frac{k\pi c}{L} \tag{34}$$

$$\Rightarrow \; H = \frac{L}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\dot{q}_k^2(t) + \omega_k^2 q_k^2(t)\Big\} \tag{35}$$

(35) $\Rightarrow$ kanonski moment ($H = H(p,q)$, $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$)

$$p_k(t) = \frac{L}{2}\dot{q}_k(t) \, . \tag{36}$$

(36) $\Rightarrow$ kanonske komutacijske relacije

$$[\dot{q}_k(t), q_j(t)] = -\frac{2i\hbar}{L}\delta_{kj}, \qquad [q_k(t), q_j(t)] = 0, \qquad [\dot{q}_k(t), \dot{q}_j(t)] = 0 \, . \tag{37}$$

(35,36) $\Rightarrow$ jednadžba gibanja

$$\ddot{q}_k(t) = \frac{2}{L}\dot{p}_k(t) = -\frac{2}{L}\frac{\partial H}{\partial q_k(t)} = -\omega_k^2 q_k(t) \, . \tag{38}$$

$\Rightarrow$ Hamiltonijan (35) se ponaša kao Hamiltonijan skupa nezavisnih HO opisanih koordinatama $q_k(t)$.

∗ Primjena Born-Heisenberg-Jordanove matrične teorije za HO

- operator koordinate preko operatora stvaranja i poništenja

$$
\begin{aligned}
q_k(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega_k}}, \left[a_k e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger e^{i\omega_k t}\right] &(39)\\
[a_k, a_j^\dagger] &= \delta_{kj}, \qquad [a_k, a_j] \;=\; 0 \qquad [a_k^\dagger, a_j^\dagger] \;=\; 0. &(40)
\end{aligned}
$$

- Opće stanje : produktno stanje stanja nezavisnih HO

$$
\prod_i |n_i\rangle \tag{41}
$$

gdje n_i još nedefinirani.
- Djelovanje operatora $a_k^\dagger$ i a_k na opće stanje dani su relacijama

$$
\begin{aligned}
a_k^\dagger |n_1 \dots n_k \dots\rangle &= \sqrt{n_k + 1} |n_1 \dots n_k + 1 \dots\rangle &(42)\\
a_k |n_1 \dots n_k \dots\rangle &= \sqrt{n_k} |n_1 \dots n_k - 1 \dots\rangle &(43)
\end{aligned}
$$

pa se stoga interpretiraju kao operatori stvaranja i poništenja čestica.
- Pokažimo da se za n_k može staviti da su $n_k \in \mathbb{N}$. To slijedi npr. iz izraza za Hamiltonijan koji kada se izraz za operator koordinate (39) uvrsti u (35) daje

$$
H = \sum_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_k \; . \tag{44}
$$

Kako je po definiciji Hamiltonijan pozitivno definitan operator, niz stanja za bilo koji k-ti mod $|n_k\rangle$, $|n_k - 1\rangle$, $|n_k - 2\rangle \dots$ koji se dobija uzastopnom primjenom operatora spuštanja a_k mora terminirati, tj mora postojati stanje $|n_0\rangle_k$ sa svojstvom

$$
a_k |n_{k0}\rangle_k = 0 \; . \tag{45}
$$

jer bi inače operator Hamiltonijana ne bi bio pozitivno definitan. Stanje $|n_{k0}\rangle_k$ odgovara stanju najniže energije k-tog moda, dakle vakuumu k-tog moda. Stanja $|n_{k0} + m_k\rangle$ $m_k \in \mathbb{N}$ su pobudjenja tog stanja prirodno ih je shvatiti kao stanja sa dodatnih m_k čestica energije $\hbar\omega_k$. Prirodan odabir za n_{k0} je $n_{k0} = 0$, tj. $|n_{k0}\rangle_k = |0\rangle_k$. Time je osigurano da je $n_k \in \mathbb{N}$.
- Vakuumsko stanje cjelokupnog polja jest produktno stanje svih $|0\rangle_k$,

$$
a_k |00\dots\rangle = 0, \qquad |00\dots\rangle \equiv \prod_i |0\rangle_i. \tag{46}
$$

- Time matrični prikaz operatora $a_k^\dagger$ i a_k postaje

$$
a_k = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & \\ & 0 & \sqrt{2} & & \\ & & 0 & \sqrt{3} & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}_k \times \prod_{i \neq k} \mathbb{1}_i \; , \tag{47}
$$

$$a_k^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ \sqrt{1} & 0 & & & \\ & \sqrt{2} & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}_k \times \prod_{i\neq k} \mathbb{1}_i \; . \tag{48}$$

- Brojevi pod korijenima se fizikalno interpretiraju kao broj čestica u danom modu k.
- Stanje koje odgovara kvantnom broju k može imati bilo koji broj čestica n_k, $n_k \in \mathbb{N}$.
- Opće stanje je proizvoljno produktno stanje takvih stanja,

$$|n_1 \dots n_k \dots\rangle = \prod_{k=1}^{\infty} |n_k\rangle. \tag{49}$$

- Djelovanje operatora $a_k^\dagger$ i a_k na opće stanje dani su relacijama

$$a_k^\dagger |n_1 \dots n_k \dots\rangle = \sqrt{n_k+1}|n_1 \dots n_k + 1 \dots\rangle, \tag{50}$$
$$a_k |n_1 \dots n_k \dots\rangle = \sqrt{n_k}|n_1 \dots n_k - 1 \dots\rangle, \tag{51}$$

pa se stoga interpretiraju kao operatori stvaranja i poništenja čestica kvantnih brojeva n_k.
- Veza k-tog vakuumskog stanja $|0\rangle_k$ i stanja koje ima n_k čestica u kvantnom broju k je

$$|n_k\rangle_k = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a_k^\dagger)^{n_k}|0\rangle_k \; . \tag{52}$$

- Energija općeg stanja (49) je

$$E = \sum_k \hbar\omega_k n_k + \sum_k \frac{1}{2}\hbar\omega_k = \sum_k \hbar\omega_k n_k + E_0 \; . \tag{53}$$

Iz izraza za Hamiltonijan (44) i za energiju općeg stanja (53) takodjer slijedi
- da se $1+1$ dim EM polje može interpretirati kao beskonačan skup kvantiziranih HO;
- da je energija vakuuma E_0 beskonačna;
- da je Boseova metoda prebrojavanja kvanata radijacijskih stanja opravdana.

□ Neke primjene Born-Heisenberg-Jordanove teorije EM zračenja (DZ : pročitati u Weinbergu u §poglavlju 1.1.)

∗ Born, Jordan 1925 : objašnjenje spontane emisije radijacije uz pretpostavku klasičnog nabijenog oscilatora sa kvantiziranom energijom amplitudom oscilacije jednakom kvantnoj amplitudi.
∗ Dirac 1926 : objašnjenje spontane emisije radijacije uz pretpostavku klasičnog EM polja i termalne ravnoteže EM polja i atoma (koja veže Einsteinove koeficijente za induciranu i spontanu emisiju zračenja crnog cijela).
∗ Dirac 1927 : objašnjenje spontane emisije radijacije upotrebom kvantnog EM polja i bez upoterbe termalne ravnoteže EM polja i atoma.

1.2.2 Lorentz invarijantnost kvantizirane teorije

∗ Jordan i Pauli 1928 : pokazali Lorentz-invarijatnost komutatora polja u raznim prostorno-vremenskim točkama.
∗ Bohr i Rosenfeld 1933 : komutacijske relacije iskazuju ograničenja na mjerljivost polja u prostorno-vremenskim točkama separiranim vremeno-likim intervalima.

1.2.3 Kvantizacija fermionskih polja : Jordan 1927, Jordan-Wigner 1928

∗ Paulijev princip isključenja i broj kvanata :
- uočili da Paulijev princip isključenja omogućuje za vrijednosti broja zauzeća samo vrijednosti $n_k = 0, 1$ za svaki mod k.

⇒ operatori a_k i $a_k^\dagger$ koji se javljaju u Fourieovom transformatu polja ne zadovoljavaju komutacijske već antikomutacijske relacije,

$$a_k a_j^\dagger + a_j^\dagger a_k = \delta_{jk}, \qquad a_k a_j + a_j a_k = 0, \qquad a_k^\dagger a_j^\dagger + a_j^\dagger a_k^\dagger = 0. \tag{54}$$

- matrice koje zadovoljavaju (54) su

$$a_k^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_k \prod_{i\neq k} \mathbb{1}_i, \qquad a_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_k \prod_{i\neq k} \mathbb{1}_i; \tag{55}$$

- stanja

$$|n_1 \dots n_k \dots\rangle = \prod_k |n_k\rangle, \qquad n_k = 0, 1 \tag{56}$$

se interpretiraju kao i kod EM (bozonskog) polja, kao stanja sa n_k kvanata u k-tom modu.
- vakuum je opet stanje sa $n_k = 0$ kvanata $\forall k$,

$$|00\dots\rangle = \prod_k |0\rangle_k, \qquad a_k|0\rangle_k = 0\ . \tag{57}$$

- (56) ⇒

$$a_k^2 = 0, \qquad (a_k^\dagger)^2 = 0 \tag{58}$$

$$\Rightarrow\ a_k^\dagger|1\rangle_k = 0, \qquad a_k|0\rangle_k = 0\ . \tag{59}$$

□ TM Spina i statistike : Fiertz 1939 i Pauli 1940 su pokazali da je izbor izmedju komutacijskih i antikomutacijskih diktiran spinom čestice.

1.2.4 Generalizacija kvantizacije u teoriji polja : Heisenberg, Pauli 1929

- Primijenili su kanonska komutacijska pravila na sama polja (ne na Fourieove koeficijente)
- Pretpostavili da se Lagrangijan može prikazati preko gustoće Lagrangijana $\mathcal{L}$, funkcije ovisne samo o poljima i 4-derivacijama polja,

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\text{polja}, \partial_\mu \text{polja}); \tag{60}$$

- pretpostavili Hamiltonov princip stacionarnosti akcije,

$$\delta \int L dt = 0. \tag{61}$$

Iz njega slijede jednadžbe gibanja za polja ψ u Lagrangijanu.
- komutacijske relacije :
– kanonski impuls za polje nalazili varijacijskom derivacijom L s obzirom na $\dot{\psi}(x)$ (deformacija samo u jednoj točci x)

$$\pi_\psi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}(x)}; \tag{62}$$

– za bozone (fermione) uveli sljedeća komutacijska (antikomutacijska) pravila

$$[\pi_\psi(x), \psi(x')]^{\mp}_{t=t'} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \tag{63}$$

(uočiti : komutacijske relacije su uvijek za ista vremena : $t = t'$).
- Istražili zakone sačuvanja Q, $\vec{P}$, E, Lor. inv. i gauge inv. i pokazali da su ispunjeni.

□ Primjer : kompleksno skalarno polje
- (Napomena : budući da se u Lagrangijanu integrira po prostoru a ne po vremenu polje i njena derivacija su varijacijski nezavisni a polje i njen gradijent su varijacijski zavisni (varijacija i gradijent komutiraju)). - Lagrangijan, kanonski impuls, komutacijske relacije

$$L = \int d^3x \Big[\dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} - c^2 (\nabla\phi)^\dagger (\nabla\phi) - \Big(\frac{mc^2}{\hbar}\Big)^2 \phi^\dagger \phi \Big] \tag{64}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta L = \int d^3x \Big[& \dot{\phi}^\dagger \delta\dot{\phi} - c^2 (\nabla\phi)^\dagger (\nabla\delta\phi) - \Big(\frac{mc^2}{\hbar}\Big)^2 \phi^\dagger \delta\phi \\ & \delta\dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} - c^2 (\nabla\delta\phi^\dagger)(\nabla\phi) - \Big(\frac{mc^2}{\hbar}\Big)^2 \delta\phi^\dagger \phi \Big] \end{aligned} \tag{65}$$

$$\Rightarrow \quad \pi = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger, \qquad \pi^\dagger = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \; & [\pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = [\pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = -i\hbar\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ & 0 = [\pi, \phi^\dagger] = [\pi^\dagger, \phi] = [\pi, \pi] = [\pi^\dagger, \pi^\dagger] = [\pi, \pi^\dagger] = [\phi, \phi] \\ & \quad = [\phi^\dagger, \phi^\dagger] = [\phi, \phi^\dagger] \; . \end{aligned} \tag{67}$$

- stacionarnost akcije, jednadžbe gibanja
(integrira se po d^4x pa je i $\partial_0\delta = \delta\partial_0$; $\Box \; = \; -\partial_0^2 + \nabla^2$)
Stacionarnost akcije

$$\delta \int Ldt \;=\; c^2 \int d^4x \Big[\delta\phi^\dagger \Big(\Box - \Big(\frac{mc}{\hbar}\Big)^2\Big)\phi + \delta\phi\Big(\Box - \Big(\frac{mc}{\hbar}\Big)^2\Big)\phi^\dagger\Big], \tag{68}$$

daje standardne KGJ

$$\Big[\Box - \Big(\frac{mc}{\hbar}\Big)^2\Big]\phi \;=\; 0, \qquad \Big[\Box - \Big(\frac{mc}{\hbar}\Big)^2\Big]\phi^\dagger \;=\; 0\;. \tag{69}$$

- Hamiltonijan

$$\begin{aligned} H \;&=\; \int d^3x[\pi\dot{\phi} + \pi^\dagger\dot{\phi}^\dagger] - L \\ &=\; \int d^3x \Big[\pi^\dagger\pi + c^2(\nabla\phi)^\dagger(\nabla\phi) + \Big(\frac{mc^2}{\hbar}\Big)^2\phi^\dagger\phi\Big]\;. \end{aligned} \tag{70}$$

$*$ Problem negativno energetskih stanja nije još riješen.

1.2.5 Rješenje negativno energetskih stanja za spinorna polja $\equiv$ dokaz ekvivalentnosti Diracove teorije rupa i kvantne teorije polja elektrona, Fock 1933, Furry-Oppenheimer 1934

$*$ Konstrukcija spinornog polja
- e^- nosi naboj $\Rightarrow$ nije moguće miješati operatore a i $a^\dagger$: probali

$$\psi(x) \;=\; \sum_k u_k(\vec{x})e^{-i\omega_k t}a_k, \tag{71}$$

gdje je $\{u_k(\vec{x})e^{-i\omega_k t}\}$ potpun skup rješenja slobodne Diracove jednadžbe (16)

$$\mathcal{H}u_k \;=\; \hbar\omega_k u_k, \tag{72}$$

$$\mathcal{H} \;\equiv\; -i\hbar c\vec{\alpha}\nabla + \alpha_4 mc^2, \tag{73}$$

$$\int d^3x u_k^\dagger(x)u_k(x) \;=\; \delta_{kl}, \tag{74}$$

a a_k su Jordan-Wignerovi operatori poništenja (54)

$*$ Hamiltonijan su konstruirali prema idejama druge kvantizacije Heisenberga i Paulija, po kojima je Hamiltonijan jednak "očekivanoj vrijednosti" operatora $\mathcal{H}$ (Eq. (73)) s obzirom na "valnu funkciju" ψ (Eq. (71)),

$$H \;=\; \int d^3x\psi^\dagger\mathcal{H}\psi \;=\; \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k \;=\; \sum_k{}^{+} \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k{}^{-} \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k, \tag{75}$$

gdje $\sum^+$ ($\sum^-$) označuju sume po pozitivnim (negativnim) frekvencijama.

- problem : operator (75) nije pozitivno definitan

$*$ Furry i Oppenheimer su riješili taj problem primjenjujući Diracovu ideju da pozitron odgovara nedostatku negativno-energetskog elektrona,

$$a_k^{e^-} \sim (b_{\overline{k}}^{e^+})^\dagger, \qquad (a_k^{e^-})^\dagger \sim b_{\overline{k}}^{e^+} \tag{76}$$

i simetriju antikomutacijskih relacija operatora stvaranja i poništenja,

$$[a_k, a_\ell^\dagger]_+ \;=\; \delta_{k\ell} \;\;\rightarrow\;\; [b_{\overline{k}}^\dagger, b_{\overline{\ell}}]_+ \;=\; \delta_{\overline{k}\,\overline{\ell}} \;=\; \delta_{k\ell}, \tag{77}$$

gdje je $\overline{k}$ skup QB koji sa istim po iznosu a suprotnim po predznaku aditivnim QB od skupa k.

- Izjednačavanjem operatora sa lijeve i desne strane relacija (76) dobili su

$$\psi(x) \;=\; \sum_k{}^{+} u_k(x) a_k + \sum_k{}^{-} u_k(x) b_{\overline{k}}^\dagger, \tag{78}$$

$$u_k(x) \;=\; u_k(\vec{x}) e^{-i\omega_k t} \tag{79}$$

$$\Rightarrow H \;=\; \sum_k{}^{+} \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k{}^{-} \hbar|\omega_k| b_{\overline{k}}^\dagger b_{\overline{k}} + E_0, \tag{80}$$

$$E_0 \;=\; -\sum_k{}^{-} \hbar|\omega_k| \;. \tag{81}$$

- Redefinirali su vakuumsko stanje (inače bi redefinicija operatora (76) bila formalnost)

$$\tilde{\psi}_0, \quad a_k\tilde{\psi}_0 \;=\; 0$$

$$\rightarrow \psi_0, \qquad a_k\psi_0 \;=\; 0, \quad \omega_k > 0 \tag{82}$$

$$b_k\psi_0 \;=\; 0, \quad \omega_k < 0 \;. \tag{83}$$

$\Rightarrow$ energija vakuuma ψ_0 je E_0,
$\Rightarrow$ Ako se energija mjeri prema energiji vakuuma, fizikalni operator energije je $H - E_0$ koji je pozitivno definitan.
$\Rightarrow$ Problem negativnih enegija je time riješen u TP za e^-. Q.E.D.

1.2.6 Rješenje negativno energetskih stanja za bozone: Pauli i Weiskopf 1934

- problem : operatori stvaranja i poništanja zadovoljavaju komutacijaske relacije koje mijenjaju predznak pri zamjeni $a \to a^\dagger$ — što je operator stvaranja a što operator poništenja pri takvoj zamjeni treba odrediti nezavisno.

$*$ Rješenje : Upotreba Heisenberg-Paulijevog kanonskog formalizma za kvantizaciju polja:

- razvoj polja po ravnim valovima i kanonske komutacijske relacije za Fourierove komponente

$$\phi(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}} q(\vec{k},t)e^{i\vec{k}\vec{x}}, \qquad \frac{1}{2\pi}k_j L \in \mathbb{N}, \tag{84}$$

$$\pi(\vec{x},t) \overset{(66)}{=} \dot{\phi}^\dagger(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}} p(\vec{k},t)e^{-i\vec{k}\vec{x}}, \qquad p(\vec{k},t) = \dot{q}^\dagger(\vec{k},t) \tag{85}$$

$$\overset{F.T.}{\Rightarrow} q(\vec{k},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\int d^3x\phi(\vec{x},t)e^{-i\vec{k}\vec{x}}, \tag{86}$$

$$p(\vec{k},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\int d^3x\pi(\vec{x},t)e^{i\vec{k}\vec{x}} \; . \tag{87}$$

Primjenom kanonskih komutacijskih relacija za skalarno polje, nalaze se komutacijske relacije za pripadne Fourierove komponente,

$$\overset{(67)}{\Rightarrow} [p(\vec{k},t),q(\vec{\ell},t)] = \frac{-i\hbar}{V}\int d^3x e^{i\vec{k}\vec{x}}e^{-i\vec{\ell}\vec{x}} = -i\hbar\delta_{\vec{k}\vec{\ell}} = [p^\dagger(\vec{k},t),q^\dagger(\vec{\ell},t)], \tag{88}$$

$$[p,q^\dagger] = [p,p] = [p,p^\dagger] = [q,q] = [q,q^\dagger] = 0 \; . \tag{89}$$

Hermitski konjugirane relacije relacijama (89) takodjer vrijede.

$*$ Hamiltonijan

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x\Big[\pi^\dagger\pi + c^2(\nabla\phi)^\dagger(\nabla\phi) + \Big(\frac{mc^2}{\hbar}\Big)^2\phi^\dagger\phi\Big] \\ &= \sum_{\vec{k}}[p^\dagger(\vec{k},t)p(\vec{k},t) + \omega_k^2 q^\dagger(\vec{k},t)q(\vec{k},t)], \qquad \omega_k^2 = c^2\vec{k}^2 + \Big(\frac{mc^2}{\hbar}\Big)^2 \; . \end{aligned} \tag{90}$$

$\Rightarrow$ jednadžbe gibanja

$$\dot{p}(\vec{k},t) = -\frac{\partial H}{\partial q(\vec{k},t)} = -\omega_{\vec{k}}^2 q^\dagger(\vec{k},t) \; . \tag{91}$$

$\overset{(90,91)}{\Rightarrow}$ **slobodno skalarno polje se ponaša kao beskonačan skup H.O.**

$*$ Pauli, Weiskopf : $p(\vec{k},t)$ i $q(\vec{k},t)$ se mogu izraziti preko operatora stvaranja i poništenja tako da zadovoljavaju jednadžbe (85,88,89,91),

$$q(\vec{k},t) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}\Big[a(\vec{k})\exp(-i\omega_{\vec{k}}t) - b^\dagger(\vec{k})\exp(i\omega_{\vec{k}}t)\Big], \tag{92}$$

$$p(\vec{k},t) \;=\; \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}\Big[b(\vec{k})\exp(-i\omega_{\vec{k}}t) + a^\dagger(\vec{k})\exp(i\omega_{\vec{k}}t)\Big], \tag{93}$$

$$\begin{aligned} [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{\ell})] \;&=\; [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{\ell})] \;=\; \delta_{\vec{k}\vec{\ell}} \\ [a,a] \;&=\; [b,b] \;=\; [a,b] \;=\; [a,b^\dagger] \;=\; [a^\dagger,b] \;=\; [a^\dagger,b^\dagger] \;=\; 0\ . \end{aligned} \tag{94}$$

Odatle slijede izrazi za skalarno polje i Hamiltonijan,

$$\phi(\vec{x},t) \;=\; \frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\vec{k}}}}\Big[a(\vec{k})\exp(i\vec{k}\vec{x} - i\omega_{\vec{k}}t) - b^\dagger(-\vec{k})\exp(-i\vec{k}\vec{x} + i\omega_{\vec{k}}t), \tag{95}$$

$$\begin{aligned} H \;&=\; \sum_{\vec{k}}\frac{1}{2}\hbar\omega_{\vec{k}}\Big[b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) + b(\vec{k})b^\dagger(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})\Big] \\ &=\; \sum_{\vec{k}}\hbar\omega_{\vec{k}}\Big[b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})\Big] + E_0, \end{aligned} \tag{96}$$

$$E_0 \;=\; \sum_{\vec{k}}\hbar\omega_{\vec{k}}\ . \tag{97}$$

- Iz jednadžbi (95,96) slijedi da skalarno polje sadrži dva tipa čestica iste mase. Pauli i Weiskopf su ih identificirali sa česticama i pripadnim antičesticama koje imaju suprotne naboje (nabijeni su).
$\Rightarrow$ I bozoni i fermioni mogu imati antičestice. Za antičestice nije potreban mehanizam Diracovog mora.

$*$ Odabir (anti)čestičnog operatora
Ako se npr. $a_k^\dagger$ odabere kao operator poništenja ($\Rightarrow$ a_k op. stvaranja)
$\Rightarrow$ $a_k\Psi_0$ je 1-čestično stanje
$\Rightarrow$ norma tog stanja mora biti jednaka jedinici : provjerimo

$$\begin{aligned} ||a_k\Psi_0||^2 \;&=\; (a_k\Psi_0, a_k\Psi_0) \;=\; (\Psi_0, a_k^\dagger a_k\Psi_0) \;=\; (\Psi_0, \underbrace{[a_k^\dagger, a_k]}_{=\,-1}\Psi_0) \\ &=\; -(\Psi_0,\Psi_0) \;=\; -1 \end{aligned} \tag{98}$$

$\Rightarrow$ kontradikcija.
Ako se uzme da je $a_k^\dagger$ operator stvaranja, dobija se norma jednaka jedinici $\Rightarrow$ $a_k^\dagger$ je operator stvaranja.
Analogno se nalazi da je $b_k^\dagger$ operator stvaranja.

$\Downarrow$

$*$ Odatle slijedi i definicija vakuuma za skalarno polje,

$$a(k)\Psi_0 \;=\; b(k)\Psi_0 \;=\; 0\ . \tag{99}$$

- Komentar : Is kanonskog formalizma slijedi da se **faktor** $e^{i\omega_k t}$ **se javlja uz operator stvaranja isto kao u Furry-Oppenheimerovom formalizmu za fermionsko polje**.

(99) $\Rightarrow$ E_0 je energija vakuumskog stanja

$*$ Fizikalni operator energije: Uz izbor mjerenja energije relativno prema vakuumskoj energiji E_0 fizikalni operator energije je

$$:H: \;=\; H - E_0 \;=\; \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}}(a^\dagger(k)a(k) + b^\dagger(k)b(k)) \; . \tag{100}$$

Time je ujedno riješen problem negativnih energija skalarnog polja : operator $:H:$ je pozitivno definitan.
($N(O) \equiv \, :O: \, \equiv$ normalno uredjeni operator - od kojega je oduzeta njegova vakuumska očekivana vrijednost.)

1.2.7 Rješenje problema negativnih vjerojatnosti

- Diracov zahtjev : $\rho \geq 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ analiza $\rho \geq 0$ u teoriji polja.

$*$ analiza za KG polje :
- izraz za gustoću vjerojatnosti za slobodno skalarno polje i njen integral po prostoru

$$\rho \;\stackrel{(15)}{=}\; \frac{i}{\hbar}[\dot{\phi}\phi^\dagger - \dot{\phi}^\dagger\phi] \tag{101}$$

$$\Rightarrow\; N \;\stackrel{\text{def}}{\equiv}\; \int d^3x\,\rho \;=\; \sum_{\vec{k}}(a^\dagger(k)a(k) - b^\dagger(k)b(k)) \; . \tag{102}$$

(102) $\Rightarrow$ Operator N nije pozitivno definitan
$\Rightarrow$ Problem klasičnog KG polja "nije riješen" kvantizacijom.

$*$ analiza za Diracovo polje :
- izraz za gustoću $\psi^\dagger\psi$ je pozitivno definitan, medjutim nije fizikalan - od njega treba oduzeti doprinos negativno-energetskih stanja da bi se dobio fizikalan operator. Za integral gustoće energije se dobija

$$\begin{aligned} N \;&=\; \int d^3x\psi^\dagger\psi \;\stackrel{(79)}{=}\; \sum_{\vec{k}}{}^{+} a^\dagger(k)a(k) + \sum_{\vec{k}}{}^{-} b(k)b^\dagger(k) \\ &=\; \sum_{\vec{k}}{}^{+} a^\dagger(k)a(k) - \sum_{\vec{k}}{}^{-} b^\dagger(k)b(k) + \underbrace{\sum_{\vec{k}}{}^{-} 1}_{=\,N_0} \; . \end{aligned} \tag{103}$$

$\Rightarrow$ fizikalni operator $N - N_0$ nije pozitivno definitan.

$*$ Rješenje :
- niti Furry-Oppenheimerovo polje ψ niti Pauli-Weiskopfovo polje ϕ nisu amplitude vjerojatnosti.
- fizikalni Hilbertov prostor razapet je prostorom stanja a ne sa ψ, ϕ poljima.
- Operator $N - N_0$ nije vjerojatnost već operator broja čestica, a $\rho - \rho_0$ je pripadni operator gustoće broja čestica.

$*$ Rješenje problema negativnih vjerojatnosti:
- fizikalni Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ razapet je prostorom stanja $\{\phi_n\} = \{\phi_0, \{a_k\phi_0\}, \ldots\}$ koja imaju odredjeni broj čestica (antičestica), koje čini potpun skup stanja :

$$\forall\psi \in \mathcal{H}, \qquad \psi = \sum_n c_n\phi_n = \sum_n \psi_n(\psi_n, \psi). \tag{104}$$

- vjerojatnost nalaženja (mjeranje) ψ u stanju ϕ_n dana je sa

$$P_n = |(\phi_n, \psi)|^2 . \tag{105}$$

$\Rightarrow$ **Nema problema sa negativnim vjerojatnostima jer je $|(\phi_n, \psi)|^2$ uvijek pozitivno.**

2 Relativistička kvantna mehanika

Stanovište Weinbergove knjige: Kvantna teorija polja je jedini način "pomirenja" kvantne teorije i specijalne teorije relativnosti.

2.1 Kvantna Mehanika

- ista kvantna mehanika kao u NR fizici : kao u Diracovoj knjizi

(i) **FIZIKALNA STANJA** reprezentirana su **zrakama u Hilbertovim prostoru**
- **Hilbertov prostor** = Banachov unitarni vektorski prostor
– **Banachov prostor** = normiran i potpun vektorski prostor
– **kompleksni vektorski prostor** V, $(V, +, \cdot, \mathbb{C})$ = aditivna grupa u kojoj je definirano množenje sa skalarima iz $\mathbb{C}$:

$$\Phi, \Psi \in V \Rightarrow \xi\Phi + \eta\Psi \in V \ . \tag{106}$$

– **unitarni** VP : postoji skalarno množenje vektora $(,)$, $\Phi, \Psi, \ldots \in H$; $\xi, \eta, \ldots \in \mathbb{C}$ takvo da

$$(\Phi, \Psi) = (\Psi, \Phi)^*, \tag{107}$$
$$(\Phi, \xi_1\Psi_1 + \xi_2\Psi_2) = \xi_1(\Phi, \Psi_1) + \xi_2(\Phi, \Psi_2), \tag{108}$$
$$(\eta_1\Phi_1 + \eta_2\Phi_2, \Psi) = \eta_1^*(\Phi_1, \Psi) + \eta_2^*(\Phi_2, \Psi) \ . \tag{109}$$

– **normiranost** : postoji norma $|\ |$ (ovdje je $|\Psi|^2 = (\Psi, \Psi)$),

$$|\Psi| \geq 0, \tag{110}$$
$$|\Psi| = 0 \Leftrightarrow \Psi = 0, \tag{111}$$
$$|\lambda\Psi| = |\lambda||\Psi|, \tag{112}$$
$$|\Psi + \Phi| \leq |\Psi| + |\Phi| \ . \tag{113}$$

– **potpunost** : svaki Cauchijev niz $\{\Phi_n\}$ konvergira u Hilbertovom prostoru :

$$\{\Phi_n\} \ : \ \forall\varepsilon \ \exists n(\varepsilon), \ \forall p, q \ > \ n(\varepsilon), \ |\Phi_p - \Phi_q| \ < \ \varepsilon \ . \tag{114}$$

- **zraka** = skup normaliziranih vektora iz H, $(\Psi, \Psi) = 1$ koji se razlikuju do na fazu:

$$\Psi, \Psi' \ \in \ \mathcal{H} \ \Leftrightarrow \Psi' \ = \ \xi\Psi \qquad \text{i} \qquad |\xi| \ = \ 1 \ . \tag{115}$$

(ii) **OBSERVABLE** su reprezentirane **hermitskim operatorima** sa svojstvima

$$A \ : \ \mathcal{H} \to \mathcal{H} \qquad \text{(preslikava prostor u samog sebe)}, \tag{116}$$
$$A(\xi\Psi + \eta\Phi) \ = \ \xi A\Psi + \eta A\Phi \qquad \text{(linearan je)}, \tag{117}$$
$$A \ = \ A^\dagger \qquad \text{(zadovoljava uvjet realnosti)}. \tag{118}$$

gdje je $A^\dagger$ adjungirani operator operatora A,

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) \;=\; (A\Phi, \Psi) \;=\; (\Psi, A\Phi)^* \; . \tag{119}$$

Svojstveni vektor (stanje) i **svojstvena vrijednost** operatora A

$$A\Psi \;=\; \alpha\Psi \qquad . \tag{120}$$

- dokažimo TM da je α je realno:

$$\begin{array}{c} L \;\equiv\; (\Psi, A\Psi) \;=\; (A^\dagger\Psi, \Psi) \;=\; (A\Psi, \Psi) \;\equiv\; D \\ \left.\begin{array}{l} L \;=\; (\Psi, \alpha\Psi) \;=\; \alpha \\ D \;=\; (\alpha\Psi, \Psi) \;=\; \alpha^* \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \; \alpha \;=\; \alpha^* \quad Q.E.D \end{array} \tag{121}$$

(iii) Ako je sistem u stanju $\mathcal{R}$ i exp. se provodi tako da se mjeri da li je u jednom od stanja $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ ..., onda je vjerojatnost nalaženja u stanju $\mathcal{R}_n$

$$P(\mathcal{R} \to \mathcal{R}_n) \;=\; |(\Psi, \Psi_n)|^2, \tag{122}$$

gdje je $\Psi \in \mathcal{R}$ a $\Psi_n \in \mathcal{R}_n$. Ako $\{\Psi_n\}$ čini potpun skup $(\sum_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| \;=\; 1)$, onda je

$$\sum_n P(\mathcal{R} \to \mathcal{R}_n) \;=\; 1 \; . \tag{123}$$

D: $\sum_n |(\Psi, \Psi_n)|^2 \;=\; \sum_n \langle\Psi|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|\Psi\rangle \;=\; \langle\Psi|\Psi\rangle \;=\; 1$. Q.E.D.

2.2 Simetrije

TRANSFORMACIJA SIMETRIJE = promjena našeg gledišta (point of view), koja nije mjerljiva

$$\begin{array}{rcccl} & & S & & S' \\ T & : & \mathcal{R} & \rightarrow & \mathcal{R}' \\ & : & \mathcal{R}_n & \rightarrow & \mathcal{R}'_n \end{array} \qquad P(\mathcal{R} \to \mathcal{R}_n) \;=\; P(\mathcal{R}' \to \mathcal{R}'_n)\;. \tag{124}$$

Jednakost (124), $P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = P(\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}'_n)$, je nužan uvjet (nije i dovoljan) za simetrijsku transformaciju [ispunjeno je 'simetrija $\Rightarrow$ (124)' dok '(124) $\Rightarrow$ simetrija' ne mora biti ispunjeno].

WIGNEROV TM : Za svaku simetrijsku transformaciju $\mathcal{R} \;\rightarrow\; \mathcal{R}'$ zraka može definirati operator U u Hilbertovom prostoru $\Psi \in \mathcal{R} \;\rightarrow\; \Psi' \in \mathcal{R}'$ koji je ili

$$\begin{array}{ll} \text{(a) UNITARAN} & (U\Phi, U\Psi) \;=\; (\Phi, \Psi) \\ \text{(b) I LINEARAN} & U(\xi\Psi + \eta\Phi) \;=\; \xi U\Psi + \eta U\Phi, \end{array} \tag{125}$$

ili

$$\begin{array}{ll} \text{(a) ANTIUNITARAN} & (U\Phi, U\Psi) \;=\; (\Phi, \Psi)^* \;=\; (\Psi, \Phi) \\ \text{(b) I ANTILINEARAN} & U(\xi\Phi + \eta\Psi) \;=\; \xi^* U\Phi + \eta^* U\Psi\;. \end{array} \tag{126}$$

Hermitski pridruženi operatori linearnih i antilinearnih operatora i definicija linearnih unitarnih i antilinearnih antiunitarnih operatora

$$\text{linearni (vidi (119))} \qquad (\Phi, L^\dagger\Psi) \;\equiv\; (L\Phi, \Psi), \tag{127}$$

$$\text{antilinearni} \qquad (\Phi, A^\dagger\Psi) \;\equiv\; (\Psi, A\Phi)\;. \tag{128}$$

Sa definicijama (127) i (128) unitarnost i antiunitarnost operatora iz Wignerovog TM ima istu definiciju

$$U^\dagger \;=\; U^{-1}\;. \tag{129}$$

Dokaz:

$$(U\Phi, U\Psi) \overset{(127)}{=} (U^\dagger U\Phi, \Psi) \overset{(125)}{=} (\Phi, \Psi) \qquad \Rightarrow \qquad U^\dagger U \;=\; \mathbb{1}, \tag{130}$$

$$(U\Phi, U\Psi) \overset{(128)}{=} (\Psi, U^\dagger U\Phi) \overset{(126)}{=} (\Psi, \Phi) \qquad \Rightarrow \qquad U^\dagger U \;=\; \mathbb{1} \qquad \text{Q.E.D.} \tag{131}$$

IDENTIČNA (TRIVIJALNA) TRANSFORMACIJA $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ I TRANSFORMACIJE POVEZANE KONTINUIRANO S NJOM

$*$ transformaciji $\mathcal{R} \to \mathcal{R} \sim U = 1$ (unit. op. reprezentant): linearan i unitaran op.
$*$ transf. kont. povezane s $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$: takoder lin. i unit.
$*$ transf. bliske $U = 1$:

$$U \;=\; 1 + i\varepsilon t, \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}, \tag{132}$$

gdje je t Hermitski op.
D:

$$U^\dagger U \;=\; \mathbb{1} \qquad \Rightarrow \qquad -t^\dagger + t \;=\; 0.$$

SIMETRIJSKE TRANSFORMACIJE TVORE GRUPU

$* \, T_1 \;:\; \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}'_n \qquad \& \qquad T_2 \;:\; \mathcal{R}'_n \to \mathcal{R}''_n \qquad \Rightarrow \qquad T \equiv T_2 T_1 \;:\; \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}''_n,$
$* \, T^{-1} \;:\; \mathcal{R}'_n \to \mathcal{R}_n,$
$* \, T \;=\; 1 \;:\; \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_n,$

$\Rightarrow \{T\}$ je grupa.

STRUKTURA SKUPA PRIDRUŽENIH UNITARNIH OP. NA HILB. PROSTORU

$*$ veza izmedju transformacija zraka i pripadnih transformacija na unitarnom prostoru

$$\begin{array}{ll}
T_1 \;:\; \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}'_n & U(T_1) \;:\; \Psi_n \in \mathcal{R}_n \to U(T_1)\Psi_n \in \mathcal{R}'_n, \\
T_2 \;:\; \mathcal{R}'_n \to \mathcal{R}''_n & U(T_2) \;:\; U(T_1)\Psi_n \in \mathcal{R}'_n \to U(T_2)U(T_1)\Psi_n \in \mathcal{R}''_n, \\
T_2T_1 \;:\; \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}''_n & U(T_2)U(T_1) \;:\; \Psi_n \in \mathcal{R}_n \to U(T_2)U(T_1)\Psi_n \in \mathcal{R}''_n \\
 & U(T_2T_1) \;:\; \Psi_n \in \mathcal{R}_n \to U(T_2T_1)\Psi_n \in \mathcal{R}''_n
\end{array}$$

$\Rightarrow U(T_2)U(T_1)\Psi_n$ i $U(T_2T_1)\Psi_n$ pripadaju istoj zraci, tj. razlikuju se maksimalno do na fazu (dakle nisu nužno jednaki),

$$U(T_2)U(T_1)\Psi_n \;=\; e^{i\phi_n(T_2T_1)}U(T_2T_1)\Psi_n \,. \tag{133}$$

$*$ Neovisnost faze $\phi(T_2, T_1)$ o Ψ_n (stanju) : $\phi_n(T_2, T_1) \;=\; \phi(T_2, T_1)$ (osim za superselekcijska pravila) :

Za bilo koja dva linearno nezavisna stanja Ψ_A i Ψ_B i njihov zbroj $\Psi_{AB} \equiv \; \Psi_A + \Psi_B$,

$$U(T_2)U(T_1)(\Psi_A + \Psi_B) \;\stackrel{(133)}{=}\; e^{i\phi_{AB}(T_2,T_1)}U(T_2T_1)(\Psi_A + \Psi_B)$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad U(T_2)U(T_1)\Psi_A + U(T_2)U(T_1)\Psi_B \\
&\overset{(133)}{=} \quad e^{i\phi_A(T_2,T_1)}U(T_2T_1)\Psi_A + e^{i\phi_B(T_2,T_1)}U(T_2T_1)\Psi_B \ . \qquad (134)
\end{aligned}
$$

Uporabom jednadžbi (127,128) (linearnost/antilinearnost operatora $U(T_i)$) slijedi

$$
0 \;=\; (e^{\pm i\phi_{AB}(T_2,T_1)} - e^{\pm i\phi_A(T_2,T_1)})\Psi_A + (e^{\pm i\phi_{AB}(T_2,T_1)} - e^{\pm i\phi_B(T_2,T_1)})\Psi_B \qquad (135)
$$

Zbog linearne nezavisnosti stanja Ψ_A i Ψ_B slijedi da su izrazi u zagradama jednaki nuli, odnosno da je faza neovisna o stanju,

$$
\phi_n(T_2, T_1) \;=\; \phi(T_2, T_1), \qquad (136)
$$

odnosno

$$
U(T_2)U(T_1) \;=\; e^{i\phi(T_2,T_1)}U(T_2T_1) \ . \qquad (137)
$$

PROJEKTIVNE I OBIČNE REPREZENTACIJE GRUPE TRANSF. $\{T\}$ NA HILBERTOVOM PROSTORU

projektivne reprezentacije	$\phi(T_2, T_1) \neq 0$.
obične reprezentacije	$\phi(T_2, T_1) = 0$.

Broj faza projektivnih reprezentacija Lievih grupa je malen. Npr. $SO(3)$ ima dvije takve faze.

Stuktura Lieve grupe ne daje info da li neki skup stanja čini projektivnu reprezentaciju ili ne ali može reći da li grupa uopće ima projektivne reprezentacije ili ne.

Superselekcijska pravila : Za slučaj kada vrijede superselekcijska pravila tj. kada $\Psi_A + \Psi_B$ ne postoji $\Rightarrow$ faza Ψ može ovisiti i stanju ($\Psi \to \Psi_n$). Npr. Ne možemo zbrajati stanja različitog barionskog broja.

POVEZANE LIEVE GRUPE

Definicija : Skup transformacija simetrije $\{T(\theta)\}$ sa svojstvima:
(1) opisan konačnim skupom realnih kontinuiranih parametara, npr. $\{\theta^A\}$.
(2) svaki element skupa je kontinurano povezan sa identičnom transformacijom

$$
T(0) \;=\; 1, \qquad (138)
$$

kojoj je pridjeljen skup parametara $\theta = 0 \equiv \{\theta^a = 0\}$.
(3) množenje :

$$
T(\overline{\theta})T(\theta) \;=\; T(f(\overline{\theta}, \theta)) \ . \qquad (139)
$$

gdje je $f(\overline{\theta},\theta)$ analitička funkcija skupova parametera $\overline{\theta} \equiv \{\overline{\theta^a}\}$ i $\theta \equiv \{\theta^a\}$

Uporabom (138) dobija se

$$f^a(\theta,0) \;=\; f^a(0,\theta) \;=\; \theta^a. \tag{140}$$

Reprezentacija transformacija Lieve grupe u Hilbertovom prostoru

- kao što smo pokazali zbog povezanosti s operatorom identiteta, reprezentanti simetrijskih transformacija u Hilbetovom prostoru su **unitarni** i **linearni**.
- **u konačnoj blizini identiteta** unitarni operatori se mogu prikazati Taylorovim razvojem

$$U(T(\theta)) \;=\; \mathbb{1} + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^a\theta^b t_{ab} + \ldots, \tag{141}$$

$$f^a(\overline{\theta},\theta) \overset{(140)}{=} \overline{\theta^a} + \theta^a + f^a_{bc}\overline{\theta^b}\theta^c + \ldots \tag{142}$$

gdje su $t_a,\ t_{ab},\ldots$ Hermitski operatori neovisni o parametrima θ^a i simetrični u indeksima ako imaju više od jednog indeksa. Hermitičnost t_a i t_{ab} je lako pokazati iz uvjeta unitarnosti $U(T(\theta))$.

Izvod Lieve algebre uz pretpostavku obične (ne-projektivne) reprezentacije
$*$ neprojektivnost

$$U(T(\overline{\theta}))U(T(\theta)) \;=\; U(T(\overline{\theta})T(\theta)) \overset{(139)}{=} U(T(f(\overline{\theta},\theta)))\ . \tag{143}$$

$*$ Taylorov razvoj do drugog reda u parametrima

$$\begin{aligned}&[\mathbb{1} + i\overline{\theta^a}t_a + \frac{1}{2}\overline{\theta^b}\overline{\theta^c}t_{bc} + \ldots][\mathbb{1} + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c t_{bc} + \ldots]\\ &= [\mathbb{1} + i(\underbrace{\theta^a + \overline{\theta^a} + f^a_{bc}\overline{\theta^b}\theta^c + \ldots}_{f^a(\overline{\theta},\theta)})t_a + \frac{1}{2}(\underbrace{\theta^b + \overline{\theta^b} + \ldots}_{f^b(\overline{\theta},\theta)})(\underbrace{\theta^c + \overline{\theta^c} + \ldots}_{f^c(\overline{\theta},\theta)})t_{bc} + \ldots]\ .\end{aligned} \tag{144}$$

Linearni članovi se poništavaju, a od bilinearnih članova ostaju

$$\begin{aligned}-\overline{\theta^b}\theta^c t_b t_c &= i\overline{\theta^b}\theta^c f^a_{bc}t_a + \frac{1}{2}(\theta^b\overline{\theta^c} + \overline{\theta^b}\theta^c)t_{bc}\\ \Rightarrow\ t_{bc} &\overset{\text{sim}}{=} -t_b t_c - i f^a_{bc}t_a\\ &\overset{\text{sim}}{\Rightarrow} [t_b,t_c] \;=\; -i\underbrace{(f^a_{bc} - f^a_{cb})}_{C^a_{bc}}t_a\ .\end{aligned} \tag{145}$$

U drugom i trećem redu (145) upotrijebljena je simetrija t_{ab} operatora. Zadnja od jednadžbi (145) je jednadžba Lieve algebre opće Lieve grupe. C^a_{bc} su tzv. strukturne konstante

Lieve algebre.

JEDNOZNAČNOST : t_{bc}, t_{bcd}, t_{bcde}, ... su svi jednoznačno odredjeni Lievom algebrom. $\Rightarrow U(T(\theta))$ je jednoznačno odredjen u blizini $\mathbb{1}$-ice.

ABELOVA GRUPA :
Definicija : $f^a(\overline{\theta}, \theta)$ je aditivna

$$f^a(\overline{\theta}, \theta) \;=\; \overline{\theta^a} + \theta^a \tag{146}$$

$$\Rightarrow\; [t^a, t^b] \;=\; 0 \tag{147}$$

$$\Rightarrow\; U(T(\theta)) \stackrel{(146)}{=} \underbrace{U(T(\frac{\theta}{N}))^N}_{(1+\frac{i}{N}t^a\theta_a)^N} \;\rightarrow\; \exp(i\theta^a t_a)\ . \tag{148}$$

2.3 Kvantne Lorentzove transformacije

PRINCIP RELATIVNOSTI (EINSTEIN) : inercijalni sustavi su ekvivalentni.

$\Downarrow$

promatrač S : koordinate x^μ ($x^0 = t$, $\{x^i\} = \vec{x}$)

$\Rightarrow \forall\ S'$, pripadne koordinate x'^μ zadovoljavaju

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu && (149) \\ \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} &= \eta_{\rho\sigma}, && (150) \end{aligned}$$

gdje je

$$\eta_{\mu\nu} = diag(\overbrace{1}^{1}, \overbrace{1}^{2}, \overbrace{1}^{3}, \overbrace{-1}^{0}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{151}$$

Rabi se konvencija sumacije po kombinacijama indeksa ${}_\mu \ldots {}^\mu$.

$\Rightarrow$ konstantnost brzine svjetlosti :

$$\begin{aligned} \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad -dt^2 + d\vec{x}^2 &= 0 \\ \equiv -dt'^2 + d\vec{x'}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{d\vec{x'}}{dt'}\right| &= 1 \ . \qquad \text{Q.E.D.} && (152) \end{aligned}$$

RJEŠENJE (150) : linearna transformacija s uvjetom :

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, && (153) \\ \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma &= \eta_{\rho\sigma} \ . && (154) \end{aligned}$$

UVIJET (154) za $\eta^{\mu\nu}$

- postoji inverz $\eta^{\mu\nu} = diag(1,1,1,-1)$ jer je $det\eta \neq 0$.
- odatle slijedi

$$\begin{aligned} (154) \mid \eta^{\sigma\tau} \Lambda^\kappa{}_\tau \quad &\equiv \quad \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho (\Lambda^\nu{}_\sigma \Lambda^\kappa{}_\tau \eta^{\sigma\tau}) = \overbrace{\eta_{\rho\sigma}\eta^{\sigma\tau}}^{\delta_\rho{}^\tau} \Lambda^\kappa{}_\tau = \Lambda^\kappa{}_\rho \\ &= \quad \delta^\kappa{}_\mu \Lambda^\mu{}_\rho = \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\kappa} \Lambda^\mu{}_\rho = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \cdot \eta^{\nu\kappa} \\ &\Rightarrow \quad \Lambda^\nu{}_\sigma \Lambda^\kappa{}_\tau \eta^{\sigma\tau} = \eta^{\nu\kappa} \ . && (155) \end{aligned}$$

SKUP TRANSFORMACIJA (153) TVORI GRUPU

Razmotrimo dvije uzastopne Lorentzove transformacije koordinata : $x \overset{(\Lambda,a)}{\to} x' \overset{(\overline{\Lambda},\overline{a})}{\to} x''$

$$\begin{aligned} x''^{\mu} &\overset{(153)}{=} \overline{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho} x'^{\rho} + \overline{a}^{\mu} \overset{(153)}{=} \overline{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}(\Lambda^{\rho}_{\nu} x^{\nu} + a^{\rho}) + \overline{a}^{\mu} \\ &= (\overline{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu})x^{\nu} + (\overline{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho} a^{\rho} + \overline{a}^{\mu}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\overline{\Lambda},\overline{a})\cdot(\Lambda,a) = (\overline{\Lambda}\Lambda, \overline{\Lambda}a + \overline{a}) \qquad \text{grupno množenje.} \tag{156}$$

• jedinični element $\quad (1,0) \sim (\delta^{\mu}{}_{\nu}, 0)$
• inverz :
∗ postojanje inverza :

$$(154) \Rightarrow (det\Lambda)^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad det\Lambda = \pm 1 \neq 0\ . \qquad \text{Q.E.D.} \tag{157}$$

∗ inverz :

$$(\Lambda,a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)\ . \tag{158}$$

D:

$$\begin{aligned} (\Lambda,a)(\Lambda^{-1},-\Lambda^{-1}a) &= (1,-a+a) = (1,0), \\ (\Lambda^{-1},-\Lambda^{-1}a)(\Lambda,a) &= (1,-\Lambda^{-1}a+\Lambda^{-1}a)\ . \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{(\Lambda,a)\}$ je grupa, tzv. **POINCARÉOVA GRUPA ≡ NEHOMOGENA LORENTZOVA GRUPA**

POGRUPE $\{(\Lambda,a)\}$:

1. $\{(\Lambda,0)\}$: **HOMOGENA LORENTZOVA GRUPA** :
∗ $(\overline{\Lambda},0)(\Lambda,0) = (\overline{\Lambda}\Lambda,0)$,
∗ $(1,0) \in \{(\Lambda,0)\}$,
∗ $(\Lambda^{-1},0)$ je inverz. $\quad$ Q.E.D.

2. $\{(\Lambda,a),\ det\Lambda = 1\}$: **SVOJSTVENA POINCARÉOVA GRUPA** :
∗ $det\overline{\Lambda}\Lambda = \underbrace{det\overline{\Lambda}}_{=1}\underbrace{det\Lambda}_{=1} = 1,$
∗ $det\ 1 = 1,$
∗ $det\ \Lambda^{-1} = (\underbrace{det\Lambda}_{=1})^{-1} = 1\ .$ $\quad$ Q.E.D.

Posebno $\{(\Lambda,0),\ det\Lambda = 1\}$ je tzv. **SVOJSTVENA LORENZOVA GRUPA**.

3. $\{(\Lambda,a),\ \Lambda^{0}{}_{0} \geq 1\}$: **ORTOKRONE POINCARÉOVE TRANSF.**

$*$ grupoidnost

$$
\begin{aligned}
(154)_{\mu=0,\nu=0} &\equiv -(\Lambda^0{}_0)^2 + (\Lambda^i{}_0)^2 = -1, && (159)\\
(155)^{\mu=0,\nu=0} &\equiv -(\Lambda^0{}_0)^2 + (\Lambda^0{}_i)^2 = -1, && (160)
\end{aligned}
$$

$$
(159),(160) \;\Rightarrow\; (\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + (\Lambda^i{}_0)^2 = 1 + (\Lambda^0{}_i)^2, \tag{161}
$$

$$
\begin{aligned}
(156) \;\Rightarrow\; (\overline{\Lambda}\Lambda)^0{}_0 &= \overline{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0 + \sum_i \overline{\Lambda}^0{}_i\Lambda^i{}_0 \\
&\geq \underbrace{\overline{\Lambda}^0{}_0}_{\cosh\overline{\omega}}\underbrace{\Lambda^0{}_0}_{\cosh\omega} - \underbrace{\Big((\overline{\Lambda}^0{}_0)^2 - 1\Big)^{1/2}}_{\sinh\overline{\omega}}\underbrace{\big((\Lambda^0{}_0)^2 - 1\big)^{1/2}}_{\sinh\omega} \geq 1 \qquad .\text{Q.E.D} \qquad (162)
\end{aligned}
$$

U prvoj od (162) nejednakosti upotrebljena je trokutna relacija,

$$
\Big|\sum_i \overline{\Lambda}^0{}_i\Lambda^i{}_0\Big| \leq \Big[\Big(\sum_i(\overline{\Lambda}^0{}_i)^2\Big)\Big(\sum_i(\Lambda^0{}_i)^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}} \overset{(159,160)}{=} \Big((\overline{\Lambda}^0{}_0)^2 - 1\Big)^{1/2}\Big((\Lambda^0{}_0)^2 - 1\Big)^{1/2}. \tag{163}
$$

Identifikacija članova sa $\cosh\omega$ i $\sinh\omega$ je očigledna.

$*$ $(1,0)$: $\quad \Lambda^0{}_0 = 1 \geq 1,$

$*$ $(\Lambda,a)^{-1}$: $\quad (\Lambda,a)(\Lambda,a)^{-1} = (1,0) \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})^0{}_0 \geq 1\ .$ $\qquad$ Q.E.D. (grupnost)

PROSTORNA INVERZIJA I VREMENSKI OBRAT

$$
\begin{aligned}
\{(\Lambda,a)\} &\equiv L = L_{11} \cup (L_{11}\otimes\mathcal{P}) \cup (L_{11}\otimes\mathcal{T}) \cup (L_{11}\otimes\mathcal{PT}), && (164)\\
L_{11} &\equiv \{(\Lambda,a),\ det\Lambda = 1,\ \Lambda^0{}_0 \geq 1\}, && (165)\\
\mathcal{P} &= diag(-1,-1,-1,1), && (166)\\
\mathcal{T} &= diag(1,1,1,-1)\ . && (167)
\end{aligned}
$$

GRUPNE RELACIJE SE PRENOSE NA TRANSFORMACIJE NAD ZRAKAMA $\{\mathcal{R}\}$ I NAD STANJIMA U HILBERTOVOM PROSTORU $\{\Psi\}$

Table 1: Grupne relacije na x $\mathcal{R}$ i Hilbertovom prostoru

$\{x\}$	$\{\mathcal{R}\}$	$\{\Psi \in \mathcal{R}\}$
$x'' = (\overline{\Lambda}\Lambda)x + (\overline{\Lambda}a + \overline{a})$ $(\overline{\Lambda}, \overline{a})(\Lambda, a) = (\overline{\Lambda}\Lambda, \overline{\Lambda}a + \overline{a})$	$T(\overline{\Lambda}, \overline{a})T(\Lambda, a)$ $= T(\overline{\Lambda}\Lambda, \overline{\Lambda}a + \overline{a})$	$U(\overline{\Lambda}, \overline{a})U(\Lambda, a)$ $= U(\overline{\Lambda}\Lambda, \overline{\Lambda}a + \overline{a})$
$(1, 0)$	$T(1, 0)$	$U(1, 0) = \mathbb{1}$
$(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$	$T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$	$U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$
$\{(\Lambda, 0)\}$	$\{T(\Lambda, 0)\}$	$\{U(\Lambda, 0)\}$
$\{(\Lambda, a), det\Lambda = 1\}$	$\{T(\Lambda, a), det\Lambda = 1\}$	$\{U(\Lambda, a), det\Lambda = 1\}$
$\{(\Lambda, a), \Lambda^0{}_0 \geq 1\}$	$\{T(\Lambda, a), \Lambda^0{}_0 \geq 1\}$	$\{U(\Lambda, a), \Lambda^0{}_0 \geq 1\}$
$(\mathcal{P}, 0)$	$T(\mathcal{P}, 0)$	$U(\mathcal{P}, 0) \equiv P$
$(\mathcal{T}, 0)$	$T(\mathcal{T}, 0)$	$U(\mathcal{T}, 0) \equiv T$

2.4 Poincaréova algebra

INFINITEZIMALNE TRANSFORMACIJE POINCARÉOVE GRUPE, BROJ PARAMETARA

$*$ Motivacija : svojstva Lieve grupe oko identičnog elementa sadrže većinu svojstava Lieve simetrije

$*$ Transformacije oko $\mathbb{1}$-ice $[(\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \; a^\mu = 0); (1,0)]$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \qquad a^\mu = \varepsilon^\mu \; . \tag{168}$$

$*$ uvjet (154) $\equiv \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$:

$$[\text{Konvencije :} \qquad \eta_{\mu\nu}T^{\nu\alpha\ldots}{}_\beta = T_\mu{}^{\alpha\ldots}{}_\beta \; ; \qquad \eta^{\mu\nu}T_\nu{}^{\alpha\beta\ldots} = T^{\mu\alpha\beta\ldots} \quad .] \tag{169}$$

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho)(\delta^\nu{}_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma) = \eta_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} + \mathcal{O}(\omega^2) \\ &\equiv \omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho} \end{aligned} \tag{170}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \Rightarrow \text{antisim tenzor } \omega_{\rho\sigma} \; (4 \times 4) & \Rightarrow & 6 \text{ parametara} \\ \quad \varepsilon^\epsilon & & 4 \text{ parametra} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ P.G. je 10-parametarska grupa.

$*$ Digresija : Konvencije (169) i razni zapisi uvjeta (154) :

$$(154) \equiv \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}| \cdot \eta^{\sigma\overline{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda_{\mu}{}^{\overline{\sigma}} = \delta_{\rho}{}^{\overline{\sigma}}, \tag{171}$$

$$(155) \equiv \Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}\eta^{\mu\nu} = \eta^{\rho\sigma}| \cdot \eta_{\sigma\overline{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad \Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda_{\overline{\sigma}}{}^{\mu} = \delta_{\overline{\sigma}}{}^{\rho}\ . \tag{172}$$

Uočiti: $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$.

JEDINIČNI OPERATOR U HILBERTOVOM PROSTORU; OPERATORI BLISKI JEDINIČNOM OPERATORU I GENERATORI POINCARÉOVE GRUPE U HILBERTOVOM PROSTORU

• Jedinični operator $U(1,0)$:

$T(1,0)\ :\ \mathcal{R} \to \mathcal{R} \qquad \Rightarrow \qquad U(1,0)\ :\ \{\Psi_{\mathcal{R}}\} = \mathcal{R} \to \{\Psi_{\mathcal{R}}\} = \mathcal{R}$

$\Rightarrow \qquad U(1,0) = e^{i\varphi}\mathbb{1}$.

ODABIR FAZE : $\quad U(1,0) = \mathbb{1}$.

• Operatori bliski jediničnom : $U(1+\omega,\varepsilon)$: razvoj po ω i ε

$$U(1+\omega,\varepsilon) = \mathbb{1} + \frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\varepsilon_{\rho}P^{\rho} + \dots \tag{173}$$

Predznak "$-$" ispred P^{ρ} je konvencija (vidi ispod fizikalno značenje operatora). Operatori $J^{\rho\sigma}$ i P^{ρ} su nezavisni.

$*$ unitarnost U i realnost parametara $\omega_{\rho\sigma}$, ε_{ρ} $\qquad \Rightarrow \qquad$ hermitičnost $J^{\rho\sigma}$ i P^{ρ} :

$$J^{\rho\sigma\dagger} = J^{\rho\sigma} \qquad P^{\rho\dagger} = P^{\rho}\ . \tag{174}$$

$*$ antisimetričnost $\omega_{\rho\sigma}$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ antisimetričnost $J^{\rho\sigma}$

$$J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}\ . \tag{175}$$

$*$ Fizikalno značenje :

P^0	:	op. energije $\equiv$ Hamiltonijan,
P^1, P^2, P^3	:	komponente op. impulsa,
J^{23}, J^{31}, J^{12}	:	komponenete op. momenta impulsa.

POINCARÉOVE TRANSFORMACIJE GENERATORA GRUPE

Dobijaju se razmatranjem transformacije sličnosti operatora bliskih identitetu,

$$
\begin{aligned}
& U(\Lambda,a)U(1+\omega,\varepsilon)U^{-1}(\Lambda,a) \\
\overset{(173)}{=} \;& U(\Lambda,a)(\mathbb{1}+\frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}-i\varepsilon_\rho P^\rho+\ldots)U^{-1}(\Lambda,a) \\
\overset{(125)}{=} \;& \mathbb{1}+\frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}U(\Lambda,a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda,a)-i\varepsilon_\rho U(\Lambda,a)P^\rho U^{-1}(\Lambda,a) \\
= \;& U((\Lambda,a)(1+\omega,\varepsilon)(\Lambda,a)^{-1}) \\
\overset{(177)}{=} \;& U(1+\Lambda\omega\Lambda^{-1},\Lambda\varepsilon-\Lambda\omega\Lambda^{-1}a) \\
= \;& (\mathbb{1}+\frac{1}{2}i(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}-i(\Lambda\varepsilon-\Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\rho P^\rho,
\end{aligned}
\tag{176}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Lambda,a)(1+\omega,\varepsilon)(\Lambda,a)^{-1} &= (\Lambda,a)(1+\omega,\varepsilon)(\Lambda^{-1},-\Lambda^{-1}a) \\
&= (\Lambda,a)((1+\omega)\Lambda^{-1},(1+\omega)(-\Lambda^{-1}a)+\varepsilon) \\
&= (1+\Lambda\omega\Lambda^{-1},(-1-\Lambda\omega\Lambda^{-1})a+\Lambda\varepsilon+a) \\
&= (1+\Lambda\omega\Lambda^{-1},\Lambda\varepsilon-\Lambda\omega\Lambda^{-1}a)\ .
\end{aligned}
\tag{177}
$$

(176),(177) $\Rightarrow$

$$
\varepsilon_\rho U(\Lambda,a)P^\rho U^{-1}(\Lambda,a) = (\Lambda\varepsilon)_\rho P^\rho \tag{178}
$$

$$
\omega_{\rho\sigma}U(\Lambda,a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda,a) = (\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}+2(\Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\rho P^\rho\ . \tag{179}
$$

Za nalaženje transformacija generatora trebamo izraze za inverze Λ^μ_ν,

$$
(\Lambda^{-1})_\rho{}^\mu\Lambda_\mu{}^\sigma = \delta_\rho{}^\sigma, \qquad \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda_\mu{}^\sigma \overset{(171)}{=} \delta_\rho{}^\sigma \qquad \Rightarrow \qquad (\Lambda^{-1})_\rho{}^\mu = \Lambda^\mu{}_\rho, \tag{180}
$$

$$
\Lambda^\rho{}_\mu(\Lambda^{-1})^\mu{}_\sigma = \delta^\rho{}_\sigma, \qquad \Lambda^\rho{}_\mu\Lambda_\sigma{}^\mu \overset{(172)}{=} \delta^\rho{}_\sigma \qquad \Rightarrow \qquad (\Lambda^{-1})^\mu{}_\sigma = \Lambda_\sigma{}^\mu, \tag{181}
$$

i moramo malo "pregrupirati" članove,

$$
(\Lambda\varepsilon)_\rho P^\rho = (\Lambda\varepsilon)_\mu P^\mu, = \Lambda_\mu{}^\rho\varepsilon_\rho P^\mu \tag{182}
$$

$$
(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} = (\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho\omega_{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu J^{\mu\nu} \overset{(181)}{=} \omega_{\rho\sigma}\Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}, \tag{183}
$$

$$
\begin{aligned}
2(\Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\rho P^\rho &= 2\Lambda_\mu{}^\rho\omega_{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu a^\nu P^\mu \overset{(181)}{=} 2\Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma\omega_{\rho\sigma}a^\nu P^\mu \\
&\overset{(170)}{=} \Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma\omega_{\rho\sigma}(a^\nu P^\mu-a^\mu P^\nu).
\end{aligned}
\tag{184}
$$

Odatle slijede transformacije generatora Poincaréove grupe na Poincaréove transformacije,

$$
U(\Lambda,a)P^\rho U^{-1}(\Lambda,a) \overset{(178,182)}{=} \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu, \tag{185}
$$

$$
U(\Lambda,a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda,a) \overset{(179,183,184)}{=} \Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma(J^{\mu\nu}-a^\mu P^\nu+a^\nu P^\mu)\ . \tag{186}
$$

(185,186) $\Rightarrow$ P^μ je vektor na homogenu Lorentzovu transformaciju $(\Lambda, 0)$,
$J^{\mu\nu}$ je tenzor na homogenu Lorentzovu transformaciju $(\Lambda, 0)$,
P^μ je translacijski invarijantan (L. transformat ne zavisi o a^μ),
$J^{\mu\nu}$ nije translacijski invarijantan.

POINCARÉOVA ALGEBRA (LIEVA ALGEBRA POINCARÉOVE GRUPE)

$*$ dobija se analizom (185) i (186) za infinitezimalnu L. transformaciju $(\Lambda, a) = (1+\omega, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} U(1+\omega,\varepsilon) &= \mathbb{1} + \frac{1}{2} i\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i\varepsilon_\mu P^\mu, \\ U^{-1}(1+\omega,\varepsilon) &\approx U(1-\omega,-\varepsilon) = \mathbb{1} - \frac{1}{2} i\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + i\varepsilon_\mu P^\mu \ . \end{aligned} \tag{187}$$

[Upotrebljena je relacija $(1+\omega,\varepsilon)^{-1} = ((1+\omega)^{-1}, -(1+\omega)^{-1}\varepsilon) \approx (1-\omega,-\varepsilon)$] .

$$(185) \quad \Rightarrow \quad i\Big[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \varepsilon_\mu P^\mu, P^\rho\Big] = \omega_\mu{}^\rho P^\mu, \tag{188}$$

$$(186) \quad \Rightarrow \quad i\Big[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \varepsilon_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma}\Big] = \omega_\mu{}^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\nu{}^\sigma J^{\rho\nu} - \varepsilon^\rho P^\sigma + \varepsilon^\sigma P^\rho, \tag{189}$$

$$(188) \quad \Rightarrow \quad [P^\mu, P^\rho] = 0, \tag{190}$$

$$\begin{aligned} (188) \quad \Rightarrow \quad i\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}[J^{\mu\nu}, P^\rho] &= \frac{1}{2}(\omega_\mu{}^\rho P^\mu + \omega_\nu{}^\rho P^\nu) = \frac{1}{2}(\eta^{\nu\rho}\omega_{\mu\nu} P^\mu + \eta^{\mu\rho}\omega_{\nu\mu} P^\nu) \\ &= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(\eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu), \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} i[J^{\mu\nu}, P^\rho] &= \eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu, \\ \equiv i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho \ . \end{aligned} \tag{191}$$

Analogno

$$(189) \quad \Rightarrow \quad i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu} \ . \tag{192}$$

RESUME : Lieva algebra Poincaréove grupe

$$\begin{aligned}
i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu} \\
i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho \\
i[P^\mu, P^\rho] &= 0
\end{aligned}$$

STANDARDNI ZAPIS POINCARÉOVE ALGEBRE; SAČUVANI OPERATORI

• QM : specijalnu ulogu imaju **sačuvani operatori** (koji komutiraju sa $H = P^0$) :

$$[P^0, P^\mu] \stackrel{(190)}{=} 0, \qquad [P^0, J^{ij}] \stackrel{(191)}{=} 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= \{P^1, P^2, P^3\} \qquad \text{tvore } \textbf{operator impulsa}, &(193)\\
\vec{J} &= \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\} \qquad \text{tvore } \textbf{operator kutne količine gibanja}, &\\
(J_i &\equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} J^{jk}) . &(194)
\end{aligned}$$

$*$ preostali generatori L.T.,

$$\vec{K} = \{J^{10}, J^{20}, J^{30}\}, \tag{195}$$

tvore vektor "boostova" (potisnuća). Oni nisu sačuvani. Zbog toga se njihove svojstvene vrijednosti ne mogu rabiti za označavanje fizikalnih stanja kao $H \equiv P^0$, $\vec{P}$ i $\vec{J}$.

$*$ Zapis komutacijskih relacija L.T. (190), (191), (192) preko H, $\vec{P}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ operatora (sačuvani operatori su istaknuti) :

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk} J_k, &(196)\\
[J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk} K_k, &(197)\\
[K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk} J_k, &(198)\\
[J_i, P_j] &= i\varepsilon_{ijk} P_k, &(199)\\
[K_i, P_j] &= iH\delta_{ij}, &(200)\\
[K_i, H] &= iP_i, &(201)\\
[J_i, H] &= [P_i, H] = [H, H] = [P_i, P_j] = 0 . &(202)
\end{aligned}$$

Primjeri dokaza relacija (196-202) :

$$\begin{aligned}
[P^\mu, P^\nu] &= 0 \\
&\Rightarrow [P^0, P^0] = 0 \qquad \equiv \qquad [H, H] = 0, \\
& [P^0, P^i] = 0 \qquad \equiv \qquad [H, P^i] = 0, \\
& [P^i, P^j] = 0 \qquad \equiv \qquad [P^i, P^j] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho \\
&\Rightarrow i[P^0, J^{jk}] = 0 \,|\varepsilon_{ijk} \quad \equiv \quad [H, J_i] = 0, \\
& i[P^0, J^{i0}] = \eta^{0i} P^0 - \eta^{00} P^i = P^i \quad \equiv \quad i[H, K_i] = P_i, \\
& i[P^i, J^{j0}] = \eta^{ij} P^0 - \eta^{i0} P^j = \delta_{ij} H \quad \equiv \quad i[P_i, K_j] = \delta_{ij} H, \\
& i[P^i, J^{ab}] = \eta^{ia} P^b - \eta^{ib} P^a |\varepsilon_{jab} \quad \equiv \quad i[P_i, J_j] = -\varepsilon_{ijk} P_k \ .
\end{aligned}$$

Za DZ dokažite relacije (196-202) koje ovdje nismo dokazali. **PRIMJERI ADITIVNIH PODGRUPA POINCARÉOVE GRUPE**

$*$ Translacije $T(1, a)$: $T(1, a)T(1, \overline{a}) \equiv T(1, a + \overline{a})$

$$\Rightarrow \qquad U(1, a) \stackrel{(173)}{=} \exp(-iP^\mu a_\mu) \ . \tag{203}$$

$*$ Rotacija za konačan kut oko osi $\hat{\vec{\theta}}$, $R_{\vec{\theta}}$ iznosa $|\vec{\theta}|$

$$U(R_{\vec{\theta}}) \stackrel{(173)}{=} \exp(i\vec{J}\vec{\theta}) \ . \tag{204}$$

2.5 Jednočestična stanja

LABELE (OZNAKE) STANJA

$* \; [P^\mu, P^\nu] \; = \; 0$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \text{prirodno je označiti stanje sa vrijednošću 4-impulsa } p : \; \Psi_p \\ \text{ostale stupnjeve slobode označimo sa } \sigma \; \Psi_{p\sigma} \end{array}\right\}$

$$P^\mu \Psi_{p\sigma} \;\; = \;\; p^\mu \Psi_{p\sigma} \; . \tag{205}$$

$*$ **PRETPOSTAVKA** : indeksi σ su diskretni.

$*$ NAPOMENA : Ψ označava bilo koje slobodno-gibajuće stanje (ne nužno elementarnu česticu)

TRANSLACIJA $(U(1,a) \;\; = \;\; \exp(-iPa))$ **: PROMJENA STANJA, SV. VRIJ.** P_μ :

$$\begin{aligned} U(1,a)\Psi_{p\sigma} \;\; &= \;\; e^{-ipa}\Psi_{p\sigma}, & (206) \\ P_\mu[U(1,a)\Psi_{p\sigma}] \;\; &= \;\; p_\mu[U(1,a)\Psi_{p\sigma}] \; . & (207) \end{aligned}$$

DJELOVANJE P_μ **NA LORENTZ TRANSFORMIRANO STANJE : PROBLEM ODREDJIVANJA KOEFICIJENATA KOJE MIJEŠAJU** σ**-ME**

· oznaka za homogenu L.T.

$$U(\Lambda, 0) \equiv U(\Lambda) \; . \tag{208}$$

Njen inverz dan je sa

$$U(\Lambda)^{-1} \;\; = \;\; U(\Lambda^{-1}), \tag{209}$$

a umnožak dvije homogene L.T glasi

$$U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) \;\; = \;\; U(\Lambda_1\Lambda_2). \tag{210}$$

· Dokaz da $U(\Lambda)\Psi_{p\sigma}$ ima sv. vrijednost $\mathbf{\Lambda}p$ s obzirom na P_μ

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} \;\; &= \;\; U(\Lambda)[U(\Lambda)^{-1}P^\mu U(\Lambda)]\Psi_{p\sigma} \overset{(185,208,209)}{=} U(\Lambda)[(\Lambda^{-1})_\rho{}^\mu P^\rho]\Psi_{p\sigma} \\ &\overset{(182)}{=} \;\; \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} & (211) \end{aligned}$$

$\Rightarrow U(\Lambda)\Psi_{p\sigma}$ je lin. komb. $\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$:

$$U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)\Psi_{\Lambda p,\sigma'} \ . \tag{212}$$

$*$ **ZADAĆA** : naći **strukturu** $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$ koeficijenata i ireducibilnih reprezentacija (irep) nehomogene L. grupe.

STRUKTURA $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$ **U IRREP-ovima nehomog. L. grupe**

$*$ **jedine f-je** p^μ ($p^2 \le 0$) **invarijantne na svojstvene ortokrone L.T.** $\Lambda^\mu{}_\nu$ **su**

$$p^2 = \eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu, \tag{213}$$
$$sign(p^0) \qquad \text{za } p^2 \le 0 \ . \tag{214}$$

$\Rightarrow$ mogućnost izbora **standardnog 4-impulsa** k^μ, preko kojeg se može izraziti svaki p^μ

$$p^\mu = L^\mu{}_\nu(p)k^\nu \ . \tag{215}$$

$L^\mu{}_\nu$ je tzv. **standardna L.T** ovisna samo o p.

$*$ definicija $\Psi_{p\sigma}$

$$\Psi_{p\sigma} \equiv N(p)U(L(p))\Psi_{k\sigma} \ . \tag{216}$$

- $N(p)$ je normalizacijski faktor stanja $\Psi_{p\sigma}$ koji će biti odabran poslije (vidi (243)).
- **VAŽNO** : (216) **veže stanja istog** σ **i različitog 4-impulsa**

• **mala grupa** (s obzirom na smjer k^μ)

$*$ Definicija male grupe :

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} &\overset{(216)}{=} U(\Lambda)N(p)U(L(p))\Psi_{k\sigma} \\ &\overset{(210)}{=} N(p)U(L(\Lambda p))\cdot U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\Psi_{k\sigma} \ . \end{aligned} \tag{217}$$

□ Wignerova rotacija :

$$W(\Lambda,p) \equiv W \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \ : \ k \overset{L(p)}{\rightarrow} p \overset{\Lambda}{\rightarrow} \Lambda p \overset{L^{-1}(\Lambda p)}{\rightarrow} k : \tag{218}$$

$$W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu \ . \tag{219}$$

MALA GRUPA s obzirom na smjer k^μ u vekt. pr. : skup svih transf. koje čuvaju smjer k^μ

Odatle slijedi da $U(W)$ djelujući na stanje $\Psi_{k\sigma}$ samo pomiješa indekse σ

$$U(W)\Psi_{k\sigma} = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k\sigma'} \ . \tag{220}$$

□ **D(W) čine repr. male grupe (za smjer $\vec{k}$)**

$$\begin{aligned} U(\overline{W}W)\Psi_{k\sigma} &= D_{\sigma'\sigma}(\overline{W}W)\Psi_{k\sigma'} \\ &= U(\overline{W})U(W)\Psi_{k\sigma} \ = \ D_{\sigma'\sigma''}(\overline{W})D_{\sigma''\sigma}(W)\Psi_{k\sigma'} \\ &\Downarrow \\ D_{\sigma'\sigma}(\overline{W}W) &= D_{\sigma'\sigma''}(\overline{W})D_{\sigma''\sigma}(W) \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned} \tag{221}$$

□ Lorentz transformat $\Psi_{p\sigma}$

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} &\overset{(217,220)}{=} N(p)D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))U(L(\Lambda p))\Psi_{k\sigma'} \\ &\overset{(216)}{=} \left(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\right) D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'} \ . \end{aligned} \tag{222}$$

⇒ - problem nalaženja $C_{\sigma'\sigma}$ sveo se na problem nalaženja **repki male grupe** za razne smjerove k_μ (vidi tabelu 2).
- to je tzv. **metoda induciranih reprezentacija** (nalaženje repki grupe preko repki male grupe).

NORMALIZACIJA STANJA

∗ Normalizacija $\Psi_{k\sigma}$ stanja

$$(\Psi_{k'\sigma'}, \Psi_{k\sigma}) \equiv \delta(\vec{k}' - \vec{k})\delta_{\sigma'\sigma} \ . \tag{223}$$

$$\Rightarrow \ D^\dagger(W) = D^{-1}(W) \ . \tag{224}$$

D:

$$\begin{aligned} (U(W)\Psi_{k'\sigma'}, U(W)\Psi_{k\sigma}) &\overset{(108,109,125,221)}{=} D^*(W)_{\overline{\sigma}'\sigma'}D(W)_{\overline{\sigma}\sigma}(\Psi_{k'\overline{\sigma}'}, \Psi_{k\overline{\sigma}}) \\ &= D^\dagger(W)_{\sigma'\overline{\sigma}}D(W)_{\overline{\sigma}\sigma}\delta(\vec{k}' - \vec{k}) \end{aligned} \tag{225}$$

Table 2: Standardni 4-impulsi i pripadne male grupe za razne klase 4-impulsa ($\kappa > 0$, energija po volji). $SO(3)$ je grupa rotacija u 3D; $SO(2,1)$, $SO(3,1)$ su Lorentzove grupe u $2+1$ i $3+1$ D; $ISO(2)$ je grupa Euklidske geometrije - sadrži rotacije i translacije u 2D.

		standardni k^μ	mala grupa		
(a)	$p^2 = -M^2 < 0$, $p^0 > 0$	$(0,0,0,M)$	$SO(3)$	fiz	č. mase> 0
(b)	$p^2 = -M^2 < 0$, $p^0 < 0$	$(0,0,0,-M)$	$SO(3)$		
(c)	$p^2 = 0$, $p^0 > 0$	$(0,0,\kappa,\kappa)$	$ISO(2)$	fiz	č. mase$= 0$
(d)	$p^2 = 0$, $p^0 < 0$	$(0,0,\kappa,-\kappa)$	$ISO(2)$		
(e)	$p^2 = N^2 > 0$	$(0,0,N,0)$	$SO(2,1)$		
(f)	$p^\mu = 0$	$(0,0,0,0)$	$SO(3,1)$	fiz	vakuum

$$\overset{(130)}{=} \quad (\Psi_{k'\sigma'}, \Psi_{k\sigma}) \overset{(223)}{=} \delta_{\sigma'\sigma}\delta(\vec{k}' - \vec{k}) \tag{226}$$

$$\overset{(225,226)}{\Rightarrow} \quad \text{Q.E.D. (224)}$$

$*$ Normalizacija $\Psi_{p\sigma}$ stanja

$$[\ (217) \equiv U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} \;=\; N(p)U(L(\Lambda p))\underbrace{U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\Psi_{k\sigma}}_{D_{\sigma'\sigma}(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\Psi_{k\sigma'}}]$$

$$\begin{aligned}
(\Psi_{p'\sigma'}, \Psi_{p\sigma}) \;&=\; (\underbrace{U^{-1}(L(p))}_{U(L^{-1}(p))}\Psi_{p'\sigma'}, \underbrace{U^{-1}(L(p))\Psi_{p\sigma}}_{\overset{(216)}{=}\ N(p)\Psi_{k\sigma}}) \\
&\overset{(217)}{=} \Big(N(p')U(L(\underbrace{L^{-1}(p)}_{\Lambda}p')\underbrace{U(L^{-1}(\underbrace{L^{-1}(p)}_{\Lambda}p')\underbrace{L^{-1}(p)}_{\Lambda}L(p'))\Psi_{k\sigma'}}_{D_{\overline{\sigma}'\sigma'}(L^{-1}(L^{-1}(p)p')L^{-1}(p)L(p'))\Psi_{k\overline{\sigma}'}}, N(p)\Psi_{k\sigma}\Big) \\
&= \quad N^*(p')N(p)D^*_{\overline{\sigma}'\sigma'}(\underbrace{L^{-1}(\overbrace{L^{-1}(p)p'}^{k'})L^{-1}(p)L(p')}_{W(L^{-1}(p),p')}) \\
&\times \quad \Big(\underbrace{\underbrace{U(L(\overbrace{L^{-1}(p)p'}^{k'}))\Psi_{k\overline{\sigma}'}}_{N^{-1}(k')\Psi_{k'\overline{\sigma}'}}, \Psi_{k\sigma}}_{N^{-1}(k')\delta(\vec{k}'-\vec{k})\delta_{\overline{\sigma}'\sigma}}\Big)\ .
\end{aligned} \tag{227}$$

Iz $\delta(\vec{k}' - \vec{k})$ u (227) slijedi

$$
\begin{aligned}
k &= k' && (228)\\
&\Rightarrow k' \equiv L^{-1}(p)p' = k \quad \Rightarrow \quad p' = L(p)k \equiv p, && (229)\\
(228) &\Rightarrow N(k') = N(k) = 1 && (230)\\
&\Rightarrow L(k') = L(k) = 1, && (231)\\
(229) &\Rightarrow N(p') = N(p) && (232)\\
&\Rightarrow L(p') = L(p) && (233)\\
&\Rightarrow L(L^{-1}(p)p') = L(k') = 1, && (234)\\
(232, 233, 234) &\Rightarrow D^{*}_{\overline{\sigma}'\sigma'}\Big(W(L^{-1}(p), p')\Big) = D^{*}_{\overline{\sigma}'\sigma'}(1) = \delta_{\overline{\sigma}'\sigma'}\ . && (235)
\end{aligned}
$$

Stoga iz (227) slijedi,

$$
(\Psi_{p'\sigma'}, \Psi_{p\sigma}) = |N(p)|^2 \delta_{\sigma'\sigma}\delta(\vec{k}' - \vec{k}) \propto \delta_{\sigma'\sigma}\delta(\vec{p}' - \vec{p}), \tag{236}
$$

gdje je proporcionalnost posljedica (229). Nezavisan dokaz proporcionalnosti slijedi iz nalaženja faktora proporcionalnosti izmedju $\delta(\vec{k}' - \vec{k})$ i $\delta(\vec{p}' - \vec{p})$.

Odredjivanje faktora proporcionalnosti izmedju $\delta(\vec{k}' - \vec{k})$ i $\delta(\vec{p}' - \vec{p})$

- sljedeće razmatranje vrijede za fizikalna čestična stanja (slučajevi (a) i (c) u tablici 2) za koju postoje obje invarijante p^μ (213) i (214)
- Lorentz invarijantan integral opće skalarne funkcije $f(p^\mu) = f(p^2)$ može se napisati na sljedeći način :

$$
\begin{aligned}
&\int d^4p\, \delta(p^2 + M^2)\theta(p^0) f(\vec{p}, p^0)\\
&= \int d^3p\, dp^0 \delta((p^0)^2 - \vec{p}^2 - M^2)\theta(p^0) f(\vec{p}, p^0)\\
&= \int d^3p\, \frac{f(\vec{p}, \sqrt{\vec{p}^2 + M^2})}{2\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}
\end{aligned} \tag{237}
$$

$$
\Rightarrow \text{ integracijska mjera } \quad \frac{d^3p}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}} \quad \text{ je inv. na L.T.} \tag{238}
$$

- Rabeći nadalje definiciju δ-funkcije i invarijantnost mjere (238) nalazimo

$$
F(\vec{p}) \equiv \int d^3p' \delta(\vec{p} - \vec{p}') F(\vec{p}') = \int \frac{d^3p'}{\sqrt{\vec{p}'^2 + M^2}} (\sqrt{\vec{p}'^2 + M^2}\delta(\vec{p} - \vec{p}')) F(\vec{p}') \tag{239}
$$

$$\Rightarrow \ \sqrt{\vec{p}^2+M^2}\delta^3(\vec{p}'-\vec{p}) \overset{def}{\equiv} p^0\delta^3(\vec{p}'-\vec{p}) \quad \equiv \quad \text{INV NA L.T.} \tag{240}$$

$$\Rightarrow \ p^0\delta^3(\vec{p}'-\vec{p}) \ = \ k^0\delta^3(\vec{k}'-\vec{k}) \tag{241}$$

$$\Rightarrow \ (\Psi_{p'\sigma'},\Psi_{p\sigma}) \overset{(236)}{=} |N(p)|^2\delta_{\sigma'\sigma}\delta^3(\vec{k}'-\vec{k}) \overset{(241)}{=} \frac{p^0}{k^0}|N(p)|^2\delta^3(\vec{p}'-\vec{p})\delta_{\sigma'\sigma} \ . \tag{242}$$

- Primjetimo da je jednadžbom (241) dokazana proporcionalnost $\delta^3(\vec{p}'-\vec{p})$ i $\delta^3(\vec{k}'-\vec{k})$.
- Postoji sloboda odabira norme, npr. može se odabrati $N(p) \ = \ 1$.

KONVENCIJA TJ. ODABIR NORME U OVOJ KNJIZI

$$N(p) \ = \ \sqrt{k^0/p^0}, \tag{243}$$

je izabrana tako da vrijedi

$$(\Psi_{p'\sigma'},\Psi_{p\sigma}) \ = \ \delta_{\sigma'\sigma}\delta^3(\vec{p}'-\vec{p}) \ . \tag{244}$$

2.5.1 $M > 0$ (Stanja, mala grupa itd. za $M > 0$)

$*$ mala grupa je $SO(3)$ - 3D rotacijska grupa (može se očitati iz standardnog 4 impulsa

$$k^\mu \ = \ (\underbrace{0,0,0,}M) \ . \tag{245}$$

$\Rightarrow$ unitarne reprezentacije mogu se prikazati kao direktne sume ireducibilnih unitarnih reprezentacija $D^j_{\sigma'\sigma}(R)$ dimenzionalnosti $2j+1$ gdje je $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$.
- za inf. rotaciju u x-prostoru,

$$R_{ik} \ = \ \delta_{ik}+\theta_{ik}, \qquad \theta_{ik} \ = \ -\theta_{ki} \ . \tag{246}$$

$D^j_{\sigma'\sigma}(R)$ matrice rotacija u $\Psi_{p\sigma}$ prostoru glase,

$$D^j_{\sigma'\sigma}(1+\theta) \ = \ \delta_{\sigma'\sigma}+\frac{i}{2}\theta_{ik}(J^{(j)}_{ik})_{\sigma'\sigma}, \tag{247}$$

$$(J^{(j)}_1 \pm iJ^{(j)}_2)_{\sigma'\sigma} \ = \ (J^{(j)}_{23} \pm iJ^{(j)}_{31})_{\sigma'\sigma} \ = \ \delta_{\sigma'\sigma\pm1}\sqrt{j(j+1)-\sigma(\sigma\pm1)}, \tag{248}$$

$$(J^{(j)}_3)_{\sigma'\sigma} \ = \ (J^{(j)}_{12})_{\sigma'\sigma} \ = \ \sigma\delta_{\sigma'\sigma}, \tag{249}$$

gdje $\sigma \ = \ -j,\ldots,j$.

$*$ L.T. (222) stanja $M > 0$ i spin$= j$,

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} &\overset{(222)}{=} \left(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\right) D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'} \\
&\overset{(243)}{=} \left(\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\right) D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}, \qquad (250)
\end{aligned}
$$

gdje je $W(\Lambda,p)$ element male grupe (Wignerova rotacija).

U gornjem izrazu još su nam nepoznati stanje $\Psi_{p\sigma}$ i Wignerova rotacija. Za obje veličine nam treba definicija standardnog boosta, $L(p)$.

$*$ Račun Wignerove rotacije, definicija standardnog boosta, $\Psi_{p\sigma}$

$\cdot$ $W(\Lambda,p) \overset{(218)}{\equiv} L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$

$\cdot$ standardni boost (x prostor) [$\mu \equiv (i,0)$, $\nu \equiv (k,0)$]

$$
L^{\mu}{}_{\nu}(p) = \left(\begin{array}{c|c} \delta_{ik} + (\gamma-1)\hat{p}_i\hat{p}_k & \hat{p}_i(\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}} \\ \hline \hat{p}_k(\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}} & \gamma \end{array}\right), \qquad (251)
$$

$$
\gamma \equiv \frac{\sqrt{\vec{p}^2+M^2}}{M}, \qquad \hat{p}_i \equiv \frac{p_i}{|\vec{p}|}. \qquad (252)
$$

$\cdot$ $\Psi_{p\sigma}$

Iz (251), (216) i (243) ($k^0 = M$, $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2+M^2}$) slijedi,

$$
\Psi_{p\sigma} = \sqrt{\frac{M}{p^0}}U(L(p))\Psi_{k\sigma}. \qquad (253)
$$

$*$ Dokaz relacije $\forall p\ W(\mathcal{R},p) = \mathcal{R}$.

- Kada je Lorentzova transformacija Λ jednaka proizvoljnoj rotaciji $\mathcal{R}$ pokazat ćemo da je Wignerova rotacija $W(\mathcal{R},p)$ jednaka rotaciji za bilo koju vrijednost p. Odatle slijedi da se u relativističkoj kvantnoj mehanici kutna količina gibanja definira isto kao u nerelativističkoj. Stoga se tehnike za sferične harmonike, CGK, itd. mogu rabiti isto kao u NR QM. Dokaz slijedi.

□ Pokažimo da se opći Lorentzov boost može prikazati na preko boosta u $\hat{z}$ smjeru i rotacija oko $\hat{p}$ smjerova :

$$L(p) \;=\; R(\hat{p})B(|\vec{p}|)R(\hat{p})^{-1}, \tag{254}$$

$$B(|\vec{p}|) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & (\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & (\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}} & \gamma \end{pmatrix}, \qquad R(p) \;=\; \left(\begin{array}{c|c} \tilde{R}(\hat{p}) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \tag{255}$$

D:

$$\begin{aligned} \hat{p} \;&=\; \tilde{R}(\hat{p})\hat{z} \qquad (\hat{p}_i \;=\; \tilde{R}_{ia}\hat{z}_a, \quad \hat{z}^T \;=\; (0,0,1)), \\ \hat{p}^T \;&=\; \hat{z}^T\tilde{R}^T \;=\; \hat{z}^T\tilde{R}(\hat{p})^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(p) \;&=\; \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} + (\gamma-1)\hat{p}\times\hat{p}^T & (\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}}\hat{p} \\ \hline (\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}}\hat{p}^T & \gamma \end{array}\right) \\ &=\; \left(\begin{array}{c|c} \tilde{R}(\hat{p}) & \\ \hline & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} + (\gamma-1)\hat{z}\times\hat{z}^T & (\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}}\hat{z} \\ \hline (\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}}\hat{z}^T & \gamma \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \tilde{R}(\hat{p})^{-1} & \\ \hline & 1 \end{array}\right) \\ &=\; R(p)B(|\vec{p}|)R(p)^{-1} \qquad\qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

□ Dokaz $B(|\overrightarrow{\mathcal{R}p}|) \;=\; B(|\vec{p}|)$

- iznos 3-impulsa i energije ne ovisi o rotaciji; stoga se ni γ ne mijenja s njom; kako $B(|\vec{p}|)$ ovisi samo o γ ($\vec{z}$ je konstanta), vrijedi i

$$B(|\overrightarrow{\mathcal{R}p}|) \;=\; B(|\vec{p}|)\;. \tag{256}$$

□ Dokaz relacije ($\forall p\; W(\mathcal{R},p) = \mathcal{R}$)

$$\begin{aligned} W(\mathcal{R},p) \;&\overset{(218)}{=}\; L^{-1}(\mathcal{R}p)\mathcal{R}L(p) \\ &\overset{(254)}{=}\; \Big(R(\mathcal{R}\vec{p})B(|\vec{p}|)R^{-1}(\mathcal{R}\vec{p})\Big)^{-1}\cdot\mathcal{R}\cdot R(\vec{p})B(|\vec{p}|)R^{-1}(\vec{p}) \\ &=\; R(\mathcal{R}\vec{p})B^{-1}(|\vec{p}|)\Big(R^{-1}(\mathcal{R}\vec{p})\mathcal{R}R(\vec{p})\Big)B(|\vec{p}|)R^{-1}(\vec{p})\;. \end{aligned} \tag{257}$$

Za operator u velikim zagradama, $R^{-1}(\mathcal{R}\vec{p})\mathcal{R}R(\vec{p})$, $\vec{z}$ je invarijantan smjer,

$$R^{-1}(\widetilde{\mathcal{R}}\hat{p})\mathcal{R}R(\hat{p}) \;:\; \hat{z}\to\hat{p}\to\widetilde{\mathcal{R}}\hat{p}\to\hat{z}.$$

Stoga cjelokupna transformacija može maksimalno biti proizvoljna rotacija oko osi $\hat{z}$,

$$R^{-1}(\widetilde{\mathcal{R}}\hat{p})\mathcal{R}R(\hat{p}) \;=\; R(\theta) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{258}$$

Izrazi (258) i (255) za $R(\theta)$ i $B(|\vec{p}|)$ očigledno komutiraju. Stoga

$$W(\mathcal{R},p) \stackrel{(257)}{=} R(\mathcal{R}\vec{p})\Big(R^{-1}(\mathcal{R}\vec{p})\mathcal{R}R(\vec{p})\Big)R^{-1}(\vec{p}) = \mathcal{R} . \qquad \text{Q.E.D.} \qquad (259)$$

2.5.2 M=0 (Mala grupa, analiza male grupe i njene algebre, stanja)

i. Mala grupa

- Table 2 $\quad\Rightarrow\quad k = (0,0,1,1)$.

□ Nalaženje elemenata male grupe

Elementi male grupe (vidi tabelu 2 i Eq. (219)) zadovoljavaju

$$W^{\mu}_{\ \nu}k^{\nu} = k^{\mu}, \qquad k = (0,0,1,1) . \qquad (260)$$

Djelovanjem na vremenoliki 4-vektor

$$t^{\mu} = (0,0,0,1), \qquad (261)$$

Wignerovom rotacijom dobija se 4-vektor Wt koji zbog invarijantnosti na L.T. zadovoljava

$$(Wt)^{\mu}(Wt)_{\mu} = t^{\mu}t_{\mu} \stackrel{(261)}{=} -1, \qquad (262)$$

$$(Wt)^{\mu}(Wk)_{\mu} = t^{\mu}k_{\mu} \stackrel{(260,261)}{=} -1 . \qquad (263)$$

Pretpostavljajući najopćenitiji oblik Wt,

$$Wt = (\alpha,\beta,\zeta,\xi), \qquad (264)$$

nalazimo ξ i ζ kao f-je α i β,

$$\begin{aligned}(Wt)^{\mu}(Wk)_{\mu} &\stackrel{(260)}{=} (Wt)^{\mu}(k)_{\mu} \stackrel{(261,264)}{=} \zeta - \xi = -1 \quad \equiv \quad \xi = 1+\zeta, \qquad (265)\\ (Wt)^{\mu}(Wt)_{\mu} &= \alpha^2+\beta^2+\zeta^2-(1+\zeta)^2 = -1\\ &\Rightarrow \qquad \zeta = \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2). \qquad (266)\end{aligned}$$

Stoga nam je poznat zadnji stupac matrice $W^{\mu}_{\ \nu}$,

$$(W)(t) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot & \beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \zeta \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1+\zeta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\end{pmatrix} . \qquad (267)$$

Tu "·" predstavljaju još neodredjene matrične elemente. Treći stupac možemo naći rabeći relaciju (260),

$$
\begin{aligned}
(W)(k) &= (k) \equiv \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot & \beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \zeta \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1+\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow (W) &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -\alpha & \alpha \\ \cdot & \cdot & -\beta & \beta \\ \cdot & \cdot & 1-\zeta & \zeta \\ \cdot & \cdot & -\zeta & 1+\zeta \end{pmatrix}. \qquad (268)
\end{aligned}
$$

Preostale neodredjene retke ćemo preuzeti iz Weinberga i dati uputu kako se mogu provjeriti.

☐ L.T. male grupe. Djelovanje $W^\mu_{\ \nu}$ na t^ν je isto kao djelovanje transformacije

$$
S^\mu_{\ \nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1-\zeta & \zeta \\ \alpha & \beta & -\zeta & 1+\zeta \end{pmatrix}. \qquad (269)
$$

Provjerimo da li je $S^\mu_{\ \nu}$ Lorentz transformacija. Da bi to bilo zadovoljeno moraju biti ispunjeni uvjeti (154)≡(171) i (155)≡(172)

$$
\begin{aligned}
(154) &\equiv \eta_{\mu\nu} S^\mu_{\ \rho} S^\nu_{\ \sigma} = \eta_{\rho\sigma} \equiv S^\mu_{\ \rho} (\eta S \eta)_\mu^{\ \overline{\rho}} = \delta_\rho^{\ \overline{\rho}} \equiv S^T \overline{S} = \mathbb{1}, \qquad (270) \\
(155) &\equiv S^\nu_{\ \sigma} S^\kappa_{\ \tau} \eta^{\sigma\tau} = \eta^{\nu\kappa} \equiv (\eta S \eta)_{\overline{\kappa}}^{\ \tau} S^\kappa_{\ \tau} = \delta^\kappa_{\overline{\kappa}} \equiv \overline{S}^T S = \mathbb{1}, \qquad (271)
\end{aligned}
$$

$$
\overline{S} \equiv \{S_\alpha^{\ \beta}\} = \{(\eta S \eta)_\alpha^{\ \beta}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta & -\beta \\ \alpha & \beta & 1-\zeta & -\zeta \\ -\alpha & -\beta & \zeta & 1+\zeta \end{pmatrix}. \qquad (272)
$$

Za DZ provjerite relacije (270) i (271).

☐ veza W i $S \equiv S(\alpha, \beta)$

$$
\begin{aligned}
S(\alpha,\beta)t &= Wt \quad \Rightarrow \quad S^{-1}(\alpha,\beta)W = \mathcal{R} \in \{\text{3D rot}\}; \\
S(\alpha,\beta)k &= Wk \quad \Rightarrow \quad S^{-1}(\alpha,\beta)W = R(\theta) \in \{\text{rot oko } \hat{z} \text{ osi}\}; \qquad (273)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (274)
$$

□ Stoga je **opći grupni element male grupe**

$$W(\theta,\alpha,\beta) \;=\; S(\alpha,\beta)R(\theta)\;. \tag{275}$$

□ **Identifikacija male grupe : ISO(2)**

- $\{W(\theta,\alpha,\beta)\}$ ima dvije Abelove podgrupe, skup rotacija oko $\hat{z}$ osi, $\{R(\theta)\}$, i skup transformacija $\{S(\alpha,\beta)\}$. Za DZ dokažite da vrijedi

$$\begin{aligned} R(\overline{\theta})R(\theta) &= R(\overline{\theta}+\theta), & (276)\\ S(\overline{\alpha},\overline{\beta})S(\alpha,\beta) &= S(\overline{\alpha}+\alpha,\overline{\beta}+\beta)\;. & (277)\end{aligned}$$

- Nadalje, $\{S(\alpha,\beta)\}$ je invarijanta (normalna) podgrupa grupe $\{W(\theta,\alpha,\beta)\}$:

$$R(\theta)S(\alpha,\beta)R^{-1}(\theta) \;=\; S(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta,-\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)\;. \tag{278}$$

[Dovoljno je provjeriti za rotacije jer je za svaki $S'\in\{S\}$ očigledno $S'SS'^{-1}\in\{S\}$]

D:

Uvedimo pokrate $\cos\theta = c_\theta$, $\sin\theta = s_\theta$, $\overline{\alpha} = \alpha\cos\theta+\beta\sin\theta$, $\overline{\beta} = -\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta$ i

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\theta) &= \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta \\ -s_\theta & c_\theta \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1-\zeta & \zeta \\ -\zeta & 1+\zeta \end{pmatrix}\;. & (279)\end{aligned}$$

Odatle

$$\begin{aligned} R(\theta)S(\alpha,\beta)R^{-1}(\theta) &= \begin{pmatrix} \tilde{R} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & A \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{R}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \tilde{R} & \tilde{R}A \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{R}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{R}\tilde{R}^{-1} & \tilde{R}A \\ B\tilde{R}^{-1} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \tilde{R}A \\ B\tilde{R}^{-1} & C \end{pmatrix}\;. & (280)\end{aligned}$$

Budući da vrijedi

$$\begin{aligned} \tilde{R}A &= \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta \\ -s_\theta & c_\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_\theta\alpha - s_\theta\beta & c_\theta\alpha + s_\theta\beta \\ s_\theta\alpha - c_\theta\beta & -s_\theta\alpha + c_\theta\beta \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} -\overline{\alpha} & \overline{\alpha} \\ -\overline{\beta} & \overline{\beta} \end{pmatrix}, \\ B\tilde{R}^{-1} &\overset{\text{DZ}}{=} \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ \overline{\alpha} & \overline{\beta} \end{pmatrix}, \\ \overline{\zeta} &\overset{\text{DZ}}{=} \frac{1}{2}(\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2) = \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2) = \zeta, & (281)\end{aligned}$$

jednadžba (278) je ispunjena.

• Struktura $\{W\}$ odgovara tzv. **ISO(2) grupi : sadrži rotacije $\{R(\theta)\}$ i translacije $\{S(\alpha,\beta)\}$ u 2D**
• Budući da mala grupa (ISO(2)) **sadrži Abelovu invarijantnu podgrupu**
⇒ ISO(2) nije polu-jednostavna grupa (semisimple group)

ii. Algebra male grupe

☐ Infinitezimalni element male grupe (x prostor)

$$[W(\theta,\alpha,\beta)^\mu{}_\nu]_{INF} \;=\; \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \;=\; \delta^\mu{}_\nu + \begin{pmatrix} 0 & \theta & -\alpha & \alpha \\ -\theta & 0 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{282}$$

$$\Rightarrow\;\omega_{\mu\nu} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \theta & -\alpha & \alpha \\ -\theta & 0 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}\;. \tag{283}$$

☐ Pripadni op. u Hilb. prostoru:

$$\begin{aligned} U(W(\theta,\alpha,\beta)) &= \mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} \;=\; \mathbb{1} + i\alpha(-J^{13}+J^{10}) + i\beta(-J^{23}+J^{20}) + i\theta J^{12} \\ &= \mathbb{1} + i\alpha(J_2+K_1) + i\beta(-J_1+K_2) + i\theta J_3 \\ &= \mathbb{1} + i\alpha A + i\beta B + i\theta J_3 \end{aligned} \tag{284}$$

$$A \;=\; J_2 + K_1 \qquad B \;=\; -J_1 + K_2\;. \tag{285}$$

☐ algebra male grupe :
(Podsjetnik : Lorentz algebra : (196) $\equiv\; [J_i,J_j] \;=\; i\varepsilon_{ijk}J_k$,
(197) $\equiv\; [J_i,K_j] \;=\; i\varepsilon_{ijk}K_k$, (198) $\equiv\; [K_i,K_j] \;=\; -i\varepsilon_{ijk}J_k, \ldots$)

$$[J_3,A] \;=\; iB \qquad D:\; i(-J_1+K_2) \;=\; iB, \tag{286}$$
$$[J_3,B] \;=\; -iA \qquad D:\; i(-J_2-K_1) \;=\; -iA, \tag{287}$$
$$[A,B] \;=\; 0 \qquad D:\; i(J_3-J_3+0+0) \;=\; 0\;. \tag{288}$$

iii. Stanja

Budući da u algebri male grupe postoje dva skupa komutirajućih operatora, $\{A, B\}$ i $\{J_3\}$, imamo dvije mogućnosti označavanja stanja (standardnog 4-impulsa) :

A. Označavanje kvantnim brojevima operatora A **i** B : $\Psi_{k\dots} \to \Psi_{kab}$

$$\begin{aligned} A\Psi_{kab} &= a\Psi_{kab}, \\ B\Psi_{kab} &= b\Psi_{kab} \ . \end{aligned} \tag{289}$$

Problem : Ako je $a \neq 0$ ili $b \neq 0$ dobija se **kontinuum svojstvenih vrijednosti** koji se dobija zbog toga što transformacije $S(\alpha, \beta)$ čine invarijantnu (normalnu) podgrupu male grupe (vidi (278)),

$$\begin{aligned} U(R(\theta))AU^{-1}(R(\theta)) &= \cos\theta\, A - \sin\theta\, B, \\ U(R(\theta))BU^{-1}(R(\theta)) &= \sin\theta\, A + \cos\theta\, B \ . \end{aligned} \tag{290}$$

Rabeći argumente poglavlja §2.2 (vidi Eq. (148)), iz generatora Abelovih podgrupa male grupe nalazimo **operatore Abelovih podgrupa za konačne** α**,** β **i** θ

$$U(S(\alpha, \beta)) \overset{(148)}{=} \exp(i\alpha A + i\beta B), \tag{291}$$

$$U(R(\theta)) \overset{(148)}{=} \exp(iJ_3\theta) \ . \tag{292}$$

D (290):

$$\begin{aligned} U(S(\alpha c_\theta + \beta s_\theta, -\alpha s_\theta + \beta c_\theta)) \ &= \ U(R)U(S(\alpha, \beta))U^{-1}(R) \\ &= e^{i(\alpha U(R)AU^{-1}(R) + \beta U(R)BU^{-1}(R))} \\ &= e^{i(\alpha c_\theta + \beta s_\theta)A + i(-\alpha s_\theta + \beta c_\theta)B} \ = \ e^{i[\alpha(c_\theta A - s_\theta B) + \beta(s_\theta A + c_\theta B)]} \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Stoga za kontinuum stanja,

$$\Psi^\theta_{kab} \equiv U^{-1}(R(\theta))\Psi_{kab}, \tag{293}$$

vrijedi

$$\begin{aligned} A\Psi^\theta_{kab} &= (a\cos\theta - b\sin\theta)\Psi^\theta_{kab}, \\ B\Psi^\theta_{kab} &= (a\sin\theta + b\cos\theta)\Psi^\theta_{kab} \ . \end{aligned} \tag{294}$$

D: Npr. za $A\Psi^\theta_{kab}$

$$\begin{aligned} A\Psi^\theta_{kab} &= AU^{-1}(R(\theta))\Psi_{kab} \\ &= U^{-1}(R(\theta))(c_\theta A - s_\theta B)\Psi_{kab} \ = \ (c_\theta a - s_\theta b)\Psi^\theta_{kab} \ . \end{aligned}$$

Dakle, postoji kontinuum stanja Ψ^θ_{kab} sa kontinuiranim spektrom $(a\cos\theta - b\sin\theta, a\sin\theta + b\cos\theta)$. Q.E.D.

Exp: Eksperimentalno takav kontinuum nije opažen. Stoga označavanje stanja sa svojstvenim stanjima operatora A i B ne odgovara fizikalnoj situaciji.

B. Označavanje kvantnim brojevima operatora $J_3 : \Psi_{k...} \to \Psi_{k\sigma}$

Stavimo

$$\begin{aligned} A\Psi_{k\sigma} &= B\Psi_{k\sigma} = 0, \\ J_3\Psi_{k\sigma} &= \sigma\Psi_{k\sigma} \,. \end{aligned} \tag{295}$$

Pitanje koje se nameće jest što je fizikalno značenje sv. vrijednosti σ. Budući da je smjer 3-impulsa $\hat{k}$ 4-impulsa k po definiciji jednak pozitivnom smjeru z-osi, $\hat{z}$, vrijedi

$$J_3 = \hat{z}\vec{J} = \hat{k}\vec{J}, \tag{296}$$

tj. J_3 odgovara projekciji operatora kutne količine gibanja na smjer gibanja, odnosno **operatoru heliciteta**. Stoga je σ helicitet stanja i nije treća komponenta spina stanja.

iv. Račun svojstava općeg $M = 0$ stanja pri L.T.

□ **Djelovanje općeg elementa male grupe, danog sa (275), na stanje "standardnog" impulsa** $\Psi_{k\sigma}$

$$U(W)\Psi_{k\sigma} \overset{(275),(291),(292)}{=} \exp(i\alpha A + i\beta B)\exp(iJ_3\theta)\Psi_{k\sigma} = \exp(i\theta\sigma)\Psi_{k\sigma} \tag{297}$$

daje **Wignerovu rotaciju za $M = 0$ stanje**,

$$D_{\sigma'\sigma}(W) \overset{(220)}{=} \exp(i\theta\sigma)\delta_{\sigma'\sigma} \,. \tag{298}$$

□ Uz normalizaciju (243), **djelovanje opće L.T. na opće stanje $\Psi_{p\sigma}$ za $M = 0$** glasi

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\Psi_{p\sigma} &\overset{(222)}{=} \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p\sigma} \\ &\overset{(222,298)}{=} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma\theta(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma}, \end{aligned} \tag{299}$$

gdje je kut $\theta(\Lambda, p)$ definiran relacijom

$$W(\Lambda,p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \overset{(275)}{\equiv} S(\alpha(\Lambda,p),\beta(\Lambda,p))R(\theta(\Lambda,p)) \,. \tag{300}$$

v. Diskretnost sv. vrijednosti σ

Diskretnost σ ne proizlazi iz komutacijskih relacija algebre male grupe kao za $M > 0$ slučaj. Dosadašnja analiza pokazuje da je σ realno. Diskretnost σ slijedi iz topoloških razmatranja Lorentzove grupe. Pokazuje se da je ona dvostruko povezana s obzirom na rotacijsku podgrupu, a jednostruko s obzirom na ostale transformacije. Odatle slijedi da rotacija za 4π uvijek daje isto stanje, pa σ u Wignerovoj rotaciji (298) mora biti polucjelobrojan.

vi. Definicija standardne Lorentzove transformacije za $M = 0$ stanja, račun elementa male grupe

☐ Kao i kod $M > 0$ stanja za nalaženje općeg elementa male grupe $W(\Lambda, p)$ potreban je **izraz za standardnu Lorentzovu transformaciju** (uočiti razliku stand. L.T. $M > 0$ (254) i $M = 0$ (301) stanja)

$$L(p) \equiv R(\hat{p})B(|\vec{p}|/\kappa) \tag{301}$$

gdje je $B(u)$ boost u $\hat{z}$ smjeru, a $R(\vec{p})$ rotacija koja preslikava $\hat{z}$ u $\hat{p}$,

$$B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (u^2+1)/2u & (u^2-1)/2u \\ 0 & 0 & (u^2-1)/2u & (u^2+1)/2u \end{pmatrix} . \tag{302}$$

D:

$*$ standardni boost bezmasene čestice $B(u)$:

$$\begin{aligned} p^0 &= \gamma k^0 + \beta\gamma k = (\cosh\omega + \sinh\omega)k = e^{\omega}k = uk, \\ p &= p_0 \\ &\Rightarrow \cosh\omega = \frac{1}{2}(u + \frac{1}{u}), \qquad \sinh\omega = \frac{1}{2}(u - \frac{1}{u}) . \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

$*$ rotacija $R(\hat{p})$:

- Pretpostavimo da je $\hat{p}$ zadan polarnim i azimutalnim kutevima ϕ i θ

$$\hat{p} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) . \tag{303}$$

Rotacija se tada može opisati sa dvama uzastopnim rotacijama, rotacijom oko $\hat{y}$ osi $R(\theta)$: $(0,0,1) \to (\sin\theta, 0, \cos\theta)$ i rotacijom oko $\hat{z}$ osi $R(\phi)$: $(\sin\theta, 0, \cos\theta) \to \hat{p}$:

$$U(R(\hat{p})) = \exp(i\phi J_3)\exp(i\theta J_2), \tag{304}$$

gdje su $0 \leq \theta \leq \pi$ i $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Rotacija nije dana u x tj. p prostoru već u Hilbertovom prostoru jer u Hilbertovom prostoru dodavanjem 2π kutu ϕ $U(R(\hat{p}))$ mijenja predznak dok je u p prostoru jednoznačna.

vii. Helicitet je invarijantan na svojstvene ortokrone Lorentz transformacije

∗ Iz izraza za element male grupe za opću ortokronu svojstvenu L.T.,

$$(298) \equiv D_{\sigma'\sigma}(W) = \exp(i\theta\sigma)\delta_{\sigma'\sigma} \propto \delta_{\sigma'\sigma}, \quad (305)$$

slijedi da je helicitet invarijantan na opću ortokronu svojstvenu L.T. To na prvi pogled znači da bezmasene čestice imaju samo jednu vrijednost heliciteta.

∗ Paritet medjutim mijenja predznak heliciteta. Stoga bezmasene čestice nemaju jednu moguću već imaju dvije moguće vrijednosti heliciteta. Za razliku, masivne čestice imaju $(2j+1)$ sv. vrijednosti operatora J_3.

∗ Naziv čestica i sačuvanje pariteta:
- jake sile i EM sile čuvaju paritet, pa je paritet dobar QB : oba stanja imaju isto ime (samo je u opisu stanja i helicitet : Npr. $\gamma_{k\pm1}$
- slabe sile ne čuvaju paritet; paritet nije dobar QB; stanja suprotnog heliciteta istih aditivnih QB suprotnih heliciteta ne postoje (npr. $\nu_{k-\frac{1}{2}}$ i $\overline{\nu}_{k\frac{1}{2}}$ nemaju isti leptonski broj L); stanja nemaju stoga ni isto ime).

2.6 Prostorna inverzija i vremenski obrat

• U poglavlju §2.3 (vidi Eq. (164)) vidjeli smo da je struktura Poincaréovih transformacija sljedeća.

$$\begin{aligned}\{\text{Poincaréove T}\} &= \{\text{translacije}\} \otimes_s \{\text{homogene L.T.}\}\\ \{\text{homogene L.T.}\} &= \{\text{svojstv. ortokrone hom. L.T.}\} \otimes (\mathbb{1} \oplus \mathcal{P} \oplus \mathcal{T} \oplus \mathcal{PT}),\end{aligned} \tag{306}$$

gdje su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{T}$ transformacije prostorne inverzije (pariteta) i vremenskog obrata,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{\mu}_{\ \nu} &= diag(-1,-1,-1,1),\\ \mathcal{T}^{\mu}_{\ \nu} &= diag(1,1,1,-1).\end{aligned} \tag{307}$$

• **Sačuvanje P i T :**
Uobičajeno je **PRETPOSTAVITI** da je množenje Poincaréove grupe u Hilbertovom prostoru (vidi Tab. 1),

$$U(\overline{\Lambda},\overline{a})U(\Lambda,a) = U(\overline{\Lambda}\Lambda,\overline{\Lambda}a+\overline{a}), \tag{308}$$

očuvano ako se uključe reprezentanti $\mathcal{P}$ i T transformacija,

$$P \equiv U(\mathcal{P}), \qquad T \equiv U(\mathcal{T}). \tag{309}$$

Drugim riječima

$$PU(\Lambda,a)P^{-1} = U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1},\mathcal{P}a), \tag{310}$$

$$TU(\Lambda,a)T^{-1} = U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1},\mathcal{T}a). \tag{311}$$

Postojanje operatora (309) koji zadovoljavaju jednadžbe (310) i (311) vode na sačuvanje pariteta i vremenskog obrata (vidi dokaz ispod). Jednadžbe (308, 309, 310, 311) uključuju većinu onoga što se misli pod sačuvanjem P i T.

Exp :
· 1956-57 Wu : nesač. P : (310) vrijedi ako se zanemare slabe int.
· 1964 Cronin : nesač. CP : uz pretp očuvanja CPT (311) vrijedi ako se zanemare slabe int.
· 1998 CPLEAR collab. : izmjerena T asimetrija (6.6×10^{-3}).
· 1999 CPLEAR collab. : povjerena CPT simetrija s preciznošću 1×10^{-19}.

□ **Analiza (310) i (311) za infinitezimalne P.T. $U(\Lambda,a)$; Transformacija generatora P.T. na P i T; Dokaz očuvanja P i T iz pretpostavki (309, 310, 311)**

Lorentzova transformacija generatora svojstvenih ortokronih P.T. dobija se iz produkta $U(\Lambda,a)U_{INF}(\omega,\varepsilon)U^{-1}(\Lambda,a)$ gdje je

$$U_{INF}(\omega,\varepsilon) = \mathbb{1} + \frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\varepsilon_\rho P^\rho \quad \text{(vidi pogl. §2.4).} \tag{312}$$

U svojoj potpunosti, tj. ako se ne uključuje uvjet unitarnosti svojst. ortokronih P.T., transformacije generatora Poincaréove grupe (185,186), glase

$$U(\Lambda,a)iP^{\rho}U^{-1}(\Lambda,a) \stackrel{(185)}{=} \Lambda_{\mu}{}^{\rho}iP^{\mu}, \tag{313}$$

$$U(\Lambda,a)iJ^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda,a) \stackrel{(186)}{=} \Lambda_{\mu}{}^{\rho}\Lambda_{\nu}{}^{\sigma}i(J^{\mu\nu}-a^{\mu}P^{\nu}+a^{\nu}P^{\mu}). \tag{314}$$

Analogno, Eqs. (310) i (311) daju

$$PiJ^{\rho\sigma}P^{-1} = i\mathcal{P}_{\mu}{}^{\rho}\mathcal{P}_{\nu}{}^{\sigma}J^{\mu\nu}, \tag{315}$$

$$PiP^{\rho}P^{-1} = i\mathcal{P}_{\mu}{}^{\rho}P^{\mu}, \tag{316}$$

$$TiJ^{\rho\sigma}T^{-1} = i\mathcal{T}_{\mu}{}^{\rho}\mathcal{T}_{\nu}{}^{\sigma}J^{\mu\nu}, \tag{317}$$

$$TiP^{\rho}T^{-1} = i\mathcal{T}_{\mu}{}^{\rho}P^{\mu}. \tag{318}$$

Faktor "i" je zadržan zbog toga jer još nije odredjeno da li su P i T unitarni ili antiunitarni operatori.

• **Unitarnost** P

$$(316)_{\rho=0} \Rightarrow PiHP^{-1} = i\mathcal{P}_{0}{}^{0}H = iH. \tag{319}$$

$*$ antiunitarnost (unitarnost) bi dala $i \to -i$ ($i \to i$)

$$\Rightarrow -PHP^{-1} = H \qquad (PHP^{-1} = H)$$

$$\Leftrightarrow PH = -HP \qquad (PH = HP). \tag{320}$$

$\Rightarrow \forall$ sv. stanje H, Ψ, $H\Psi = E\Psi$, postojalo bi stanje $P\Psi$ suprotne (iste) energije

$$PH\Psi = EP\Psi = \mp HP\Psi \Leftrightarrow H(P\Psi) = \mp E(P\Psi) \tag{321}$$

$\Rightarrow$ ako bi P bio antiunitaran za svako sv. stanje H bi se javljalo drugo stanje suprotne (negativne) energije; za unitaran oprerator javljaju se dva u energiji degenerirana stanja

exp : nisu opažena $-E$ stanja.

$\Rightarrow$ $\boxed{P \textbf{ je unitaran}}$

$$\Rightarrow PiP^{-1} = i, \tag{322}$$

$$\Rightarrow PH = HP \qquad \Leftrightarrow \qquad [P,H] = 0 \tag{323}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{P \textbf{ očuvan}}$.

• Antiunitarnost T

$$(318)_{\rho=0} \Rightarrow TiHT^{-1} = i\mathcal{T}_{0}{}^{0}H = -iH. \tag{324}$$

$*$ antiunitarnost (unitarnost) bi dala

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad -THT^{-1} \;=\; -H \qquad (THT^{-1} \;=\; -H) && (325)\\ &\Leftrightarrow \quad TH \;=\; HT \qquad (TH \;=\; -HT) && (326) \end{aligned}$$

$$(H\Psi \;=\; E\Psi) \;\Rightarrow\; TH\Psi \;=\; ET\Psi \;=\; \pm H(T\Psi) \;\Leftrightarrow\; H(T\Psi) \;=\; \pm E(T\Psi). \qquad (327)$$

exp : nisu opažena $-E$ stanja.

$\Rightarrow$ $\boxed{T \textbf{ je antiunitaran}}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad TiT^{-1} \;=\; -i, && (328)\\ &\Rightarrow \quad TH \;=\; HT \qquad \Leftrightarrow \qquad [T,H] \;=\; 0. && (329) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{T \textbf{ očuvan}}$.

$\Downarrow$

- **P i T TRANSFORMACIJE GENERATORA P.T.**

$$\begin{aligned} PHP^{-1} &= +H, && (330)\\ P\vec{J}P^{-1} &= +\vec{J}, && (331)\\ P\vec{K}P^{-1} &= -\vec{K}, && (332)\\ P\vec{P}P^{-1} &= -\vec{P}, && (333)\\ THT^{-1} &= +H, && (334)\\ T\vec{J}T^{-1} &= -\vec{J}, && (335)\\ T\vec{K}T^{-1} &= +\vec{K}, && (336)\\ T\vec{P}T^{-1} &= -\vec{P}. && (337) \end{aligned}$$

- **TRANSFORMACIJA 1-čestičnih stanja na P i T**

☐ $\underline{P\,:\,M > 0}$

$*$ Dokaz da je standardno stanje svojstveno stanje operatora pariteta, $P\Psi_{k\sigma} \;=\; \eta_\sigma \Psi_{k\sigma}$
Svojstveno stanje $\Psi_{k\sigma}$ je svojstveno stanje operatora $\vec{P}$, H i J_3 :

$$(\vec{P}, H, J_3)\Psi_{k\sigma} \;=\; (\vec{0}, M, \sigma)\Psi_{k\sigma}. \qquad (338)$$

Prva i druga jednakost slijedi iz (205) za opće stanje $\Psi_{p\sigma}$ a treća iz (249).
Uporabom Eqs. (330,331,333) iz (338) slijedi

$$
\begin{aligned}
& (\vec{0}, M, \sigma) P\Psi_{k\sigma} && (339)\\
&= P(\vec{P}, H, J_3)P^{-1}P\Psi_{k\sigma} \;=\; (-\vec{P}, H, J_3)P\Psi_{k\sigma} && (340)\\
&\Rightarrow (\vec{P}, H, J_3)P\Psi_{k\sigma} \;=\; (\vec{0}, M, \sigma)P\Psi_{k\sigma}. && (341)
\end{aligned}
$$

Dakle sve tri svojstvene jednadžbe su iste za stanja $\Psi_{k\sigma}$ (Eq. (338)) i $P\Psi_{k\sigma}$ (Eq. (341)). Odatle slijedi da su ta dva stanja linearno zavisna, odnosno da je stanje $\Psi_{k\sigma}$ svojstveno stanje pariteta,

$$
P\Psi_{k\sigma} \;=\; \eta_\sigma \Psi_{k\sigma}. \tag{342}
$$

Faza η_σ u principu može zavisiti o stanju tj. kvantnom broju (QB) σ.

$*$ Neovisnost faze o stanju : $\eta_\sigma \;=\; \eta$; intristični paritet čestice

$$
(J_1 \pm iJ_2)\Psi_{k\sigma} \stackrel{(248)}{=} \sqrt{j(j+1) - \sigma(\sigma \pm 1)}\Psi_{k\sigma\pm1} \qquad | \; P\cdot \tag{343}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow P(J_1 \pm iJ_2)P^{-1}P\Psi_{k\sigma} \;=\; \sqrt{j(j+1) - \sigma(\sigma \pm 1)}P\Psi_{k\sigma\pm1}\\
&\equiv (J_1 \pm iJ_2)(\eta_\sigma\Psi_{k\sigma}) \;=\; \sqrt{j(j+1) - \sigma(\sigma \pm 1)}(\eta_{\sigma\pm1}\Psi_{k\sigma\pm1})\\
&\equiv \sqrt{j(j+1) - \sigma(\sigma \pm 1)}(\eta_\sigma\Psi_{k\sigma\pm1}) \;=\; \sqrt{j(j+1) - \sigma(\sigma \pm 1)}(\eta_{\sigma\pm1}\Psi_{k\sigma\pm1})
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \eta_\sigma \;=\; \eta_{\sigma\pm1} \;=\; \eta \tag{344}
$$

$$
\Rightarrow P\Psi_{k\sigma} \;=\; \eta\Psi_{k\sigma}. \tag{345}
$$

Dakle faza η je neovisna o σ. Faza η je tzv. **intristični** (svojstveni, osobni) **paritet** čestice. On ovisi samo o vrsti (tipu) čestice.

$*$ Djelovanje pariteta na stanje konačnog impulsa, $P\Psi_{p\sigma}$

Rabeći izraze za stanje konačnog impulsa $\Psi_{p\sigma}$, standardni boost $L(p)$ te za $\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1}$ (i invarijantost P^0 na paritet)

$$
\begin{aligned}
\Psi_{p\sigma} &\stackrel{(216)}{=} N(p)U(L(p))\Psi_{k\sigma} \stackrel{(243,245)}{=} \sqrt{\frac{M}{P^0}}U(L(p))\Psi_{k\sigma}, && (346)\\
L(p) &\stackrel{(251,252)}{=} \left(\begin{array}{c|c} \delta_{ik} + (\gamma-1)\hat{p}_i\hat{p}_k & \hat{p}_i(\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}} \\ \hline \hat{p}_k(\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}} & \gamma \end{array}\right), && (347)\\
\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1} &= L(-\vec{p}, p^0) \;=\; L(\mathcal{P}p), && (348)
\end{aligned}
$$

nalazimo izraz za $P\Psi_{p\sigma}$,

$$\begin{aligned}
P\Psi_{p\sigma} &= \sqrt{\frac{M}{P^0}} P U(L(p)) P^{-1} P \Psi_{k\sigma} \\
&\overset{(310)}{=} \sqrt{\frac{M}{P^0}} U(\mathcal{P} L(p) \mathcal{P}^{-1}) \eta \Psi_{k\sigma} \;=\; \eta \sqrt{\frac{M}{P^0}} U(L(\mathcal{P}p)) \Psi_{k\sigma} \qquad (349) \\
&\Downarrow \\
P\Psi_{p\sigma} &= \eta \Psi_{\mathcal{P}p\sigma} \, . \qquad (350)
\end{aligned}$$

□ $\underline{T \,:\, M > 0}$

∗ Djelovanje T operatora na $\Psi_{k\sigma}$

Djelujući na svojstvene jednadžbe (338) T operatorom dobijamo,

$$T \cdot (338) \;\equiv\; (\vec{0}, M, \sigma)\, T\Psi_{k\sigma} \;=\; T(\vec{P}, H, J_3) T^{-1}\, T\Psi_{k\sigma} \;=\; (-\vec{P}, H, -J_3)\, T\Psi_{k\sigma}$$

$$\Rightarrow\; (\vec{P}, H, J_3)\, T\Psi_{k\sigma} \;=\; (\vec{0}, M, -\sigma)\, T\Psi_{k\sigma} \qquad (351)$$

$$\Rightarrow\; T\Psi_{k\sigma} \overset{(351)}{=} \zeta_\sigma \Psi_{k-\sigma} \, . \qquad (352)$$

Jednadžba (351) ukazuje da je $T\Psi_{k\sigma}$ proporcionalno $\Psi_{k-\sigma}$ što vodi na jednadžbu (352). ζ_σ je fazni faktor koji može ovisiti o σ.

∗ Fazna ovisnost ζ_σ o σ

Djejujući na (343) koja povezuje stanja različitih vrijednosti σ sa T dobijamo

$$\begin{aligned}
(343) \quad &\equiv \quad (J_1 \pm iJ_2)\Psi_{k\sigma} \;=\; \sqrt{j(j+1) - \sigma(\sigma \pm 1)}\,\Psi_{k\sigma\pm1} \qquad |\, T \cdot \\
&\overset{(328,335,352)}{\Rightarrow} \quad \underbrace{(-J_1 \pm iJ_2)}_{-J_\mp}(\zeta_\sigma \Psi_{k-\sigma}) \;=\; \sqrt{j(j+1) - \sigma(\sigma \pm 1)}\,\zeta_{\sigma\pm1} \Psi_{k\,-\sigma\mp1} \qquad (353) \\
&\overset{(343)}{\Leftrightarrow} \quad -\zeta_\sigma \sqrt{j(j+1) - (-\sigma)(-\sigma \mp 1)}\,\Psi_{k\,-\sigma\mp1} \\
&\qquad\quad = \; \zeta_{\sigma\pm1} \sqrt{j(j+1) - \sigma(\sigma \pm 1)}\,\Psi_{k\,-\sigma\mp1} \qquad (354) \\
&\Rightarrow \quad \boxed{-\zeta_\sigma \;=\; \zeta_{\sigma\pm1}} \qquad (355) \\
&\Rightarrow \quad \zeta_\sigma \;\propto (-1)^\sigma \qquad \text{ili} \qquad \zeta_\sigma \;\propto (-1)^{-\sigma} \, . \qquad (356)
\end{aligned}$$

$*$ zapis (pretpostavka oblika) ζ_σ preko faze ζ koja ovisi samo o tipu čestice

$$\zeta_\sigma \;=\; \zeta(-)^{j-\sigma}, \tag{357}$$
$$T\Psi_{k\sigma} \;=\; \zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{k\,-\sigma}\;. \tag{358}$$

$*$ ζ je nefizikalna faza

Pokažimo da se faza ζ može eliminirati iz valne funkcije, tj. da faza ζ nije intristično svojstvo čestice. Rabeći slobodu izbora faze valne funkcije, definiramo

$$\Psi_{k\sigma} \rightarrow \Psi'_{k\sigma} \;=\; \zeta^{\frac{1}{2}}\Psi_{k\sigma}, \tag{359}$$

koja nema fazu ζ u jednadžbi (358):

$$T\Psi'_{k\sigma} \;=\; T(\zeta^{\frac{1}{2}}\Psi_{k\sigma}) \;=\; \zeta^{-\frac{1}{2}}(\zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{k\,-\sigma}) \;=\; (-)^{j-\sigma}(\zeta^{\frac{1}{2}}\Psi_{k-\sigma}) \;=\; (-)^{j-\sigma}\Psi'_{k-\sigma}\;. \tag{360}$$

$*$ Djelovanje operatora T na stanje konačnog impulsa, $T\Psi_{p\sigma}$

Za nalaženje izraza za $T\Psi_{p\sigma}$ trebaju nam sljedeće jednakosti

$$\mathcal{T} \overset{(307)}{=} -\mathcal{P}$$
$$\Rightarrow\; \mathcal{T}L(p)\mathcal{T}^{-1} \;=\; \mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1} \overset{(348)}{=} L(\mathcal{P}p), \tag{361}$$
$$\Psi_{\mathcal{P}p\,-\sigma} \overset{(347)}{=} \sqrt{\frac{M}{P^0}}U(L(Pp))\Psi_{k\,-\sigma}\;. \tag{362}$$

Odatle

$$T\Psi_{p\sigma} \overset{(347)}{=} T\left(\sqrt{\frac{M}{P^0}}U(L(p))\Psi_{k\sigma}\right) \;=\; \sqrt{\frac{M}{P^0}}TU(L(p))T^{-1}T\Psi_{k\sigma}$$
$$\overset{(311,358)}{=} \sqrt{\frac{M}{P^0}}U(\mathcal{T}L(p)\mathcal{T}^{-1})(\zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{k\,-\sigma}) \tag{363}$$
$$\overset{(361,362)}{=} \zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p\,-\sigma}\;. \tag{364}$$

Rezimirajmo: T transformirano stanje konačnog impulsa $\Psi_{p\sigma}$ glasi

$$(364) \;\equiv\; \boxed{T\Psi_{p\sigma} \;=\; \zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p\,-\sigma}}\;.$$

□ <u>$P\,:\,M=0$</u>

$*$ P operator nije dobar operator za definiciju pariteta stanja $\Psi_{k\sigma}$

- Za operator koji definira paritet stanja standardnog 4-impulsa, $\Psi_{k\sigma}$, zahtjeva se da je standardni impuls k^μ invarijantan na transformaciju (vidi (345) za $M > 0$ slučaj)
- to medjutim nije ispunjeno

$$(\vec{P}, H, J_3)\Psi_{k\sigma} \;=\; \Big(k^\mu, \sigma\Big)\Psi_{k\sigma} \;=\; \Big((0,0,\kappa), \kappa, \sigma\Big)\Psi_{k\sigma} \qquad | \; P\cdot \tag{365}$$

$$\overset{(333,330,331)}{\Rightarrow} \quad (-\vec{P}, H, J_3)P\Psi_{k\sigma} \;=\; \Big((0,0,\kappa), \kappa, \sigma\Big)P\Psi_{k\sigma} \tag{366}$$

$$\equiv \;(\vec{P}, H, -J_3)P\Psi_{k\sigma} \;=\; \Big((0,0,-\kappa), \kappa, -\sigma\Big)P\Psi_{k\sigma} \;=\; \Big((\mathcal{P}k)^\mu, -\sigma\Big)P\Psi_{k\sigma} \tag{367}$$

$$\Rightarrow P\Psi_{k\sigma} \propto \Psi_{\mathcal{P}k\;-\sigma} \;. \tag{368}$$

U jednadžbi (367) smo prebacili faze na desnu stranu jednadžbe uzimajući u obzir da je nakon paritetne transformacije operator heliciteta jednak $-J_3$,

$$PJ_3P^{-1} \;=\; P\hat{k}\cdot\vec{J}P^{-1} \;=\; (-\hat{k})\cdot\vec{J} \;=\; -J_3, \tag{369}$$

(sjetimo se da operator heliciteta $\hat{k}\cdot\vec{J}$ a treća komponenta kutne količine gibanja J_3 definira σ; takodjer). Odatle slijedi (368), koja pokazuje da k^μ nije očuvan. Q.E.D.
Ista jednadžba pokazuje da se helicitet mijenja pri paritetnoj transformaciji što se i očekuje.

$*$ Dobar operator za definiciju pariteta stanja standardnog impulsa, $U(R_2^{-1})P$
- Da bi se postigla invarijantnost standardnog impulsa uobičajeno je uvesti operator $U(R_2^{-1})P$ gdje je R_2 rotacija koja transformira takodjer k u $\mathcal{P}k$. Uobičajeno se uzima da je R_2 rotacija za $-180°$ oko $\hat{y}$,

$$U(R_2) \;=\; \exp(-i\pi J_2) \qquad\qquad [U(R_2^{-1}) \;=\; \exp(i\pi J_2)] \;. \tag{370}$$

Budući da $U(R_2^{-1})$ transformira P_3 u $-P_3$ i J_3 u $-J_3$,

$$\begin{aligned} U(R_2^{-1})P_3U(R_2) \;&=\; \exp(i\pi J_2)P_3\exp(-i\pi J_2) \;=\; \exp\,[i\pi J_2,\;]P_3 \\ &=\; P_3 + [i\pi J_2, P_3] + \frac{1}{2}[i\pi J_2,[i\pi J_2,P_3]] + \ldots \\ &=\; P_3\left(1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} + \ldots\right) + P_1\left((-\pi) + \frac{\pi^3}{6!} + \ldots\right) \\ &=\; P_3\cos\pi - P_1\sin\pi \;=\; -P_3, \end{aligned} \tag{371}$$

$$U(R_2^{-1})J_3U(R_2) \;=\; \exp(i\pi J_2)J_3\exp(-i\pi J_2) \;=\; J_3\cos\pi - J_1\sin\pi \;=\; -J_3, \tag{372}$$

$$U(R_2^{-1})P_1U(R_2) \;=\; -P_1, \tag{373}$$

$$U(R_2^{-1})J_1U(R_2) \;=\; -J_1 \;. \tag{374}$$

(upotrebljene su relacije $[J_2, P_3] = iP_1$, $[J_2, P_1] = -iP_3$ odnosno $[J_2, J_3] = iJ_1$, $[J_2, J_1] = -iJ_3$ koje slijede iz (199) odnosno (196)) dobijamo

$$
\begin{aligned}
& U(R_2^{-1})P \cdot (365) \\
\equiv \;& (P_1, -P_2, P_3; H; -J_3)(U(R_2^{-1})P\Psi_{k\sigma}) \;=\; (0,0,\kappa;\kappa;\sigma)(U(R_2^{-1})P\Psi_{k\sigma} \qquad (375) \\
\equiv \;& (\vec{P}, H, J_3)U(R_2^{-1})P\Psi_{k\sigma} \;=\; (k^\mu, -\sigma)U(R_2^{-1})P\Psi_{k\sigma} \qquad (376) \\
\Rightarrow \;& \boxed{U(R_2^{-1})P\Psi_{k\sigma} \;=\; \eta_\sigma \Psi_{k\,-\sigma}} \qquad (377)
\end{aligned}
$$

η_σ je fazni faktor koji ovisi o helicitetu σ [Sada nemamo J_1, J_2, J_3 algebru već J_3, A, B algebru].

$*$ $P\Psi_{p\sigma}$

$\cdot$ Svojstva L. transformacija R_2^{-1} i $\mathcal{P}$
- $R_2^{-1}\mathcal{P}$ komutira s boostom u $\hat{z}$ smjeru $B(u)$
- $\mathcal{P}$ komutira s rotacijom u $R(\hat{p})$, $R(\hat{p}) \;:\; \hat{z} \to \hat{p}$

D:
Iz strukture matrica

$$
\mathcal{P} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{R}_2 \;=\; \mathcal{R}_2^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad (378)
$$

$$
B(u) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cosh\omega & \sinh\omega \\ & & \sinh\omega & \cosh\omega \end{pmatrix}, \qquad R(\hat{p}) \;=\; \left(\begin{array}{c|c} \tilde{R}(\hat{p}) & \\ \hline & 1 \end{array}\right) \qquad (379)
$$

$$
\Rightarrow \;\; R_2^{-1}\mathcal{P} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad (380)
$$

direktno slijedi

$$
\begin{aligned}
[R_2^{-1}\mathcal{P}, B(u)] \;&=\; 0, \qquad (381) \\
[\mathcal{P}, R(\hat{p})] \;&=\; 0\,. \qquad (382)
\end{aligned}
$$

$\cdot$ Prvi izraz za $P\Psi_{p\sigma}$

$$
P\Psi_{p\sigma} \overset{(216,243,Tab.2)}{=} P\left(\sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U(L(p))\Psi_{k\sigma}\right) \overset{(301,309)}{=} \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U(\mathcal{P})U\left(R(\vec{p})B\Big(\frac{|\vec{p}|}{\kappa}\Big)\right)\Psi_{k\sigma}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U\left(\mathcal{P}R(\vec{p})B\Big(\frac{|\vec{p}|}{\kappa}\Big)\right)(U(R_2^{-1})P)^{-1}(U(R_2^{-1})P)\Psi_{k\sigma} \\
&= \quad \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U\left(\mathcal{P}R(\vec{p})B\Big(\frac{|\vec{p}|}{\kappa}\Big)\mathcal{P}^{-1}R_2\right)\cdot(\eta_\sigma\Psi_{k\,-\sigma}) \\
&\overset{(381,382)}{=} \quad \eta_\sigma\sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U\left(R(\vec{p})R_2 B\Big(\frac{|\vec{p}|}{\kappa}\Big)\right)\Psi_{k\,-\sigma}\ . \qquad (383)
\end{aligned}
$$

Stanje (383) još nema oblik stanja konačnog impulsa

$$
\Psi_{p\sigma} \ = \ \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}} U(L(p))\Psi_{k\sigma} \qquad (384)
$$

(vidi prvi redak Eq. (383)).

· Analiza $R(\vec{p})R_2$

- $R(\vec{p})R_2$: produkt rotacija je rotacija

$$
R(\vec{p})R_2 \ : \ \hat{z} \to -\hat{z} \to -\hat{p} \qquad \Rightarrow \qquad R(\vec{p})R_2 \text{ sadrži } R(-\vec{p})\ . \qquad (385)
$$

- veza $R(\vec{p})R_2$ i $R(-\vec{p})$ u Hilbertovom prostoru

$$
\begin{aligned}
(303) \quad &\equiv \quad \hat{p} \ = \ (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \ \equiv \ \hat{p}(\theta,\phi) \\
&\Rightarrow \quad -\hat{p} \ = \ \begin{cases} \hat{p}(\pi-\theta, \phi+\pi) & 0 \le \phi < \pi \\ \hat{p}(\pi-\theta, \phi-\pi) & \pi \le \phi < 2\pi \end{cases}\ , \qquad (386) \\
(304) \quad &\equiv \quad U(R(\hat{p})) \ = \ \exp(i\phi J_3)\exp(i\theta J_2) \\
&\overset{(386)}{\Rightarrow} \quad U(R(-\hat{p})) \ = \ \exp(i(\phi\pm\pi)J_3)\exp(i(\pi-\theta)J_2)\ . \qquad (387)
\end{aligned}
$$

Iz (387) slijedi

$$
\begin{aligned}
&U^{-1}(R(-\hat{p}))U(R(\hat{p})R_2) \\
&\quad = \ [\exp(-i(\pi-\theta)J_2)\exp(-i(\phi\pm\pi)J_3)][\exp(i\phi J_3)\exp(i\theta J_2)]\exp(-i\pi J_2) \\
&\quad = \ \exp(-i(\pi-\theta)J_2)\underbrace{\exp(\mp i\pi J_3)\exp(-i(\pi-\theta)J_2)\cdot\exp(\pm i\pi J_3)}_{\exp(i(\pi-\theta)J_2)}\exp(\mp i\pi J_3) \\
&\quad = \ \exp(\mp i\pi J_3)\ . \qquad (388)
\end{aligned}
$$

U izvodu upotrijebili smo jednakost

$$
\exp(\mp i\pi J_3)J_2\exp(\pm i\pi J_3)\ . \ = \ -J_2 \qquad (389)
$$

Iz (388) slijedi

$$
\boxed{U(R(\hat{p})R_2) \ = \ U(R(-\hat{p}))\exp(\mp i\pi J_3)} \qquad (390)
$$

· Konačni izraz za $P\Psi_{p\sigma}$:

$$\boxed{P\Psi_{p\sigma}} \overset{(383,390)}{=} \eta_\sigma\sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U\Big(R(-\hat{p})B\Big(\frac{|\vec{p}|}{\kappa}\Big)\Big)\exp(\mp i\pi J_3)\Psi_{k;-\sigma}$$

$$= \boxed{\eta_\sigma\exp(\pm i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}p;-\sigma} \qquad \begin{cases} + & \text{za } 0\leq\phi<\pi \\ - & \text{za } \pi\leq\phi<2\pi \end{cases}} . \tag{391}$$

U prvom retku (391) iskoristili smo činjenicu da boost operator u $\hat{z}$ smjeru i rotacija oko J_3 komutiraju jer J_3 i K_3 komutiraju. Napomenimo da je dvoznačnost predznaka faze u (391) posljedica definicije (390).

$\underline{T\,:\,M=0}$

Postupak je analogan kao za P operator.
· Prvo se pokazuje da T mijenja impuls k standardnog stanja $\Psi_{k\sigma}$. Kreće se od jednadžbe (365), na nju se djeluje operatorom T, rabe se jednadžbe transformacije generatora P. grupe (334), (337) i (335), primjenjuje se činjenica da se helicitet $\vec{p}\vec{J}$ ne mijenja na T transformaciju,

$$(365) \;\equiv\; (\underbrace{\vec{P}}_{-},\underbrace{H}_{+},\underbrace{J_3}_{-})\Psi_{k\sigma} = \Big(k^\mu,\sigma\Big)\Psi_{k\sigma} = \Big((0,0,\kappa),\kappa,\sigma\Big)\Psi_{k\sigma} \qquad |\,T\,\cdot$$

$$\Rightarrow\; (\vec{P},H,-J_3)T\Psi_{k\sigma} = ((0,0,-\kappa),\kappa,\sigma)\,T\Psi_{k\sigma} = ((\mathcal{P}k)^\mu,\sigma)\,T\Psi_{k\sigma} \tag{392}$$

$$\Rightarrow\; T\Psi_{k\sigma}\propto\Psi_{\mathcal{P}k\sigma} \tag{393}$$

$$\text{helicitet}\,:\, T(\hat{k}\vec{J})T^{-1} = (-\hat{k})(-\vec{J}) = \hat{k}\vec{J}. \tag{394}$$

Zbog (394) vrijednost heliciteta σ se ne mijenja. (Uočite da T transformacija mijenja smjerove osi $\vec{p}$ koordinatnog sustava. U starom koordinatnom sustavu helicitet je $-J_3 = -\hat{z}\vec{J}$).

· Dobar operator koji ne mijenja standardni impuls k^μ je $U(R_2)^{-1}T$. Za dokaz potrebene su relacije (372) i (371) koje pokazuju da pri rotaciji R_2 $P_3\to -P_3$ (preciznije $(P_1,P_2,P_3)\to(-P_1,P_2,-P_3)$) i $J_3\to -J_3$. Odatle

$$(\vec{P},H,J_3)(U(R_2^{-1})T\Psi_{k\sigma}) = (k^\mu,\sigma)(U(R_2^{-1})T\Psi_{k\sigma})\,. \tag{395}$$

· $T\Psi_{p\sigma}$

Djelovanje T operatora na stanje konačnog impulsa $\Psi_{p\sigma}$ se dobija analognim postupkom kao za $P\Psi_{p\sigma}$. U izvodu se na mjestu $\mathcal{P}$ i P javjaju $\mathcal{T}$ i T. Rezultat koji odgovara (383) je

$$T\Psi_{p\sigma} \;=\; \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U\left(R(\hat{p})R_2B\Big(\frac{|\vec{p}|}{\kappa}\Big)\right)U(R_2^{-1}T\Psi_{k\sigma}) \;. \tag{396}$$

Upotrebom Eqs. (390) i (393) te budući da J_3 komutira sa boostom $B(\frac{|\vec{p}|}{\kappa})$ dobijamo

$$\boxed{T\Psi_{p\sigma}} \;\stackrel{(390),(393)}{=}\; \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U\left(R(-\hat{p})B\Big(\frac{|\vec{p}|}{\kappa}\Big)\right)\exp(\mp i\pi J_3)\zeta_\sigma\Psi_{k\sigma} \tag{397}$$

$$\stackrel{(384)}{=}\; \boxed{\zeta_\sigma\cdot\exp(\mp i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}p\;\sigma}} \;. \tag{398}$$

• Ponašanje $\Psi_{p\sigma}$ pri T^2 transformaciji; Kramerova degeneracija

□ Ponašanje $\Psi_{p\sigma}$ pri T^2

$$\begin{aligned}
&T^2\Psi_{p\sigma}\\
&\stackrel{M>0}{=}\; T(\zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p\;-\sigma}) \;=\; \zeta^*(-)^{j-\sigma}\cdot\zeta(-)^{j-(-\sigma)}\Psi_{\mathcal{P}(\mathcal{P}p)\;-(-\sigma)})\\
&=\; (-)^{2j}\Psi_{p\sigma} \qquad (399)\\
&\stackrel{M=0}{=}\; T(\zeta_\sigma\exp(\mp i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}p\;\sigma}) \;=\; \zeta_\sigma^*\exp(\pm i\pi\sigma)\cdot\zeta_\sigma\exp(\pm i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}(\mathcal{P}p)\;\sigma}\\
&=\; \exp(\pm 2i\pi\sigma)\Psi_{p\sigma} \;=\; (-)^{2\sigma}\Psi_{p\sigma} \;. \qquad (400)
\end{aligned}$$

Antiunitarnost T kompleksno konjugira koeficijente koji množe stanja. U dokazu za $M = 0$ slučaj primjetite da ako 4-impuls p daje fazu $\exp(\mp i\pi\sigma)$ onda $\mathcal{P}p$ daje fazu $\exp(\pm i\pi\sigma)$. Maksimalna projekcija za $M > 0$ slučaj je j a za $M = 0$ je σ (helicitet). Ako obje projekcije označimo istim imenom "j" dobijamo

$$\boxed{T^2\Psi_{p\sigma} \;=\; (-)^{2j}\Psi_{p\sigma}} \;. \tag{401}$$

⇒ Za sistem slobodnih čestica sa neparnim brojem fermiona valna funkcija pri djelovanju operatora T^2 mijenja predznak

$$T^2\Psi \;=\; -\Psi \;. \tag{402}$$

To svojstvo je očuvano ako se uključe medjudjelovanja koja čuvaju T.

□ Kramerova degeneracija; očuvanje T brani postojanje električnog (gravitacijskog) dipolnog momenta

Neka je Ψ svojstveno stanje Hamiltonijana. Budući da je $[H,T]=0$, $T\Psi$ je takodjer svojstveno stanje Hamiltonijana. Pitanje je da li su Ψ i $T\Psi$ ista stanja. Ako jesu tada

$$T\Psi = \zeta\Psi . \tag{403}$$

Medjutim tada bi bilo

$$T^2\Psi = T(T\Psi) = \zeta^*\zeta\Psi = \Psi . \tag{404}$$

Za stanja sa neparnim brojem čestica polucjelobrojnog spina to nije moguće.

$\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{$\Psi$ i $T\Psi$ su dva različita degenerirana stanja [Kramerova degeneracija]}}$

Diskusija:
- Za rotacijski invarijantne sisteme polucjelobrojnog spina degeneracija parova je očekivana, zato jer se javlja degeneracija $2j+1=2,4,\ldots$ stanja.
- medjutim ta se degeneracija gubi ako čestica ima električni (gravitacijski) dipolni moment.

$\Rightarrow$ **Postojanje električkog (gravitacijskog) dipolnog momenta zabranjeno je T očuvanjem.**

Dakle električni dipolni moment može postojati samo ako T nije očuvan.

3 Teorija raspršenja

- do sada proučavana stabilna jednočestična stanja nisu interesantna, interesantni su samo procesu u kojima čestice medjudjeluju.
- u karakterističnom eksperimentu u čestičnoj i nuklearnoj fizici, skiciranom na slici nekoliko se makroskopski udaljenih čestica približava, sudara u mikroskopski malom području i produkti medjudjelovanja se opet detektiraju na makroskopskim udaljenostima.

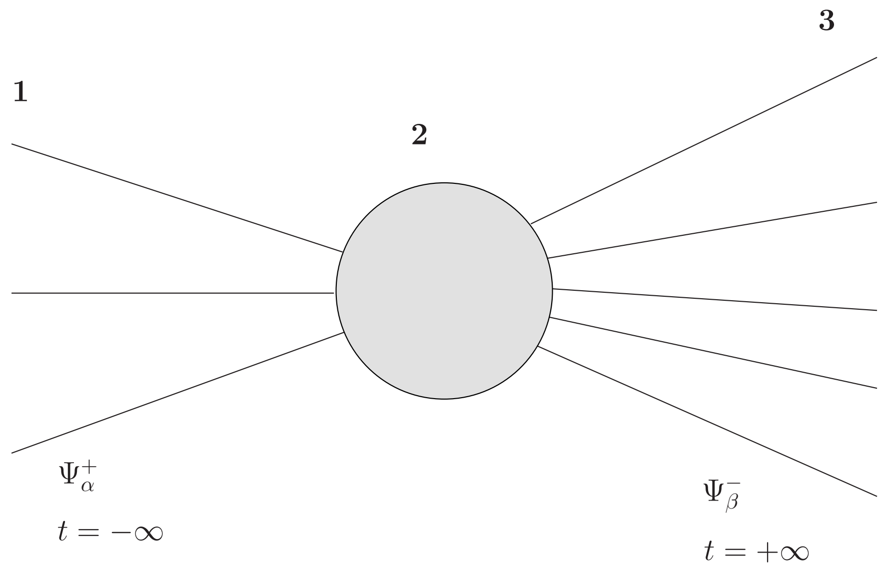


Figure 1: 3.1 Opća slika raspršenja

- 1, 3 : fizikalna stanja prije i poslije interakcije, udaljena medjusobno toliko da efektivno ne medjudjeluju.
- u eksperimentu se mjere distribucije vjerojatnosti — ovdje dajemo formalizam za njihovo nalaženje.

3.1 "In" i "Out" stanja

□ Lorentz transformacija stanja ne-medjudjelujućih čestica

$*$ **notacija** za opis stanja za svaku česticu : $(p, \sigma, \mathbf{n})$
(n je diskretni skup QB (masa, spin, naboji) koji specificira tip čestice)

$*$ **L.T. stanja sistema ne medjudjelujućih č.**
- ponaša se kao direktni produkt slobodnih stanja

$$\begin{aligned}
&U(\Lambda, a)\Psi_{p_1\sigma_1 n_1, p_2\sigma_2 n_2, \ldots} \\
&\quad = \exp(-ia_\mu(p_1^\mu + p_2^\mu + \ldots)) \times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0}{p_1^0}\frac{(\Lambda p_2)^0}{p_2^0}\ldots} \\
&\quad \times \sum_{\sigma_1'\sigma_2'\ldots} D^{(j_1)}_{\sigma_1'\sigma_1}(W(\Lambda, p_1))D^{(j_2)}_{\sigma_2'\sigma_2}(W(\Lambda, p_2))\ldots \times \Psi_{\Lambda p_1\sigma_1' n_1, \Lambda p_2 \sigma_2' n_2, \ldots}
\end{aligned} \tag{405}$$

$W(\Lambda, p)$ je Wignerova rotacija a $D^{(j_1)}_{\sigma_1'\sigma_1}$ su za $M > 0$ $(2j+1)$-dimenzijske matrice rotacije (vidi (204) i (247)) a za $M = 0$ matrice $\delta_{\sigma'\sigma}\exp(i\sigma\theta(\Lambda, p))$ (vidi (298)).

$*$ **normalizacija stanja**

$$\begin{aligned}
&(\Psi_{p_1'\sigma_1' n_1', p_2'\sigma_2' n_2', \ldots}, \Psi_{p_1\sigma_1 n_1, p_2\sigma_2 n_2, \ldots}) \\
&\quad = \delta^3(\vec{p}_1{}' - \vec{p}_1)\delta_{\sigma_1'\sigma_1}\delta_{n_1' n_1}\delta^3(\vec{p}_2{}' - \vec{p}_2)\delta_{\sigma_2'\sigma_2}\delta_{n_2' n_2}\ldots \pm \text{permutacije}\ .
\end{aligned} \tag{406}$$

Predznak : $-$ ako je relativna permutacija fermionskih č neparna; inače $+$.

$*$ **skraćena notacija**

$$\cdot\quad p_1\sigma_1 n_1, p_2\sigma_2 n_2, \ldots \ \rightarrow\ \alpha, \qquad \Psi_{p_1\sigma_1 n_1, p_2\sigma_2 n_2, \ldots}\ \rightarrow\ \Psi_\alpha \tag{407}$$

$$\cdot\quad \overset{(406,407)}{\Rightarrow}\quad \text{normalizacija :}\quad (406)\ \equiv\ (\Psi_{\alpha'}, \Psi_\alpha)\ =\ \delta(\alpha' - \alpha); \tag{408}$$

$$\cdot\quad \text{suma preko stanja :}\ \int d\alpha \ldots\ \equiv\ \sum_{n_1\sigma_1 n_2\sigma_2\ldots}\int d^3p_1 d^3p_2\ldots\ ; \tag{409}$$

$$\cdot\quad \text{relacija potpunosti :}\ \Psi\ =\ \int d\alpha\ \Psi_\alpha(\Psi_\alpha, \Psi)\ . \tag{410}$$

$*$ Iz transformacijskog pravila (405) $\Rightarrow$ čestice ne medjudjeluju.

D:

$$U(\Lambda, a) \quad = \quad \exp(ia_0 H + \ldots) \;\to\; 1 + ia_0 H + \ldots \tag{411}$$

$$H\Psi_\alpha \overset{(411),(405)}{=} (p_1^0 + p_2^0 + \ldots)\Psi_\alpha \;=\; E_\alpha \Psi_\alpha \; . \tag{412}$$

$\Rightarrow \Psi_\alpha$ je svojstveno stanje energije koje **nema članova medjudjelovanja** npr. p_{12}^0.

· U procesu raspršenja transformacijsko pravilo **(405) vrijedi za** čestice za vremena $t \to \pm\infty$ kada čestice više ne medjudjeluju.
- Početna stanja u $t \to -\infty$, Ψ^+, zovu se ulazna ("in") stanja a konačna u $t \to +\infty$, Ψ^-, se zovu izlazna ("out") stanja
(oznake $^+$ i $^-$ su definirane preko Lippmann-Schwingerove jednadžbe, vidi poslije).

□ Gruba definicija "in" i "out" stanja

· **Heisenbergova slika** :
- Da bi bila zadržana manifestna Lorentz invarijantnost stanja Ψ su vremenski neovisna i opisuju cjelokupni prostorno-vremenski razvoj sistema čestica. To odgovara Heisenbergovoj slici. Stoga $\Psi^\pm$ nisu limesi Ψ stanja kada $t \to \mp\infty$.

· **Veza stanja u vremenski translatiranim inercijalnim sustavima** :
- Ipak, stanja Ψ nisu jednoznačno definirana. Ona ovise o inercijalnom sustavu promatrača. Veza stanja promatrača $\mathcal{O}$, Ψ, čiji sat pokazuje vrijeme t i koji je u mirovanju s obzirom na promatrača $\mathcal{O}'$ s stanjem promatrača $\mathcal{O}'$, Ψ', čiji sat pokazuje vrijeme $t' = t - \tau$ je

$$\Psi' \;=\; U(1, -\tau)\Psi \;=\; \exp(-iH\tau)\Psi \; . \tag{413}$$

Ψ i Ψ' nisu ista stanja već ekvivalentna stanja (povezana vremenskom transl. simetrijom).
- Dakle, izgled stanja zavisi o inercijanom sustavu promatrača. Stanja $\Psi^\pm$ odgovaraju stanjima kako ih vide promatrači čiji su inercijani sustavi translatirani za $\tau \to \mp\infty$ operatorima translacije u vremenu $\exp(-iH\tau), \tau \to \mp\infty$.

· **Zahtjev lokaliziranosti u (promatračkom) vremenu :**
- za Ψ_α svojstveno stanje energije $\exp(-iH\tau)\Psi_\alpha \;=\; \exp(-iE_\alpha\tau)\Psi_\alpha$ nije lokalizirano u vremenu
$\Rightarrow$ treba gledati valne pakete stanja,

$$\widetilde{\Psi}_g \equiv \int d\alpha \; g(\alpha)\Psi_\alpha, \qquad H\Psi_\alpha \;=\; E_\alpha \Psi_\alpha, \tag{414}$$

gdje je $g(\alpha)$ glatka funkcija (tzv. test funkcija) sa velikim vrijednostima samo unutar ograničenog područja energija ΔE.

· **Definicija "in" i "out" stanja $\Psi^\pm$:**

"In" i "out" stanja se definiraju tako da superpozicija

$$\exp(-iH\tau)\int d\alpha\; g(\alpha)\Psi_\alpha^\pm \;=\; \int d\alpha\; e^{-iE_\alpha\tau}g(\alpha)\Psi_\alpha^\pm \;\equiv\; \Psi_g^\pm(\tau) \tag{415}$$

ponaša kao odgovarajući izraz za slobodna stanja za promatračka vremena $|\tau| \geq 1/\Delta E$.

□ Točna definicija "in" i "out" stanja

· **Definicija slobodnih stanja pridruženih $\Psi_\alpha^\pm$ stanjima**
- **Pretpostavlja** se da se Hamiltonijan (generator vremenskih translacija) H može **razdijeliti** na dva dijela, Hamiltonijan slobodnih čestica H_0 i na Hamiltonijan medjudjelovanja V,

$$H \;=\; H_0 + V, \tag{416}$$

na takav način da **svojstvena stanja** H_0, Φ_α imaju ista svojstva kao svojstvena stanja ukupnog Hamiltonijana $\Psi^\pm$ stanja,

$$\begin{aligned} H_0\Phi_\alpha &= E_\alpha\Phi_\alpha, \\ (\Phi_{\alpha'},\Phi_\alpha) &= \delta(\alpha'-\alpha)\ . \end{aligned} \tag{417}$$

- Uočiti : pretpostavljeno je da je **spektar** H i H_0 **isti**.
⇒ Fizikalne (mjerene) mase koje se javljaju u H_0 nisu iste kao 'gole' ('bare') mase koje se javljaju u H. Razlika masa je uključena u Hamiltonijan medjudjelovanja, V.
⇒ Vezana stanja u spektru H moraju se uključiti u spektar H_0 kao da su elementarne čestice.

· **Točna definicija "in" i "out" stanja $\Psi_\alpha^\pm$**
- "In" i "out" stanja $\Psi_\alpha^\pm$ se definiraju kao sv. stanja H

$$H\Psi_\alpha^\pm \;=\; E_\alpha\Psi_\alpha^\pm, \tag{418}$$

koja zadovoljavaju uvjet

$$\Psi_g^\pm(\tau) \;\equiv\; \int d\alpha\; e^{-iE_\alpha\tau}g(\alpha)\Psi_\alpha^\pm \;\xrightarrow{\pm\,:\,\tau\to\mp\infty}\; \int d\alpha\; e^{-iE_\alpha\tau}g(\alpha)\Phi_\alpha \;\equiv\; \Phi_g(\tau), \tag{419}$$

za svaku test funkciju g. Eq. (419) se može zapisati u obliku

$$\exp(-iH\tau)\int d\alpha\; g(\alpha)\Psi_\alpha^\pm \;\xrightarrow{\pm\,:\,\tau\to\mp\infty}\; \exp(-iH_0\tau)\int d\alpha\; g(\alpha)\Phi_\alpha. \tag{420}$$

· **Formalna veza "in" i "out" stanja sa slobodnim stanjima**
- Formalno se relacija (420) zapisuje

$$\Psi_\alpha^\pm \;=\; \Omega(\mp\infty)\Phi_\alpha, \tag{421}$$

$$\Omega(\tau) \;=\; \exp(iH\tau)\exp(-iH_0\tau)\ . \tag{422}$$

Napomena : Jednakost (421,422) se uvijek mora interpretirati kao relacija (420).

$*$ Ortonormiranost $\Psi_\alpha^\pm$ stanja

- Ovime provjeravamo ispravnost definicije (419)
- Ortonormiranost $\Psi^\pm$ stanja je posljedica (419) odnosno (420). Lijeva strana (419) dobija se djelovanjem unitarog operatora $\exp(-iH\tau)$, $\tau \to \mp\infty$ na valni paket (414) koji je neovisan o τ. Stoga je i norma stanja neovisna o τ, pa i za $\tau \to \mp\infty$ vrijedi,

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\Psi}_g^\pm, \widetilde{\Psi}_g^\pm) &= \int d\alpha d\beta\, g(\alpha) g^*(\beta)(\Psi_\beta^\pm, \Psi_\alpha^\pm) = (\exp(-iH\tau)\widetilde{\Psi}_g^\pm, \exp(-iH\tau)\widetilde{\Psi}_g^\pm) \\
\equiv (\Psi_g^\pm, \Psi_g^\pm) &= \int d\alpha d\beta\, g(\alpha) g^*(\beta) \exp(-i(E_\alpha - E_\beta)\tau)(\Psi_\beta^\pm, \Psi_\alpha^\pm) \\
&\stackrel{\tau\to\mp\infty}{=} \int d\alpha d\beta\, g(\alpha) g^*(\beta) \exp(-i(E_\alpha - E_\beta)\tau)(\Phi_\beta, \Phi_\alpha) \; . \qquad (423)
\end{aligned}$$

Kako izraz vrijedi za bilo koju glatku funkciju $g(\alpha)$, slijedi

$$(\Psi_\beta^\pm, \Psi_\alpha^\pm) = (\Phi_\beta, \Phi_\alpha) \; . \qquad (424)$$

Nedostatak izvoda jest da se rabi limes $\tau \to \mp\infty$, budući da su "in" i "out" stanja (419) definirana u tim limesima.

$\square$ Lippmann-Schwingerova jednadžba

$*$ Lippmann-Schwingerova jednadžba

- Sada ćemo definirati stanja koja ćemo znati za svaku vrijednost τ i za koja će ispunjavati uvjete za "in" i "out" stanja (419).
- Ona se dobivaju eksplicitnim formalnim rješavanjem svojstvene energetske jednadžbe (418) koja se uporabom rastava (416) zapisuje u obliku

$$(E_\alpha - H_0)\Psi_\alpha^\pm = V\Psi_\alpha^\pm \; . \qquad (425)$$

- Operator $E_\alpha - H_0$ nije invertibilan, zato jer pored Ψ_α postoji kontinuum stanja Ψ_β iste energije (za invertibilnost operator ne smije biti singularan, tj. ne smije degenerirane sv. vrijednosti).
- Probno rješenje : pretpostavljamo da sadrži Φ_α i nehom. rj. jednadžbe

$$\boxed{\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1} V \Psi_\alpha^\pm,} \qquad (426)$$

gdje je $\varepsilon = +0$ infinitezimalni pozitivni realni broj koji je ubačen da bi se dalo značenje inverzu operatora $E_\alpha - H_0$. Uočimo da $\pm i\varepsilon$ definira oznaku na $\Psi_\alpha^\pm$.
Ubacivanjem potpunog skupa rješenja dobija se integralni oblik jednadžbe

$$\boxed{\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + \int d\beta\, (E_\alpha - E_\beta \pm i\varepsilon)^{-1}\, \Phi_\beta T_{\beta\alpha}^\pm, \qquad T_{\beta\alpha}^\pm = (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha^\pm) \; .} \qquad (427)$$

(426) i (427) su tzv. Lippmann-Schwingerove jednadžbe.

- Matrica $T^+_{\beta\alpha}$ je povezana sa $S_{\beta\alpha}$ matricom (vidi §3.2).

$*$ Rješenja Lippmann-Schwingerove (LS) jednadžbe zadovoljavaju uvjete za "in" i "out" stanja (419)

- Treba dokazati da rješenja LS jednadžbe zadovoljavaju $(\Psi^\pm_g)_{LS}(\mp\infty) = \Phi_g(\mp\infty)$. Uvrštavanjem LS rješenja u $\Psi^\pm_g$ iz (415) dobijamo.

$$(\Psi^\pm_g)_{LS}(t) \stackrel{(427)}{=} \Phi_g + \int d\alpha\, e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \int d\beta\, \frac{\Phi_\beta T^\pm_{\beta\alpha}}{E_\alpha - E_\beta \pm i\varepsilon} \tag{428}$$

$$= \Phi_g + \int d\beta\, \Phi_\beta \underbrace{\int d\alpha\, \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) T^\pm_{\beta\alpha}}{E_\alpha - E_\beta \pm i\varepsilon}}_{\equiv \mathcal{J}^\pm_\beta} . \tag{429}$$

U (429) je pretpostavljeno da se $d\alpha$ i $d\beta$ integracije mogu zamijeniti i definiran je integral $\mathcal{J}^\pm_\beta$,

$$\mathcal{J}^\pm_\beta(t) = \int d\alpha\, \frac{e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) T^\pm_{\beta\alpha}}{E_\alpha - E_\beta \pm i\varepsilon} . \tag{430}$$

· Rasprava :
- $d\alpha$ sadrži integraciju po energiji, $d\alpha = dE_\alpha d\alpha'$;
- za $t \to -\infty$ ($t \to +\infty$) kontura integracije po dE_α se može zatvoriti u gornjoj (doljnjoj) poluravnini;
- **očekuje se** da $g(\alpha) T^\pm_{\beta\alpha}$ nemaju singulatiteta na realnoj E_α osi već samo izvan nje (na konačnoj udaljenosti od nje)
$\Rightarrow$ jedini singularitet "na osi" dolazi zbog faktora $1/(E_\alpha - E_\beta \pm i\varepsilon)$
$\Rightarrow$ za $t \to \pm\infty$ doprinosi svih $g_\alpha T^\pm_{\beta\alpha}$ sigulariteta obuhvaćenih konturom u gornjoj (doljnjoj) poluravnini u limesu $t \to -\infty$ ($t \to +\infty$) jednaki su 0
- pol $1/(E_\alpha - E_\beta + i\varepsilon)$ ($1/(E_\alpha - E_\beta - i\varepsilon)$) koji se javlja u integraciji u gornjoj (doljnjoj) poluravnini ne daje doprinosa $\mathcal{J}^+_\beta$ ($\mathcal{J}^-_\beta$) integralu.

· Iz gornje rasprave slijedi

$$\Rightarrow \mathcal{J}^\pm_\beta(t) \xrightarrow{t \to \mp\infty} 0, \tag{431}$$

pa iz (429) dobijamo

$$(\Psi^\pm_g)_{LS}(t) \xrightarrow{t \to \mp\infty} \Phi_g(t), \tag{432}$$

što pokazuje da $(\Psi^\pm_g)_{LS}$ zadovljavaju uvjet za "in" i "out" stanja (419).

$*$ **Rješenja LS jednadžbe, $\Psi^{\pm}(t)$ u suprotnom limesu, $t \to \pm\infty$**

- Zgodno je u ovom trenutku izvrijedniti integrale $\mathcal{J}^{\pm}_{\beta}$ u suprotnom, $t \to \pm\infty$ limesu. Jedan od tih integrala, (435), javljat će se u izvodu za izraz S matrice.
- U suprotnom limesu $t \to \pm\infty$ opet $g(\alpha)T^{\pm}_{\beta\alpha}$ singulariteti ne daju doprinosa, ali sada singulariteti "na osi" daju doprinos, koji po pravilima integracije po reziduumima nakon integracije po dE_α daje funkciju koja ovisi samo o E_β. Isti rezultat se dobija ako se zadrži integracija po dE_α i na mjesto $1/(E_\alpha - E_\beta \pm i\varepsilon)$ ubaci $\mp 2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta)$

$$\mathcal{J}^{+}_{\beta} \xrightarrow{t\to+\infty} \int d\alpha\, (-2\pi i)\delta(E_\alpha - E_\beta)e^{-iE_\alpha t}g(\alpha)T^{+}_{\beta\alpha}, \tag{433}$$

$$\mathcal{J}^{-}_{\beta} \xrightarrow{t\to-\infty} \int d\alpha\, (2\pi i)\delta(E_\alpha - E_\beta)e^{-iE_\alpha t}g(\alpha)T^{-}_{\beta\alpha}\ . \tag{434}$$

Odatle slijedi

$$\Psi^{+}_{g}(t) \xrightarrow{t\to+\infty} \Phi_g(t) + \int d\beta \int d\alpha(-2\pi i)\delta(E_\alpha - E_\beta)e^{-iE_\alpha t}g(\alpha)\, \Phi_\beta T^{+}_{\beta\alpha}, \tag{435}$$

$$\Psi^{-}_{g}(t) \xrightarrow{t\to-\infty} \Phi_g(t) + \int d\beta \int d\alpha(2\pi i)\delta(E_\alpha - E_\beta)e^{-iE_\alpha t}g(\alpha)\, \Phi_\beta T^{-}_{\beta\alpha}\ . \tag{436}$$

$*$ Principalna vrijednost i δ-pol izraza $1/(x \pm i\varepsilon)$

- izrazi (433) i (434) se trivijalno dobivaju rabeći matematičku jednakost

$$(E \pm i\varepsilon)^{-1} \ = \ \frac{\mathcal{P}}{E} \mp i\pi\delta(E)\ . \tag{437}$$

Tu je $\frac{\mathcal{P}}{E}$ principana vrijednost $(E \pm i\varepsilon)^{-1}$. Smisao pojedinih članova se vidi iz sljedećeg izvoda, napravljenog za mali ali ne infinitezimalno mali ε.
D :

$$(E \pm i\varepsilon)^{-1} \ = \ \frac{E}{E^2 + \varepsilon^2} \mp i\frac{\varepsilon}{E^2 + \varepsilon^2} \ = \ \frac{\mathcal{P}_\varepsilon}{E} \mp i\pi\delta_\varepsilon(E)\ . \tag{438}$$

Prvi član se ponaša kao $1/E$ osim u $E = 0$. Drugi član se ponaša kao $\pi\delta(E)$ funkcija : za $E \neq 0$ njegova vrijednost je (skoro) 0, za $E = 0$ je "beskonačna", a njen integral jednak je π,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE\frac{\varepsilon}{E^2 + \varepsilon^2} \overset{x=E/\varepsilon}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \ = \ \pi\ . \tag{439}$$

U limesu $\varepsilon \to 0$ imamo $\frac{\mathcal{P}_\varepsilon}{E} \to \frac{\mathcal{P}}{E}$ i $\delta_\varepsilon(E) \to \delta(E)$.

3.2 S matrica

□ Definicija S matrice

$*$ u tipičnom eksperimentu se početno stanje (npr. Ψ_α^+) priprema (definira ga aparatura) u $t \to -\infty$, i to se stanje nakon raspršenja mjeri u $t \to +\infty$ u jednom od mogućih konačnih stanja definiranih aparaturom (npr. Ψ_β^-)
$*$ **amplituda prijelazne vjerojatnosti** za dani $\alpha \to \beta$ proces

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) \tag{440}$$

je element S matrice. Skup svih takvih matričnih elemenata,

$$\{S_{\beta\alpha}\} \tag{441}$$

čini S matricu.

$*$ Pretpostavlja se da operator translacije H jednako djeluje na "in" i "out" stanja.
Amon : Pri vremenskoj translaciji za $-\tau$, $exp(-iH\tau)$ bi stoga $S_{\beta\alpha}$ dobivao faktor $e^{i(E_\beta - E_\alpha)\tau}$, koji se eliminira zbog translacijske invarijantnosti S matrice, iz koje slijedi njena proporcionalnost energetskoj δ-funkciji

$$S_{\beta\alpha} \propto \delta(E_\beta - E_\alpha)\ . \tag{442}$$

□ Brzina prijelaza za $\alpha \to \beta$ proces

$\cdot$ za $V = 0$ "in" i "out" stanja su jednaka stanjima slobodnog Hamiltonijana, pa stoga je S matrica trivijalna

$$\begin{aligned} V &= 0 \ \Rightarrow\ \Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha \\ &\Rightarrow\ S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha)\ . \end{aligned} \tag{443}$$

Taj doprinos ne opisuje reakciju.
$\cdot$ Brzina reakcije je stoga proporcionalna

$$\text{brzina reakcije} \propto |S_{\beta\alpha} - \delta(\beta - \alpha)|^2\ . \tag{444}$$

□ Jednakost Hilbertovih prostora "in" i "out" stanja ($\{\Psi_\alpha^-\} = \{\Psi_\alpha^+\}$)

$\cdot$ Hilbertovi prostori "in" i "out" stanja nisu nezavisni, zato jer ih povezuje S-matrica,

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^+ &= \int d\beta\ \Psi_\beta^-(\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = \int d\beta\ \Psi_\beta^- S_{\beta\alpha}, \\ \Psi_\beta^- &= \int d\alpha\ \Psi_\alpha^+(\Psi_\alpha^+, \Psi_\beta^-) = \int d\alpha\ S_{\beta\alpha}^* \Psi_\alpha^+\ . \end{aligned} \tag{445}$$

Stoga postoji samo jedan prostor stanja, a "in" i "out" stanja odgovaraju dvama bazama Hilbertovog prostora stanja.

□ **Unitarnost S matrice**

· Budući da matrica $S_{\beta\alpha}$ povezuje dvije ortonormirane baze, ona je unitarna.

D:
Upotrebljavamo (107) i def. S matrice (440,441)

$$\begin{aligned}
\int d\beta\ S^*_{\beta\gamma} S_{\beta\alpha} &= \int d\beta\ (\Psi^+_\gamma, \Psi^-_\beta)(\Psi^-_\beta, \Psi^+_\alpha) \ = \ (\Psi^+_\gamma, \Psi^+_\alpha) \ = \ \delta(\gamma - \alpha) \\
&\Leftrightarrow \quad S^\dagger S \ = \ 1 \quad , \qquad (446) \\
\int d\beta\ S_{\gamma\beta} S^*_{\alpha\beta} &= \int d\beta\ (\Psi^-_\gamma, \Psi^+_\beta)(\Psi^+_\beta, \Psi^-_\alpha) \ = \ (\Psi^-_\gamma, \Psi^-_\alpha) \ = \ \delta(\gamma - \alpha) \\
&\Leftrightarrow \quad S S^\dagger \ = \ 1 \quad . \qquad (447)
\end{aligned}$$

□ **Definicija S operatora**

· Rabeći jednadžbu (421) dobijamo alternativni zapis S matrice,

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha} &\equiv (\Psi^-_\beta, \Psi^+_\alpha) \ = \ (\Phi_\beta, S\Phi_\alpha), \qquad (448) \\
S &\equiv \Omega^\dagger(+\infty)\Omega(-\infty) \ \equiv \ U(+\infty, -\infty), \qquad (449) \\
U(\tau, \tau_0) &\equiv \Omega^\dagger(\tau)\Omega(\tau_0) \ = \ \exp(iH_0\tau)\exp(-iH(\tau - \tau_0))\exp(-iH_0\tau_0)\ . \qquad (450)
\end{aligned}$$

S je tzv. S-operator. $S_{\beta\alpha}$ matrica je stoga jednaka skupu svih matričnih elemenata S operatora izmedju slobodnih stanja.
D:

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha} &= (\Psi^-_\beta, \Psi^+_\alpha) \overset{(421)}{=} (\Omega(+\infty)\Phi_\beta, \Omega(-\infty)\Phi_\alpha) \ = \ (\Phi_\beta, \Omega^\dagger(+\infty)\Omega(-\infty)\Phi_\alpha) \\
&= (\Phi_\beta, \Omega^\dagger(\tau)\Omega(\tau_0)\Phi_\alpha)\Big|_{\substack{\tau \to +\infty \\ \tau_0 \to -\infty}} \\
&\overset{(422)}{=} (\Phi_\beta, \exp(iH_0\tau)\exp(-iH(\tau - \tau_0))\exp(-iH_0\tau_0)\Phi_\alpha)\Big|_{\substack{\tau \to +\infty \\ \tau_0 \to -\infty}} \ . \quad \text{Q.E.D.} \qquad (451)
\end{aligned}$$

(448-450) će biti upotrebljene kod dokaza Lor. inv. S matrice i za izraz S matrice u vremenski ovisoj pert. teoriji.

□ **Veza $S_{\beta\alpha}$ i $T^+_{\beta\alpha}$ matrica, Bornova aproksimacija za $S_{\beta\alpha}$**

∗ **Veza $S_{\beta\alpha}$ i $T^+_{\beta\alpha}$ matrica**

Upotrebom izraza za Φ_g (vidi (419)), izraza Ψ_g^+ u limesu $t \to +\infty$ (435) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\Psi_g^+(t) &\xrightarrow{(435)\ :\ t\to+\infty} \Phi_g(t) + \int d\beta \int d\alpha (-2\pi i)\delta(E_\alpha - E_\beta) e^{-iE_\alpha t} g(\alpha)\Phi_\beta T^+_{\beta\alpha} \\
&\stackrel{(419)}{=} \int d\beta\ \Phi_\beta\, e^{-iE_\beta t} \int d\alpha\ g(\alpha) \Big[\delta(\beta-\alpha) - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) T^+_{\beta\alpha}\Big] . \qquad (452)
\end{aligned}
$$

Upotrijebljene su $\delta(E_\beta - E_\alpha)$ funkcije da bi se fazni faktor izbacio izvan unutarnje integracije.
S druge strane, uporabom transformacije izmedju "in" i "out" stanja (445), translacijsku invarijantnost u vremenu $S_{\beta\alpha}$ (442) ($\Rightarrow S_{\beta\alpha} \propto \delta(E_\beta - E_\alpha)$) i veze (419) (primjena sa funkcijom $\tilde{g}(\beta)$), dobijamo

$$
\begin{aligned}
\Psi_g^+(t) &\stackrel{(445)}{=} \int d\alpha\ e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \int d\beta\ \Psi^-_\beta S_{\beta\alpha} \stackrel{(442)}{=} \int d\beta\ \Psi^-_\beta \underbrace{\int d\alpha\ e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) S_{\beta\alpha}}_{e^{-iE_\beta t}\int d\alpha\ g(\alpha) S_{\beta\alpha}\ =\ e^{-iE_\beta t}\tilde{g}(\beta)} \\
&\xrightarrow{(419)\ :\ t\to+\infty} \int d\beta\ \Phi_\beta e^{-iE_\beta t} \int d\alpha\ g(\alpha) S_{\beta\alpha} . \qquad (453)
\end{aligned}
$$

Budući da je $g(\alpha)$ bilo koja glatka funkcija, dobijamo

$$
S_{\beta\alpha} \stackrel{(452,453)}{=} \Big[\delta(\beta-\alpha) - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) T^+_{\beta\alpha}\Big] . \qquad (454)
$$

$*$ Bornova aproksimacija

Za slabo medjudjelovanje V očekuje se da je razlika izmedju 'in' i slobodnog stanja mala u (454). Stoga je $T^+_{\beta\alpha} \approx (\Phi_\beta, V\Phi_\alpha)$, odakle

$$
S_{\beta\alpha} \approx \delta(\beta-\alpha) - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha)(\Phi_\beta, V\Phi_\alpha) . \qquad (455)
$$

To je tzv. Bornova aproksimacija.

$\square$ Dokaz ortonormiranosti i unitarnosti $S_{\beta\alpha}$ matrice preko Lippmann-Schwingerove jednadžbe

Dosadašni dokaz ortonormiranosti "in" i "out" stanja zavisio je o limesu $\tau \to \mp\infty$. Rabeći "in" i "out" stanja koja su rješenja LS jednadžbe pokazat ćemo njihovu ortonormiranost bez upotrebe spomenutog limesa. Na analogan način se pokazuje da i $S_{\beta\alpha}$ matrični elementi izgradjeni od LS "in" i "out" stanja zadovoljavaju uvjet unitarnosti. To je jaka potvrda da su rješenja LS jednadžbe ispravna "in" i "out" stanja.

$*$ Zahtjevi ortonormiranosti i unitarnosti i LS jednadžba

Kao prvo ispitajmo na koje uvjete bi uvjeti ortonormiranosti rješenja LS jednadžbe odnosno unitarnosti $S_{\beta\alpha}$ matrice izgradjene od LS rješenja vodili.

· **Zahtjev ortonormiranosti**

$$\delta(\beta-\alpha) \overset{zahtjev}{=} (\Psi^{\pm}_{\beta}, \Psi^{\pm}_{\alpha}) \tag{456}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\Phi_\beta + \int d\gamma \frac{\Phi_\gamma T^{\pm}_{\gamma\beta}}{E_\beta - E_\gamma \pm i\varepsilon}, \Phi_\alpha + \int d\gamma' \frac{\Phi_{\gamma'} T^{\pm}_{\gamma'\alpha}}{E_\alpha - E_{\gamma'} \pm i\varepsilon}\right) \\
&= \delta(\beta-\alpha) + \underbrace{\left(\frac{T^{\pm}_{\alpha\beta}}{E_\beta - E_\alpha \pm i\varepsilon}\right)^*}_{=(T^{\pm}_{\alpha\beta})^*/\ [-(E_\alpha - E_\beta \pm i\varepsilon)]} + \frac{T^{\pm}_{\beta\alpha}}{E_\alpha - E_\beta \pm i\varepsilon} \\
&+ \int d\gamma \frac{(T^{\pm}_{\gamma\beta})^* T^{\pm}_{\gamma\alpha}}{(E_\beta - E_\gamma \mp i\varepsilon)(E_\alpha - E_\gamma \pm i\varepsilon)}
\end{aligned} \tag{457}$$

$$\Rightarrow\ 0 = \frac{T^{\pm}_{\beta\alpha} - (T^{\pm}_{\alpha\beta})^*}{E_\alpha - E_\beta \pm i\varepsilon} + \int d\gamma \frac{(T^{\pm}_{\gamma\beta})^* T^{\pm}_{\gamma\alpha}}{(E_\beta - E_\gamma \mp i\varepsilon)(E_\alpha - E_\gamma \pm i\varepsilon)}\ . \tag{458}$$

· **Zahtjev unitarnosti**

$$\delta(\beta-\alpha) \overset{zahtjev}{=} \int d\gamma\ S^*_{\gamma\beta} S_{\gamma\alpha} \tag{459}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d\gamma [\delta(\gamma-\beta) + 2\pi i \delta(E_\gamma - E_\beta)(T^{+}_{\gamma\beta})]^* [\delta(\gamma-\alpha) - 2\pi i \delta(E_\gamma - E_\alpha)(T^{+}_{\gamma\alpha})] \\
&= \delta(\beta-\alpha) + 2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta)(T^{+}_{\alpha\beta})^* - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) T^{+}_{\beta\alpha} \\
&+ \int d\gamma (2\pi i)(-2\pi i)\delta(E_\alpha - E_\beta)\delta(E_\alpha - E_\gamma)(T^{+}_{\gamma\beta})^*(T^{+}_{\gamma\alpha})
\end{aligned} \tag{460}$$

$$\Rightarrow\ 0 = -2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta)\left[T^{+}_{\beta\alpha} - (T^{+}_{\alpha\beta})^* + 2\pi i \int d\gamma \delta(E_\alpha - E_\gamma)(T^{+}_{\gamma\beta})^*(T^{+}_{\gamma\alpha})\right] \tag{461}$$

∗ **Izraz za LS rješenja iz kojeg slijede jednadžbe (458) i (461)**

Izraz koji je potreban matrični element operatora V izmedju $\Psi^{\pm}_{\beta}$ i $\Psi^{\pm}_{\alpha}$ stanja. Upotrebom LS jednadžbe za $\Psi^{\pm}_{\beta}$ odnosno $\Psi^{\pm}_{\alpha}$ dobija se izraz iz kojeg slijede jednadžbe (458) i (461).

$$\begin{aligned}
&(\Psi^{\pm}_{\beta}, V\Psi^{\pm}_{\alpha}) \\
&\overset{(426)_L}{=} (\Psi^{\pm}_{\beta}, V[\Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1} V \Psi^{\pm}_{\alpha}]) \overset{(426)_R}{=} (\Phi_\beta + (E_\beta - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1} V\Psi^{\pm}_{\beta}, V\Psi^{\pm}_{\alpha}) \\
&\equiv (T^{\pm}_{\alpha\beta})^* + \int d\gamma\ \frac{(T^{\pm}_{\gamma\beta})^*(T^{\pm}_{\gamma\alpha})}{E_\alpha - E_\gamma \pm i\varepsilon} = (T^{\pm}_{\beta\alpha}) + \int d\gamma\ \frac{(T^{\pm}_{\gamma\beta})^*(T^{\pm}_{\gamma\alpha})}{E_\beta - E_\gamma \mp i\varepsilon}
\end{aligned} \tag{462}$$

$$\equiv \quad 0 \; = \; (T^{\pm}_{\beta\alpha}) - (T^{\pm}_{\alpha\beta})^* + \int d\gamma \; (T^{\pm}_{\gamma\beta})^*(T^{\pm}_{\gamma\alpha}) \frac{E_\alpha - E_\beta \pm 2i\varepsilon}{(E_\beta - E_\gamma \mp i\varepsilon)(E_\alpha - E_\gamma \pm i\varepsilon)} \tag{463}$$

$$\stackrel{(438)}{\equiv} \quad 0 \; = \; (T^{\pm}_{\beta\alpha}) - (T^{\pm}_{\alpha\beta})^*$$

$$+ \quad \int d\gamma \; (T^{\pm}_{\gamma\beta})^*(T^{\pm}_{\gamma\alpha}) \left[\frac{\mathcal{P}}{E_\beta - E_\gamma} - \frac{\mathcal{P}}{E_\alpha - E_\gamma} \pm i\pi\delta(E_\beta - E_\gamma) \pm i\pi\delta(E_\alpha - E_\gamma) \right] . \tag{464}$$

Množeći (463) sa $1/(E_\alpha - E_\beta \pm i\varepsilon)$ dobija se jednakost (458) (za $\epsilon = +0$ i konačni realni a vrijedi $(a \pm 2i\varepsilon)/(a \pm i\varepsilon) = 1$). Time dokazano da su rj. LS jed. ortonormirana.
Množeći (464) sa $\delta(E_\alpha - E_\beta)$ i izborom gornjeg (+) predznaka dobija se jednakost (461). Time je dokazano da $S_{\beta\alpha}$ matrica izgradjena od rješenja LS jednadžbe zadovoljava uvjet unitarnosti.

3.3 Simetrije S matrice

• Loretz invarijantnost S matrice

□ Definicija Lorentz invarijantnosti

- Iz svojstvene ortokrone Lorentz transformacije definiraju se unitarni operatori $U(\Lambda, a)$ koji djeluju na "in" i "out" stanja.

$$x \;\rightarrow\; \Lambda x + a \quad \Rightarrow \quad \Psi^{\pm}_{\alpha} \;\rightarrow\; U(\Lambda, a)\Psi^{\pm}_{\alpha}, \qquad U^{\dagger}(\Lambda, a)U(\Lambda, a) = 1\ . \tag{465}$$

- Lorentz invarijantnost se definira kao zahtjev da isti operator $U(\Lambda, a)$ djeluje na "in" i "out" stanja **jednako i kao u jednadžbi (405), tj. kao na skup nemedjudjelujućih stanja**.
Odatle slijedi **definicija Lorentz invarijantnosti (preciznije Lorentz kovarijantnosti) S-matrice**,

$$S_{\beta\alpha} \;\equiv\; (\Psi^{-}_{\beta}, \Psi^{+}_{\alpha}) \;=\; (U(\Lambda, a)\Psi^{-}_{\beta}, U(\Lambda, a)\Psi^{+}_{\alpha}) \tag{466}$$

$$\begin{aligned} &\equiv\; S_{p'_1\sigma'_1n'_1;p'_2\sigma'_2n'_2\ldots,p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2\ldots} \;=\; \exp\left[ia_\mu(p'^{\mu}_1 + p'^{\mu}_2 + \ldots - p^{\mu}_1 - p^{\mu}_2 - \ldots)\right] \\ &\times \left(\frac{(\Lambda p'_1)^0}{p'^0_1}\frac{(\Lambda p'_2)^0}{p'^0_2}\ldots\frac{(\Lambda p_1)^0}{p^0_1}\frac{(\Lambda p_2)^0}{p^0_2}\ldots\right)^{1/2} \\ &\times \sum_{\overline{\sigma}'_1\overline{\sigma}'_2\ldots}\sum_{\overline{\sigma}_1\overline{\sigma}_2\ldots} D^{(j'_1)*}_{\overline{\sigma}'_1\sigma'_1}(W(\Lambda, p'_1))\ldots D^{(j_1)}_{\overline{\sigma}_1\sigma_1}(W(\Lambda, p_1))\ldots \\ &\times S_{\Lambda p'_1\overline{\sigma}'_1n'_1;\Lambda p'_2\overline{\sigma}'_2n'_2\ldots,\Lambda p_1\overline{\sigma}_1n_1;\Lambda p_2\overline{\sigma}_2n_2\ldots}\ . \end{aligned} \tag{467}$$

To je definicija, ne dokaz, jer (467) vrijedi samo ako Hamiltonijan H zadovoljava neke uvjete. O tim uvjetima ćemo govoriti.

$*\ S_{\beta\alpha} \;\propto \delta^4(\sum p_f - \sum p_i)$

Lijeva strana jednadžbe (467) neovisna je o a^μ. Stoga ni desna strana ne smije ovisiti o a^μ. Zbog toga S-matrica mora biti proporcionalna δ-funkciji izraza uz a^μ u eksponecijalnoj funkciji, posebno njen dio koji opisuje medjudjelovanje,

$$S_{\beta\alpha} - \delta(\beta - \alpha) \;=\; -\underbrace{2\pi}_{(2\pi)^4} iM_{\beta\alpha}\delta^4(p_\beta - p_\alpha), \tag{468}$$

gdje su p_α (p_β) ukupni 4-impulsi "in" i "out" stanja. Odabir faktora 2π je Weinbergova konvencija; uobičajna konvencija u drugim knjigama je $(2\pi)^4$.

□ Uvjeti na generatore L.T. iz zahtjeva L. inv. S-matrice

- **Zadatak** : tražimo uvjete koje mora zadovoljavati H da bi Lor. inv. S-matrice bila ispunjena.
- Rabimo zapis S-matrice preko slobodnih stanja,

$$S_{\beta\alpha} \;\equiv\; (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) \;=\; (\Phi_\beta, S\Phi_\alpha), \tag{469}$$

i činjenicu da slobodna stanja takodjer tvore <u>**rep. nehomogene L. grupe - to znači da postoje unit. operatori koji induciraju transformaciju (405)**</u>,

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, a)\Phi_{p_1\sigma_1 n_1;p_2\sigma_2 n_2\ldots} \;&=\; \exp\left[ia_\mu(-p_1^\mu - p_2^\mu - \ldots)\right] \\ \times \left(\frac{(\Lambda p_1)^0}{p_1^0}\frac{(\Lambda p_2)^0}{p_2^0}\ldots\right)^{1/2} & \sum_{\overline{\sigma}_1\overline{\sigma}_2\ldots} D^{(j_1)}_{\overline{\sigma}_1\sigma_1}(W(\Lambda, p_1))\ldots\Phi_{\Lambda p_1\overline{\sigma}_1 n_1;\Lambda p_2\overline{\sigma}_2 n_2\ldots} \end{aligned} \tag{470}$$

Iz nje slijedi

$$L \overset{def}{\equiv} (U_0(\Lambda, a)\Phi_\beta, SU_0(\Lambda, a)\Phi_\alpha) \;=\; (U(\Lambda, a)\Psi_\beta^-, U(\Lambda, a)\Psi_\alpha^+) \overset{def}{\equiv} R\;. \tag{471}$$

Nadalje,

$$L \;=\; (\Phi_\beta, U_0^\dagger(\Lambda, a)SU_0(\Lambda, a)\Phi_\alpha) \;=\; R \;=\; (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) \;=\; (\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) \tag{472}$$

$$\Rightarrow\; S \;=\; U_0^\dagger(\Lambda, a)SU_0(\Lambda, a) \tag{473}$$

$$\Rightarrow\; 0 \;=\; [H_0, S] \;=\; [\vec{P}_0, S] \;=\; [\vec{J}_0, S] \;=\; [\vec{K}_0, S]\;. \tag{474}$$

- Relacija (473) slijedi jer (472) vrijedi za svaki par stanja Φ_α, Φ_β.
- Relacija (474) se dobija iz relacije (473) razmatrajući inf. $U_0(\Lambda, a)$.

$\boxed{\Rightarrow \text{L. invarijantnost} \Leftrightarrow S \text{ operator komutira sa svim generatorima slobodnih L.T.}}$

$**$ [Amon] : Slijedeće dvije tvrdnje su ekvivalentne :

a. Operatori potpunih Poicareovih transformacija $U(\Lambda, a)$ jednako djeluju na "in" i "out" stanja prema Eq. (405).
b. Operatori slobodnih Poincaréovih transformacija djeluju na slobodna stanja prema Eq. (405) odnosno Eq. (470) i komutiraju sa S operatorom.

Obje tvrdnje su ekvivalentne Lorentz invarijantnosti S matrice.

□ Komutacijske relacije slobodnih i potpunih generatora

- Budući da operatori H_0, $\vec{P}_0$, $\vec{J}_0$, $\vec{K}_0$ generiraju L.T. na vekt. prostoru $\{\Phi_\alpha\}$, $\Phi_\alpha \to$

$U_0(\Lambda, a)\Phi_\alpha$, oni zadovoljavaju komutacijske relacije za generatore Lorentzove grupe (196-202).

$$\begin{aligned}
[J_0^i, J_0^j] &= i\varepsilon_{ijk}J_0^k, && (475)\\
[J_0^i, K_0^j] &= i\varepsilon_{ijk}K_0^k, && (476)\\
[K_0^i, K_0^j] &= -i\varepsilon_{ijk}J_0^k, && (477)\\
[J_0^i, P_0^j] &= i\varepsilon_{ijk}P_0^k, && (478)\\
[K_0^i, P_0^j] &= iH_0\delta_{ij}, && (479)\\
[K_0^i, H_0] &= iP_0^i, && (480)\\
[J_0^i, H_0] &= [P_0^i, H_0] = [H_0, H_0] = [P_0^i, P_0^j] = 0 . && (481)
\end{aligned}$$

- Analogno vrijedi i za generatore H, $\vec{P}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$, koji generiraju L.T na prostoru $\{\Psi_\alpha^\pm\}$, $\Psi_\alpha^\pm \to U(\Lambda, a)\Psi_\alpha^\pm$

$$\begin{aligned}
[J^i, J^j] &= i\varepsilon_{ijk}J^k, && (482)\\
[J^i, K^j] &= i\varepsilon_{ijk}K^k, && (483)\\
[K^i, K^j] &= -i\varepsilon_{ijk}J^k, && (484)\\
[J^i, P^j] &= i\varepsilon_{ijk}P^k, && (485)\\
[K^i, P^j] &= iH\delta_{ij}, && (486)\\
[K^i, H] &= iP^i, && (487)\\
[J^i, H] &= [P^i, H] = [H, H] = [P^i, P^j] = 0 . && (488)
\end{aligned}$$

□ Veze slobodnih i potpunih generatora L.T.

∗ U gotovo svim poznatim teorijama polja (osim topološki deformiranih T.P., npr. sa mag. monopolima) vrijede relacije,

$$H = H_0 + V, \qquad \vec{P} = \vec{P}_0, \qquad \vec{J} = \vec{J}_0 . \tag{489}$$

∗ Odatle

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{(481,488)}{=} [H, \vec{J}] - [H_0, \vec{J}_0] \stackrel{(489)}{=} [V, \vec{J}_0], \qquad [H, \vec{J}_0] = 0, && (490)\\
0 &\stackrel{(481,488)}{=} [H, \vec{P}] - [H_0, \vec{P}_0] \stackrel{(489)}{=} [V, \vec{P}_0], \qquad [H, \vec{P}_0] = 0, && (491)
\end{aligned}$$

a odatle i zbog definicije S operatora (448,449) slijedi

$$\begin{aligned}
[\vec{P}_0, S] &\stackrel{(491,448)}{=} 0, && (492)\\
[\vec{J}_0, S] &\stackrel{(490,448)}{=} 0 . && (493)
\end{aligned}$$

Time su dva od četiri uvjeta (474) (drugi i treći) ispunjeni.

∗ Prvi od uvjeta (474) je posljedica translacijske invarijantnosti S matrice u vremenu (442),

$$(\Phi_\beta, [H_0, S]\Phi_\alpha) \;=\; (E_\beta - E_\alpha)(\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) \overset{(442)}{=} 0 \quad \forall \Phi_\beta, \Phi_\alpha \tag{494}$$

$$\Rightarrow [H_0, S] \;=\; 0. \tag{495}$$

∗ **Provjera konzistantnosti relacija (489)**

Relacije (489) su konzistentne sa definicijom obje definicije "in" i "out" stanja, (421) i (426). Npr.

$$\begin{aligned} \vec{p}\Psi^\pm_\alpha &= \vec{P}\Psi^\pm_\alpha \overset{426}{=} \vec{P}\Phi_\alpha + \vec{P}(E_\alpha - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1} V \Psi^\pm_\alpha \overset{(491,489)}{=} \\ &= \vec{P}_0\Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1} V \vec{P}\Psi^\pm_\alpha \\ &= \vec{p}(\Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1} V \Psi^\pm_\alpha) \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned} \tag{496}$$

Konzistentnost (421) je trivijalna. Analogno vrijedi i za $\vec{J}$.
(Weinberg tvrdi da se relacije (489) mogu dokazati rabeći (421) i (426) medjutim mislim da ne može.)

□ Veza $\vec{K}$ i $\vec{K}_0$

- još je preostalo dokazati četvrti uvjet Lor. inv. (474)

∗ $\vec{K} \neq \vec{K}_0$

Pokažimo da $\vec{K} \neq \vec{K}_0$: Pretpostavimo suprotno, $\vec{K} = \vec{K}_0$

$$\vec{K} \;=\; \vec{K}_0 \tag{497}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow [K^i, P^j] - [K^i_0, P^j_0] \overset{(497,489)}{=} 0 \\ &\overset{(479,486)}{=} iH\delta_{ij} - iH_0\delta_{ij} = iV\delta_{ij} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H \;=\; H_0, \qquad V \;=\; 0 \tag{498}$$

$\Rightarrow$ kontradikcija $\Rightarrow \vec{K} \neq \vec{K}_0$ Q.E.D.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{K} = \vec{K}_0 + \vec{W}, \quad \vec{W} \neq 0}. \tag{499}$$

Odatle

$$0 \;=\; i\vec{P} - i\vec{P}_0 \overset{(480,487)}{=} [\vec{K}, H] - [\vec{K}_0, H_0]$$

$$\overset{(499)}{=} \quad [\vec{K}_0+\vec{W},H_0+V]-[\vec{K}_0,H_0] \;=\; [\vec{K}_0,V]+[\vec{W},H]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0 \;=\; [\vec{K}_0,V]+[\vec{W},H]}\,. \tag{500}$$

· Napomena:
- Formalno svi matrični elementi (500) izmedju "in" ili "out" stanja daju $\vec{W}$

$$(\Psi_\beta,\vec{W}\Psi_\alpha) \;=\; \frac{1}{E_\alpha-E_\beta}(\Psi_\beta,[\vec{W},H]\Psi_\alpha) \;=\; -\frac{1}{E_\alpha-E_\beta}(\Psi_\beta,[\vec{K}_0,V]\Psi_\alpha). \tag{501}$$

- Medjutim ispunjenje (500) nije dovoljno za rješenje $\vec{W}$. Nije dovoljno zadovoljiti komutacijske relacije
- Osnovni zahtjev je da H, $\vec{P}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ jednako djeluju na "in" i "out" stanja
- (500) daje bitnu informaciju ako je $\vec{W}$ glatka funkcija energija, i posebno ako nema $\frac{1}{E_\alpha-E_\beta}$ singularitet. Tada se može dokazati da je zadovoljen 4-ti uvjet Lor. invarijantnosti S matrice, (474), $[\vec{K}_0,S]=0$.

D: Dokaz ide u par koraka :

a. Izraz za $[\vec{K}_0,U(t,t_0)]$:

$$\begin{aligned}
[\vec{K}_0,U(t,t_0)] &\overset{(422)}{=} [\vec{K}_0,\Omega^\dagger(t)\Omega(t_0)] \\
&\overset{(450)}{=} [\vec{K}_0,e^{iH_0t}e^{iH(t_0-t)}e^{-iH_0t_0}] \\
&\overset{(499)}{=} [\vec{K}_0,e^{iH_0t}]e^{iH(t_0-t)}e^{-iH_0t_0} \\
&+ \quad e^{iH_0t}[\vec{K},e^{iH(t_0-t)}]e^{-iH_0t_0} \\
&- \quad e^{iH_0t}[\vec{W},e^{iH(t_0-t)}]e^{-iH_0t_0} \\
&+ \quad e^{iH_0t}e^{iH(t_0-t)}[\vec{K}_0,e^{-iH_0t_0}]\,.
\end{aligned} \tag{502}$$

Uporabom (480) $\equiv [\vec{K}_0,H_0]=i\vec{P}_0=i\vec{P}$, te komutativnosti $\vec{P}_0$ i H_0 tj. $\vec{P}$ i H slijedi

$$\begin{aligned}
[\vec{K}_0,e^{iH_0t}] &= (it)(i\vec{P}_0)e^{iH_0t} \;=\; -t\vec{P}_0e^{iH_0t}; \\
[\vec{K},e^{iHt}] &= -t\vec{P}e^{iHt}.
\end{aligned} \tag{503}$$

pa

$$\begin{aligned}
&[\vec{K}_0,U(t,t_0)] \\
&= \underbrace{[(-t\vec{P}_0)+(-(t_0-t)\vec{P})-(-t_0\vec{P}_0)]}_{=0}e^{iH_0t}e^{iH(t_0-t)}e^{-iH_0t_0} \\
&- \quad e^{iH_0t}\vec{W}e^{-iH_0t}e^{iH_0t}e^{iH(t_0-t)}e^{-iH_0t_0} \\
&+ \quad e^{iH_0t}e^{iH(t_0-t)}e^{-iH_0t_0}e^{iH_0t_0}\vec{W}e^{-iH_0t_0} \\
&= \quad -\vec{W}(t)U(t,t_0)+U(t,t_0)\vec{W}(t_0),
\end{aligned} \tag{504}$$

gdje

$$\vec{W}(\tau) \equiv e^{iH_0\tau}\vec{W}e^{-iH_0\tau} . \tag{505}$$

Rezimirajmo

$$\boxed{[\vec{K}_0, U(t,t_0)] = -\vec{W}(t)U(t,t_0) + U(t,t_0)\vec{W}(t_0)} \tag{506}$$

b. Iščezavanje matričnog elementa $(\Phi_g(\tau), \vec{W}\Phi_{\overline{g}}(\tau))$, $\tau \to \pm\infty$

- Pretpostavlja se da matrični elementi $(\Phi_\alpha, \vec{W}\Phi_\beta)$ nemaju singulariteta na realnoj osi $(1/(E_\beta - E_\alpha))$. Odatle,

$$\begin{aligned}(\Phi_g(\tau), \vec{W}\Phi_{\overline{g}}(\tau)) &= \int d\alpha d\beta\, g^*(\alpha)\overline{g}(\beta)e^{i(E_\alpha - E_\beta)\tau}(\Phi_\alpha, \vec{W}\Phi_\beta) \\ &= \int d\alpha\, e^{iE_\alpha\tau}g^*(\alpha)\underbrace{\int d\beta\, e^{-iE_\beta\tau}\overline{g}(\beta)\underbrace{(\Phi_\alpha, \vec{W}\Phi_\beta)}_{bez\ sing.\in\mathbb{R}}}_{\to 0\ for\ \tau\to\pm\infty} \xrightarrow{\tau\to\pm\infty} 0 \qquad (507) \\ &= \int d\beta\, e^{-iE_\beta\tau}\overline{g}(\beta)\underbrace{\int d\alpha e^{iE_\alpha\tau}g^*(\alpha)\underbrace{(\Phi_\alpha, \vec{W}\Phi_\beta)}_{bez\ sing.\in\mathbb{R}}}_{\to 0\ for\ \tau\to\pm\infty} \xrightarrow{\tau\to\pm\infty} 0 . \qquad (508)\end{aligned}$$

- Uočite da izvod predvidja i $\tau \to \pm\infty$ limese matričnih elemenata u kojima je samo jedno stanje valni paket,

$$(\Phi_g(\tau), \vec{W}\Phi_\alpha) \xrightarrow{\tau\to\pm\infty} 0, \qquad (\Phi_\alpha, \vec{W}\Phi_{\overline{g}}(\tau)) \xrightarrow{\tau\to\pm\infty} 0 . \tag{509}$$

- Uočite takodjer da zbog

$$\Phi_g(\tau) \overset{(419,420)}{=} e^{-iH_0\tau}\Phi_g(0) \qquad [e^{-iH_0 t}\Phi_g(\tau) = \Phi_g(t+\tau)] \tag{510}$$

vrijedi

$$(\Phi_g(\tau), \vec{W}\Phi_{\overline{g}}(\tau)) \overset{(505)}{=} (\Phi_g(0), \vec{W}(\tau)\Phi_{\overline{g}}(0)) . \tag{511}$$

Zbog toga se (507) i (508) mogu interpretirati (oprez : uvijek su tež. fu. prisutne)

$$\vec{W}(\tau) \xrightarrow{\tau\to\pm\infty} 0 . \tag{512}$$

$*$ **Implikacije relacije (512)** :

· **Lorentz invarijantnost S matrice**
Iz relacije (512) direktno slijedi

$$
\begin{aligned}
[\vec{K}_0, S] \;\equiv\; & [\vec{K}_0, U(\infty,-\infty)] \stackrel{(506)}{=} \\
& -\vec{W}(\infty)U(\infty,-\infty) + U(\infty,-\infty)\vec{W}(-\infty) \stackrel{(512)}{=} 0\ .
\end{aligned}
\tag{513}
$$

Time je dokazan i zadnji od četiri uvjeta Lorentz invarijantnosti S matrice (474)

$$
(474) \equiv \boxed{[(H_0, \vec{P}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0), S] \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Lor. inv. ispunjena}}
$$

· **Relacije slobodnih i potpunih operatora, provjera konziztentnosti komutacijskih relacija**
Takodjer, iz relacija (506) i (512) za $t = 0$ i $t_0 \to \mp\infty$ slijedi

$$
\begin{aligned}
& [\vec{K}_0, U(0,\pm\infty)] \stackrel{(512)}{=} -\vec{W}(0)U(0,\pm\infty) \\
& \stackrel{(499)}{\equiv} \vec{K}\Omega(\pm\infty) \;=\; \Omega(\pm\infty)\vec{K}_0,
\end{aligned}
\tag{514}
$$

gdje smo (u drugom retku) upotrijebili

$$
U(0,\pm\infty) \stackrel{(450)}{=} \Omega(\pm\infty) \stackrel{(422)}{=} \exp(iH\tau)\exp(-iH_0\tau)|_{\tau\to\pm\infty}\ .
\tag{515}
$$

- Zbog jednakosti $\vec{P} = \vec{P}_0$ i $\vec{J} = \vec{J}_0$ (vidi Eq. (489)), Eq. (515) i komutativnosti operatora impulsa i kut. kol. gib, sa H_0 i H vrijedi

$$
\vec{P}\Omega(\pm\infty) \;=\; \Omega(\pm\infty)\vec{P}_0 \qquad \vec{J}\Omega(\pm\infty) \;=\; \Omega(\pm\infty)\vec{J}_0\ .
\tag{516}
$$

- Takodjer budući za svako $\Psi^{\pm}_{\alpha}$

$$
\begin{aligned}
H\Psi^{\mp}_{\alpha} \;&=\; H\Omega(\pm\infty)\Phi_{\alpha} \\
&=\; E_{\alpha}\Psi^{\mp}_{\alpha} \;=\; \Omega(\pm\infty)E_{\alpha}\Phi_{\alpha} \;=\; \Omega(\pm\infty)H_0\Phi_{\alpha} \\
&\Rightarrow\; H\Omega(\pm\infty) \;=\; \Omega(\pm\infty)H_0\ .
\end{aligned}
\tag{517}
$$

Iz relacija (517,516,514) slijedi da su potpuni i slobodni generatori Lor. transf. vezani unitarnom transf.,

$$
(H, \vec{P}, \vec{J}, \vec{K}) \;=\; \Omega(\pm\infty)(H_0, \vec{P}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)\Omega^{\dagger}(\pm\infty)\ .
\tag{518}
$$

Stoga su komutacijske relacije za potpune i slobodne generatore L.T. konziztentne.

• **Interne (unutarnje) simetrije**

∗ Interne simetrije djeluju samo na kvantne brojeve koje karakteriziraju čestice n. One ne djeluju na impuls i spin (na koje djeluju L.T.) pa stoga izgledaju jednako u svakom inercijalnom sustavu. Drugim riječima Lorentzove transformacije i Lorentzova invarijantnost i interne simetrije su potpuno nezavisne.

∗ Simetrijska transformacija interne simetrije T djeluje na Hilbertovom prostoru stanja $\{\Psi\}$ kao unitarni operator $U(T)$ koji inducira linearne transformacije u indeksima n,

$$U(T)\Psi_{p_1\sigma_1 n_1;p_2\sigma_2 n_2;\ldots} = \sum_{\overline{n}_1,\overline{n}_2,\ldots} \mathcal{D}_{\overline{n}_1 n_1}(T)\mathcal{D}_{\overline{n}_2 n_2}(T)\ldots\Psi_{p_1\sigma_1\overline{n}_1;p_2\sigma_2\overline{n}_2;\ldots} \tag{519}$$

∗ Kao i druge simetrijske transformacije (vidi "SIMETRIJSKE TRANSFORMACIJE TVORE GRUPU" ispod Eq. (132)), interne transformacije zadovoljavaju grupno množenje

$$U(\overline{T})U(T) = U(\overline{T}T), \tag{520}$$

gdje je se transformacija $\overline{T}T$ dobija kao rezultat djelovanja T pa $\overline{T}$ transformacije.

∗ Matrice $\mathcal{D}(T)$ koje se dobivaju djelovanjem $U(T)$ na neko stanje zadovoljavaju

$$\mathcal{D}(\overline{T})\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(\overline{T}T), \tag{521}$$

$$\mathcal{D}^\dagger(T) = \mathcal{D}^{-1}(T)\ . \tag{522}$$

Drugim riječima čine unitarnu matričnu reprezentaciju transformacija $\{T\}$.
D:
a. Reprezentacija

$$U(\overline{T})U(T)\Psi_{p_1\sigma_1 n_1;\ldots} = \sum_{\overline{n}_1\overline{\overline{n}}_1\ldots} (\mathcal{D}_{\overline{\overline{n}}_1\overline{n}_1}(\overline{T})\mathcal{D}_{\overline{n}_1 n_1}(T))\ldots\Psi_{p_1\sigma_1\overline{\overline{n}}_1;\ldots} \tag{523}$$

$$U(\overline{T}T)\Psi_{p_1\sigma_1 n_1;\ldots} = \sum_{\overline{\overline{n}}_1\ldots} \mathcal{D}_{\overline{\overline{n}}_1 n_1}(\overline{T}T)\ldots\Psi_{p_1\sigma_1\overline{\overline{n}}_1;\ldots} \tag{524}$$

$$\Rightarrow\quad \forall i\quad \mathcal{D}_{\overline{\overline{n}}_i n_i}(\overline{T}T) = \sum_{\overline{n}_i} \mathcal{D}_{\overline{\overline{n}}_i\overline{n}_i}(\overline{T})\mathcal{D}_{\overline{n}_i n_i}(T)\ ,\ \ldots \qquad \text{(Q.E.D. (521))} \tag{525}$$

b. Unitarnost

$$\begin{aligned}(\Psi^\pm_\alpha,\Psi^\pm_\beta) &= (U(T)\Psi^\pm_\alpha, U(T)\Psi^\pm_\beta)\\ &\equiv ((\delta(\vec{p}_1-\vec{p}\,'_1)\delta_{\sigma_1\sigma'_1}\delta_{n_1 n'_1}\ldots) \pm \ldots)\\ &= \sum_{\overline{n}_1\overline{n}'_1\ldots} (\mathcal{D}^*_{\overline{n}_1 n_1}(T)\ldots)(\mathcal{D}_{\overline{n}'_1 n'_1}(T)\ldots)\ \underbrace{(\Psi^\pm_{p_1\sigma_1\overline{n}_1\ldots},\Psi^\pm_{p'_1\sigma'_1\overline{n}'_1\ldots})}_{((\delta(\vec{p}_1-\vec{p}\,'_1)\delta_{\sigma_1\sigma'_1}\delta_{\overline{n}_1\overline{n}'_1}\ldots)\ \pm\ \ldots)}\end{aligned}$$

$$= \left(\left(\delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_1')\delta_{\sigma_1\sigma_1'} \sum_{\overline{n}_1} \mathcal{D}^\dagger_{n_1\overline{n}_1}(T)\mathcal{D}_{\overline{n}_1 n_1'}(T) \ \ldots\right) \ \pm \ \ldots\right)$$

$$\Rightarrow \quad \forall i \quad \sum_{\overline{n}_i} \mathcal{D}^\dagger_{n_i\overline{n}_i}(T)\mathcal{D}_{\overline{n}_i n_i'}(T) \ = \ \delta_{n_i n_i'} \qquad \text{(Q.E.D. (522))} \tag{526}$$

$*$ **Invarijantnost S matrice na internu simetriju**

- Uz pretpostavku da $U(T)$ jednako djeluje na "in" i "out" stanja dobija se invarijantnost S matrice na internu transformaciju (Weinberg : komutativnost S matrice sa $\mathcal{D}$),

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} \ &\equiv \ S_{p_1'\sigma_1' n_1';\, \ldots, p_1\sigma_1 n_1;\, \ldots} \\ &= \ \sum_{\overline{n}_1', \ldots} \sum_{\overline{n}_1, \ldots} (\mathcal{D}^*_{\overline{n}_1' n_1'}(T) \ \ldots)(\mathcal{D}_{\overline{n}_1 n_1}(T) \ \ldots) S_{p_1'\sigma_1'\overline{n}_1';\, \ldots, p_1\sigma_1\overline{n}_1;\, \ldots} \ \equiv \ S_{I\beta I\alpha} \ . \end{aligned} \tag{527}$$

- Kao i kod L. inv. S matrice, (527) je **definicija** inv. S na int. sim. T.
- Pokazat ćemo da je ona ispunjena (tj. da $U(T)$ jednako djeluje na "in" i "out" stanja) ako postoji operator "neperturbirane" transformacije $U_0(T)$ koja na slobodnim stanjima Φ_α inducira transformacije kao u (519)

$$\begin{aligned} U_0(T)\Phi_\alpha \ &= \ U_0(T)\Phi_{p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2;\, \ldots} \\ &= \ \sum_{\overline{n}_1 \overline{n}_2 \, \ldots} \mathcal{D}_{\overline{n}_1 n_1}(T)\mathcal{D}_{\overline{n}_2 n_2}(T) \ldots \Phi_{p_1\sigma_1\overline{n}_1; p_2\sigma_2\overline{n}_2;\, \ldots} \ = \ \Phi_{I\alpha}, \end{aligned} \tag{528}$$

i komutira sa H_0 i H (V) (odnosno sa S operatorom),

$$\begin{aligned} [H_0, U_0(T)] \ &= \ 0 \quad \equiv \quad U_0^{-1}(T)H_0U_0(T) \ = \ H_0, \\ [V, U_0(T)] \ &= \ 0 \quad \equiv \quad U_0^{-1}(T)VU_0(T) \ = \ V \ . \end{aligned} \tag{529}$$

D:
- S i $U_0(T)$ komutiraju

$$\begin{aligned} & U_0^{-1}(T)SU_0(T) \\ & \overset{(449,450)}{=} \quad U_0^{-1}(T) \ [e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0}] \ U_0(T)\Big|_{\substack{\tau \to +\infty \\ \tau_0 \to -\infty}} \\ & = \quad e^{i\,[U_0^{-1}(T)H_0U_0(T)]\,\tau} e^{-i\,[U_0^{-1}(T)HU_0(T)]\,(\tau-\tau_0)} e^{-i\,[U_0^{-1}(T)H_0U_0(T)]\,\tau_0}\Big|_{\substack{\tau \to +\infty \\ \tau_0 \to -\infty}} \\ & \overset{(529)}{=} \quad \exp(iH_0\tau)\exp(-iH(\tau-\tau_0))\exp(-iH_0\tau_0)\Big|_{\substack{\tau \to +\infty \\ \tau_0 \to -\infty}} \ = \ S \\ & \Rightarrow \quad [S, U_0(T)] \ = \ 0 \ . \end{aligned} \tag{530}$$

- "in" i "out" stanja se jednako transformiraju na T transf.

$$S_{\beta\alpha} \ \overset{a}{=} \ (\Psi^-_\beta, \Psi^+_\alpha) \ \overset{b}{=} \ (\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) \ \overset{b,(530)}{=} \ (\Phi_\beta, U_0^{-1}(T)SU_0(T)\Phi_\alpha)$$

$$\stackrel{b}{=} \quad (\Phi_{I\beta}, S\Phi_{I\alpha}) \;\equiv\; (\Psi^-_{I\beta}, \Psi^+_{I\alpha})$$

$$\stackrel{a,b}{\Rightarrow} \quad U(T)\Psi^+_\alpha \;=\; \Psi^+_{I\alpha}, \qquad U(T)\Psi^-_\beta \;=\; \Psi^-_{I\beta} \qquad \text{Q.E.D.} \tag{531}$$

$*$ **Jednakost** $U(T) \;=\; U_0(T)$ Rabeći bilo definiciju "in" i "out" stanja (421), bilo Lippmann-Schwingerovu jednadžbu (426) nalazi se da je

$$U(T) \;=\; U_0(T)\ . \tag{532}$$

D:
- dokaz iz (421)
Iz (529) i definicije $\Omega(\tau)$ slijedi

$$[\Omega(\tau), U_0(T)] \;=\; 0 \tag{533}$$

Odatle

$$\begin{aligned} U_0(T)\Psi^\pm_\alpha &\stackrel{(421)}{=} U_0(T)\Omega(\mp\infty)\Phi_\alpha \;=\; \Omega(\mp\infty)U_0(T)\Phi_\alpha \;=\; \Omega(\mp\infty)\Phi_{I\alpha} \\ &\stackrel{(421)}{=} \Psi^\pm_{I\alpha} \;=\; U(T)\Psi^\pm_\alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ U_0(T) \;=\; U(T) \qquad \text{Q.E.D.} \tag{534}$$

- dokaz iz (426)

$$(426)\ \Rightarrow\ \Phi_{I\alpha} \;=\; U_0(T)\Phi_\alpha \;=\; U_0(T)[\Psi^\pm_\alpha - (E_\alpha - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1}V\Psi^\pm_\alpha]$$

$$\stackrel{(529)}{=} [1 - (E_\alpha - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1}V]U_0(T)\Psi^\pm_\alpha \tag{535}$$

$$(426)\ \Rightarrow\ \Phi_{I\alpha} \;=\; [1 - (E_\alpha - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1}V]\Psi^\pm_{I\alpha} \tag{536}$$

$$\Rightarrow\ \Psi^\pm_{I\alpha} \;\equiv\; U(T)\Psi^\pm_\alpha \stackrel{(535,536)}{=} U_0(T)\Psi^\pm_\alpha$$

$$\Rightarrow\ U(T) \;=\; U_0(T) \qquad \text{Q.E.D.} \tag{537}$$

□ Jednoparametarske Abelove interne Lieve grupe

- Jednoparametarske Abelove interne simetrije imaju veliku fizikalnu primjenu

$*$ Grupno množenje dano je sa (146)

$$T(\theta)T(\overline{\theta}) \stackrel{(146)}{=} T(\theta + \overline{\theta})\ . \tag{538}$$

$\Rightarrow$ Operatori u Hilbertovom prostoru prema (148) imaju oblik

$$U(T(\theta)) \;=\; \exp(iQ\theta), \qquad Q^\dagger = Q\ . \tag{539}$$

$*$ $\mathcal{D}$ matrice imaju oblik

$$\mathcal{D}_{nn'}(\mathcal{T}(\theta)) \;=\; \delta_{nn'}\exp(iq_n\theta)\ . \tag{540}$$

D :
Grupa je jednoparametarska $\Rightarrow$ transformirano stanje (zraka) se podudara sa početnim $\Rightarrow$

$$U(T)\Phi_\alpha \;\propto\; \Phi_\alpha \;\Rightarrow\; U(T)\Phi_{p_1\sigma_1 n_1;\,\ldots} \;=\; \exp\Big(i\,[\sum_{n_i} q_{n_i}]\theta\Big)\Phi_{p_1\sigma_1 n_1;\,\ldots}$$

$$\Rightarrow\quad \mathcal{D}_{n_i n_i'}(\mathcal{T}(\theta)) \;=\; \delta_{n_i n_i'}\exp(iq_{n_i}\theta), \qquad \text{Q.E.D.} \tag{541}$$

gdje su q_{n_i} QB koji ovise o čestici.

$*$ Invarijantnost S matrice i sačuvanje naboja

Zbog (540) invarijantnost S matrice (527) na transf. 1-param. Abelove grupe glasi

$$S_{p_1'\sigma_1'n_1';\,\ldots,p_1\sigma_1 n_1;\,\ldots} \;=\; \exp[(-iq_{n_1'}+\ldots)+(iq_{n_1}+\ldots)]S_{p_1'\sigma_1'n_1';\,\ldots,p_1\sigma_1 n_1;\,\ldots}$$

$$\Rightarrow\quad q_{n_1'}+\ldots \;=\; q_{n_1}+\ldots \tag{542}$$

Drugim riječima suma q-ova je sačuvana; ako (542) nije ispunjena S matrica je jednaka nuli.

$*$ Primjeri sačuvanih naboja :
$\cdot$ sačuvanje električnog naboja Q : egzaktno : baždarna simetrija
$\cdot$ sačuvanje barionskog (B) i leptonskog broja (L) : aproksimativno : globalna simetrija
$\cdot$ aproksimativne simetrije, npr stranost (S) :
- Butler 1947 : našao K^0; poslije Λ^0; $\Sigma^\pm$, Σ^0
- zakon sačuvanja $\Rightarrow n+\pi^+ \to K^+ + \Lambda^0$: uvijek u parovima
- raspadi : $\Delta S \neq 0$: slaba medjudjelovanja krše S : $\Lambda^0 \to p+\pi^-$, $K^- \to \pi^+\pi^0$

□ Ne-Abelove interne simetrije

$*$ Izotopna spinska (izospinska) simetrija

- Kod ne-Abelovih internih simetrija generatori medjusobno ne komutiraju. Standardni primjer za njih je izotopna spinska simetrija koju je sugerirao 1937 Heisenberg da bi objasnio eksperimentalno opaženu jednakost $p-p$ i $p-n$ jakosti medjudjelovanja.

- Grupno se izotopna spinska simetrija opisuje $SU(2)$ grupom. $SU(2)$ grupa je grupa-pokrivač $SO(3)$ grupe pa stoga ima istu algebru kao ona,

$$[t_i, t_j] = i\varepsilon_{ijk} t_k \; . \tag{543}$$

Opis izospinskog stanja je dan sa dva broja : cjelobrojnim ili polucjelobrojnim brojem, izospinom t i jednom od $2t+1$ mogućih vrijednosti projekcije izospina na z os t_3.

- Posljedica izospinske simetrije je npr. približna degeneracija stanja koja pripadaju izospinskom multipletu : (p,n), (π^+, π^0, π^-)

- Digresija : Ulaganjem izospinske simetrije u $SU(3)$ grupu (Gell-Mann, Neeman 1960) dobijeno je objašnjenje za eksperimentalnu opaženu vezu naboja projekcija izospina, stranosti i barionskog broja čestice,

$$Q = t_3 + \frac{B+S}{2} \; . \tag{544}$$

$*$ **Posljedice sačuvanja izospinske simetrije kod reakcija** : sačuvanje izospina u reakciji

· Ilustracija na primjeru reakcije $A+B \to C+D$:

- Iz invarijantnosti S matrice na izospinske tranformacije ($\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ sadrže sve QB osim izospinskih),

$$S^{t_C t_D, t_A t_B}_{t_{3C} t_{3D} \tilde{\beta};\, t_{3A} t_{3B} \tilde{\alpha}} = \sum_{\bar{t}_{3C} \bar{t}_{3D} \bar{t}_{3A} \bar{t}_{3B}} D^{t_C *}_{\bar{t}_{3C} t_{3C}}(\vec{\omega}) D^{t_D *}_{\bar{t}_{3D} t_{3D}}(\vec{\omega}) D^{t_A}_{\bar{t}_{3A} t_{3A}}(\vec{\omega}) D^{t_B}_{\bar{t}_{3B} t_{3B}}(\vec{\omega}) S^{t_C t_D, t_A t_B}_{\bar{t}_{3C} \bar{t}_{3D} \tilde{\beta};\, \bar{t}_{3A} \bar{t}_{3B} \tilde{\alpha}}, \tag{545}$$

gdje su matrice rotacije u izospinskom prostoru za reprezentaciju t_I i matrični elementi izospinskih generatora $\vec{T}$

$$\begin{aligned} D^{t_I}_{\bar{t}_{3I} t_{3I}}(\vec{\omega}) &\equiv (e^{i\vec{\omega}\vec{T}})_{\bar{t}_I \bar{t}_{3I}\, t_I t_{3I}} \equiv (\bar{t}_I \bar{t}_{3I}, e^{i\vec{\omega}\vec{T}} t_I t_{3I}) \equiv (e^{i\vec{\omega}\vec{T}_{t_I}})_{\bar{t}_{3I} t_{3I}}, \\ (t'_I t'_{3I}, \vec{T}^2 t_I t_{3I}) &= \delta_{t'_I t_I} \delta_{t'_{3I} t_{3I}} t_I (t_I + 1), \\ (t'_I t'_{3I}, T_3 t_I t_{3I}) &= \delta_{t'_I t_I} \delta_{t'_{3I} t_{3I}} t_{3I}, \\ (t'_I t'_{3I}, (T_1 \pm i T_2) t_I t_{3I}) &= \delta_{t'_I t_I} \delta_{t'_{3I} t_{3I} \pm 1} \sqrt{t_I(t_I+1) - t_{3I}(t_{3I} \pm 1)}, \end{aligned} \tag{546}$$

slijedi da se S matrični element može napisati preko invarijantnih matričnih elementa S_T i izospinskih $SU(2)$ CGK

$$\begin{aligned} S^{t_C t_D, t_A t_B}_{t_{3C} t_{3D} \tilde{\beta};\, t_{3A} t_{3B} \tilde{\alpha}} &= \sum_{t t_3} (t t_3 t_C t_D, t_C t_{3C} t_D t_{3D})(t t_3 t_A t_B, t_A t_{3A} t_B t_{3B}) (S_t)_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}, \\ t_3 &= t_{A3} + t_{B3} = t_{C3} + t_{D3} \; . \end{aligned} \tag{547}$$

$(tt_3t_At_B, t_At_{3A}t_Bt_{3B}) = \langle tt_3t_At_B|t_At_{3A}t_Bt_{3B}\rangle$ su izospinski $SU(2)$ CGK.
D:
a. Sačuvanje 3-će komponenete izospina dobija se već razmatranjem infinitezimalnih transformacija uz ω_3 :

$$0 \overset{(546)}{=} (-t_{3C} - t_{3D} + t_{3A} + t_{3B}) S^{t_Ct_D, t_At_B}_{t_{3C}t_{3D}\tilde{\beta};\, t_{3A}t_{3B}\tilde{\alpha}} \ . \tag{548}$$

b. Za drugi dio dokaza rabi se izraz za tenzorske produkte izospinskih stanja,

$$\begin{aligned} |t_At_{A3}) \otimes |t_Bt_{B3}) &= \sum_t (tt_{A3} + t_{B3}\, t_At_B, t_At_{A3}\, t_Bt_{B3}) |tt_{A3} + t_{B3}), \\ |t_Ct_{C3}) \otimes |t_Dt_{D3}) &= \sum_{t'} (t't_{C3} + t_{D3}\, t_Ct_D, t_Ct_{C3}\, t_Dt_{D3}) |t't_{C3} + t_{D3}) \ . \end{aligned} \tag{549}$$

iz kojeg slijedi da se početno i konačno kompozitno stanje može prikazati preko rezonantnih stanja $|tt_3)$ i $|t't_3)$, $t_3 = t'_3$ sa CGK kao koeficijantima. Zbog zahtjeva izospinske invarijantnosti preživljavaju samo članovi za koje se ulazni i izlazno rezonantno stanje jednako transformira, $t = t'$ i $t_3 = t'_3$. Odatle slijedi i zahtjev invarijantnosti matričnog elementa na izospinsku transformaciju,

$$\begin{aligned} S^{t_Ct_D, t_At_B}_{t_{3C}t_{3D}\tilde{\beta};\, t_{3A}t_{3B}\tilde{\alpha}} &= \sum_t (tt_3t_Ct_D, t_Ct_{3C}t_Dt_{3D})(tt_3t_At_B, t_At_{3A}t_Bt_{3B}) S_{tt_3, tt_3}, \\ t_3 &= t_{A3} + t_{B3} = t_{C3} + t_{D3}; \end{aligned} \tag{550}$$

S_{tt_3,tt_3} je neovisan o t_3, tj. $S_{tt_3,tt_3} = S_{tt} = S_t$. Q.E.D.

• Paritet

□ P invarijantnost S matrice

∗ Uvjet valjanosti invarijantnosti S matrice na P simetriju ($\mathcal{P} : \vec{x} \to -\vec{x}$) jest postojanje unitarnog operatora $P \equiv U(\mathcal{P})$ koji transformira "in" i "out" stanja jednako i kao direktni produkt jednočestičnih stanja

$$\begin{aligned} P\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1;\,\ldots} &\overset{M_{n_1}>0}{=} \eta_{n_1} \ldots \Psi^{\pm}_{\mathcal{P}p_1\sigma_1 n_1;\,\ldots} \\ &\overset{M_{n_1}=0}{=} \eta_{n_1\sigma_1} \ldots \Psi^{\pm}_{\mathcal{P}p_1 -\sigma_1 n_1;\,\ldots} \end{aligned} \tag{551}$$

$$\equiv P\Psi^{\pm}_{\alpha} = \Psi^{\pm}_{\mathcal{P}\alpha}, \tag{552}$$

gdje je η_n paritet svojstven čestici tipa n.

$*$ Definicija sačuvanja pariteta S matrice (uvjet sačuvanja pariteta S matrice tada glasi

$$
\begin{aligned}
& S_{p_1'\sigma_1'n_1';p_2'\sigma_2'n_2';\,\ldots,p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\,\ldots} \\
&= \eta^*_{n_1'}\eta^*_{n_2'} \ \ldots \eta_{n_1}\eta_{n_2} \ \ldots S_{\mathcal{P}p_1'\sigma_1'n_1';\mathcal{P}p_2'\sigma_2'n_2';\,\ldots,\mathcal{P}p_1\sigma_1n_1;\mathcal{P}p_2\sigma_2n_2;\,\ldots} \qquad (553) \\
&\equiv S_{\beta\alpha} \ = \ S_{\mathcal{P}\beta\mathcal{P}\alpha} \ . \qquad (554)
\end{aligned}
$$

$*$ Kao kod internih simetrija, **operator P postoji ako postoji operator P_0 koji na slobodno višečestično stanje djeluje prema (551,552) i koji komutira sa H_0 i** V. Tada vrijedi $P = P_0$:

$$
P_0\Phi_{p_1\sigma_1n_1;\,\ldots} \ = \ \eta_{n_1}\ldots \ \underbrace{\Phi_{\mathcal{P}p_1\sigma_1n_1;\,\ldots}}_{m=0\ :\ \Phi_{\mathcal{P}p_1-\sigma_1n_1;\,\ldots}} \qquad \equiv \qquad P_0\Phi_\alpha \ = \ \Phi_{\mathcal{P}\alpha} \qquad (555)
$$

$$
P_0^{-1}H_0P_0 \ = \ H_0, \qquad P_0^{-1}VP_0 \ = \ V \ . \qquad (556)
$$

D:

$$
\begin{aligned}
(\Psi^-_\beta,\Psi^+_\alpha) \ &\equiv \ S_{\beta\alpha} \ \equiv \ (\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) \ = \ (\Phi_\beta, P_0^{-1}SP_0\Phi_\alpha) \ \overset{(556)}{=} \ (P_0\Phi_\beta, SP_0\Phi_\alpha) \\
&\overset{(555)}{=} \ (\Phi_{\mathcal{P}\beta}, S\Phi_{\mathcal{P}\alpha}) \ \equiv \ S_{\mathcal{P}\beta\mathcal{P}\alpha} \ \equiv \ (\Psi^-_{\mathcal{P}\beta},\Psi^+_{\mathcal{P}\alpha}) \ = \ (P\Psi^-_\beta, P\Psi^+_\alpha) \\
&\Rightarrow \ \text{Q.E.D. (551,552)} \qquad (557)
\end{aligned}
$$

□ **Neodredjenost operatora pariteta i faza η_n**

$*$ Ekvivalentne definicije operatora pariteta

Operatori P i

$$
P' \ = \ P\exp(i\alpha B + i\beta L + i\gamma Q + \ldots), \qquad (558)
$$

gdje su B, L, Q, $\ldots$ sačuvani $U(1)$ kvantni brojevi a $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, su jednakovrijedni operatori pariteta.

$\Rightarrow \eta_n$ faze neodredjene ako B, L, Q, $\ldots \neq 0$ $\qquad e^-$, p $\ldots$
$\Rightarrow \eta_n$ faze odredjene ako B, L, Q, $\ldots = 0$ $\qquad \pi^0$, γ $\ldots$

(ne mogu se odrediti niti eksperimentalno niti teorijski).

$*$ Fiksiranje faza

Budući da p, n i e^- imaju različite vrijednosti Q, B i L odabirom faza α, β i γ može se postići

$$\eta_p \;=\; \eta_n \;=\; \eta_{e^-} \;=\; 1. \tag{559}$$

Time postaju odredjeni i pariteti čestica koji se javljaju u (jakim i EM) interakcijama n i p, npr. kroz reakciju $n \to p\pi^-$ odredjen je paritet π^-.

$*$ Da li može uvijek biti $\eta \;=\; \pm 1$.

- U x prostoru vrijedi $\mathcal{P}^2 x = x$.
- U Hilbertovom prostoru P^2 se ponaša kao interna simetrija,

$$P^2 \Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2; \dots} \;=\; \eta^2_{n_1}\eta^2_{n_2}\dots \Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2; \dots} \tag{560}$$

(iako se indeksi n_i ne miješaju svaki indeks n_i se mijenja - za fazu).
- **Ako je P^2 element grupe kontinuiranih internih simetrija** $\mathcal{I}$, $P^2 = I \in \mathcal{I}$ tada je $I^{-\frac{1}{2}}$ takodjer element interne grupe simetrija i paritet se može redefinirati tako da je njegov kvadrat jednak jediničnom operatoru,

$$P' \;=\; PI^{-\frac{1}{2}}, \qquad P'^2 \;=\; P^2 I^{-1} = \mathbb{1} \tag{561}$$

$$\Rightarrow \;\; \eta' = \pm 1 \; . \tag{562}$$

- Zbog sačuvanja kutne količine gibanja promjena broja fermiona $\Delta F = 2n, \;\; n \in \mathbb{N}$ je uvijek parna u reakcijama, pa je $(-1)^F$ sačuvan.
- Za čestice standardog elektroslabog modela polucjelobrojnog spina $B + L$ je neparan pa stoga vrijedi

$$(-1)^F \;=\; (-1)^{B+L}, \tag{563}$$

tj. $(-1)^F$ je element kontinuirane simetrije $\exp(-i(\alpha B + \beta L))$. Stoga ako operator pariteta definiramo kao

$$P^2 = (-1)^F, \tag{564}$$

interni paritet možemo definirati tako da vrijedi

$$\eta = \pm 1 \; . \tag{565}$$

- U modelima postoje medjutim čestice za koje relacija (564) ne vrijedi, npr. za **Majorana neutrine** : $B + L = 0 \neq F = 1$. U tom slučaju $(-1)^F$ nije element kontinuirane interne simetrije. Ipak $(-1)^{2F} = 1$ pa su mogući pariteti ± 1, $\pm i$.

$$\text{Majorana neutrini :}\; P^4 = (-1)^{2F} = 1, \qquad P^2 \;=\; -1, \qquad \eta \;=\; \pm i, \tag{566}$$

□ Paritet piona

∗ Sačuvanje pariteta, svojstveni pariteti i pariteti zbog relativnog gibanja čestica

Ako je produkt svojstvenih pariteta poč. stanja i svojstvenih pariteta kon. stanja jednak ± 1, $S_{\beta\alpha}$ mora biti parna/neparna u 3-impulsima

$$\underbrace{S_{p_1'\sigma_1'n_1';\,...,p_1\sigma_1 n_1;\,...}}_{\propto\, f(\vec{p}_1';...,\vec{p}_1;...)} \;=\; \eta_{n_1'}\ldots\eta_{n_1}\ldots \underbrace{S_{\mathcal{P}p_1'\sigma_1'n_1';\,...,\mathcal{P}p_1\sigma_1 n_1;\,...}}_{\propto\, f(-\vec{p}_1';...,-\vec{p}_1;...)}$$

$$\Rightarrow\quad \eta_{n_1'}\ldots\eta_{n_1}\ldots \;=\; \pm 1 \quad\Rightarrow\quad f(-\vec{p}_1';\ldots,-\vec{p}_1;\ldots) \;=\; \pm f(\vec{p}_1';\ldots,\vec{p}_1;\ldots)\,. \tag{567}$$

∗ Odredjivanje pariteta piona

· Patritet piona π^- odredjen je iz reakcije $\pi^- + d \to n + n$ u kojoj je bila relativna orb. kut. kol. gib. $\ell(\pi^- d) = 0$:
- d je deuteron, vezano stanje n i p: $\ell(n,p) = 0$; $s_d = 1$; $\eta_p = \eta_n = 1 \Rightarrow \eta_d = 1\cdot 1\cdot(-1)^0 = 1$.
- za pion se znalo da je skalar ili pseudoskalar : $s_{\pi^-} = 0$.
- $n + n$ je stanje 2 ident. ferm. : antisim. na zamjenu ferm.
- odatle

$$\text{paritet} :\ \eta_{\pi^-}(\eta_d = 1)(-1)^{(\ell_{\pi^- d}=0)} \;=\; (\eta_n = 1)^2(-1)^{\ell_{nn}}, \tag{568}$$

$$\text{j} :\ \underbrace{(s_{\pi^-} = 0)\oplus(s_d = 1)\oplus(\ell_{\pi^-,d} = 0)}_{=\,1} \;=\; \underbrace{\underbrace{(s_n = \frac{1}{2})\oplus(s_n = \frac{1}{2})}_{=\,0_A,1_S}\ \underbrace{\oplus(\ell_{nn})}_{:\ 0_S,1_A,2_S}}_{\text{samo } 1_S\oplus 1_A \text{ moguć} \Rightarrow \ell_{nn}=1};\tag{569}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\eta_{\pi^-} \;=\; -1}\,. \tag{570}$$

Dakle π^- je pseudoskalar. Na sličan način se našli da su π^+ i π^0 pseudoskalarne čestice.

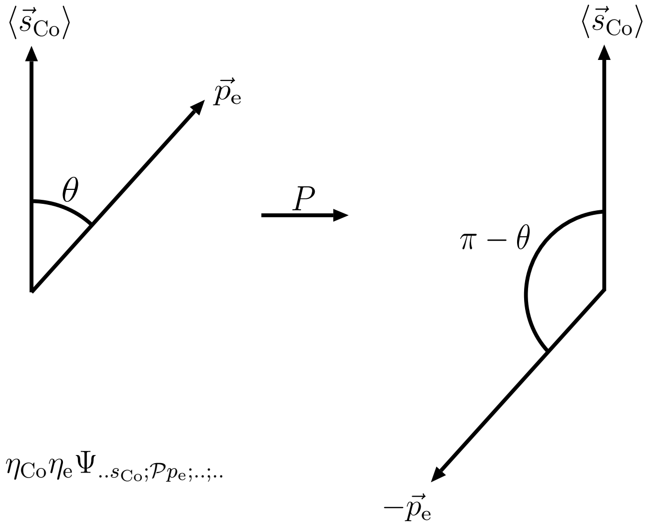
∗ Posljedice pseudoskalarnosti piona : nesačuvanje pariteta

- Jedna od posljedica $\eta_\pi = -1$ jest da čestica spina nula koja se raspada na dva (tri) piona mora imati paritet $+1$ (-1). Naime, u sustavu mirovanja matrični element može zavisiti samo od skalarnih produkata 3-impulsa čestica za dva i za tri piona u kon. stanju jer je $\vec{p}_1\cdot(\vec{p}_2 \times \vec{p}_3) = 0$ zbog linearne ovisnosti impulsa piona.
- Eksperimentalno su opaženi raspadi $\tau \to 3\pi$ i $\theta \to 2\pi$. Medjutim preciznija mjerenja su pokazala da su τ i θ čestice iste mase i širine raspada - dakle ista čestica (danas poznata kao $K^\pm$).

- Napomena : Širina raspada je integral kvadrata S matričnog elementa preko faznog prostora, posumiran po konačnim spinovima i usrednjen po početnim spinovima. Sume i integracijska mjera su pariteno invarijantne veličine.

- Lee i Yang su problem razriješili 1956 predloživši nesačuvanje pariteta
- Eksperimentalno je nesačuvanje pariteta prvi puta opaženo 1957 (Wu et al.) u procesu $Co^{60} \to Ni^{60} + e^- + \overline{\nu}$ sa polariziranim izvorom kobalta. Odmah zatim je rezultat potvrdjen u procesu $\pi^+ \to \mu^+ \nu$ (Lederman et al. 1957).

Ideja Wu et al. eksperimenta je slijedeća : Ako je paritet očuvan, onda bi amplitude



$$P\Psi_{..s_{\rm Co};p_{\rm e}..;..} = \eta_{\rm Co}\eta_{\rm e}\Psi_{..s_{\rm Co};\mathcal{P}p_{\rm e};..;..}$$

Figure 2: 3.2 Djelovanje pariteta na spin i impuls. Da je paritet očuvan vjerojatnosti prijelaza za paritetno povezane amplitude bile bi iste, a nisu.

za pariteno povezane amplitude morale biti biti iste. Konkretno za emisiju elektrona u smijeru i suprotno smijeru polarizacije Co. Eksperimentalno je opažena maksimalna asimetrija.

• **Vremenski obrat**

□ T **invarijantnost** S **matrice**

· Podsjetnik : vremenska transformacija slobodnog 1-čest. stanja za $M > 0$ (364) i $M = 0$ (398),

$$\begin{aligned} T\Phi_{p\sigma} &\stackrel{(364)}{=} \zeta(-)^{j-\sigma}\Phi_{\mathcal{P}p\,-\sigma} \\ &\stackrel{(398)}{=} \zeta_\sigma \cdot \exp(\mp i\pi\sigma)\Phi_{\mathcal{P}p\,\sigma}\ . \end{aligned} \tag{571}$$

∗ Transformacija višečestičnog "in" i "out" stanja

- očekuje se da djeluje kao na direktan produkt jednočestičnih stanja, ali i da zamjenjuje $t = -\infty$ i $t = +\infty$, drugim riječima da "in" stanje pretvara u "out" stanje i obratno

$$
\begin{aligned}
T\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1;\,...} &\overset{M_{n_1}>0,\,...}{=} \zeta_{n_1}(-1)^{j_1-\sigma_1}\ \ldots \Psi^{\mp}_{\mathcal{P}p_1-\sigma_1 n_1;\,...}, \\
&\overset{M_{n_1}=0,\,...}{=} \zeta_{n_1\sigma_1}\exp(\mp i\pi\sigma_1)\ \ldots \Psi^{\mp}_{\mathcal{P}p_1\sigma_1 n_1;\,...},
\end{aligned}
\tag{572}
$$

$$
\equiv\ T\Psi^{\pm}_{\alpha} \ =\ \Psi^{\mp}_{\mathcal{T}\alpha}, \tag{573}
$$

($\mathcal{T}\alpha$ uključuje sve osim zamjene $\pm \to \mp$).

∗ Djelovanje T na S matrični element : definicija T invarijantnosti

- Uz pretpostavku da isti T djeluje i na "in" i "out" stanja (što je implicite pretpostavljeno u (572,573) i rabeći antiunitarnost T slijedi

$$
\begin{aligned}
&(\Psi^-_\beta, \Psi^+_\alpha) \ =\ (T\Psi^+_\alpha, T\Psi^-_\beta) \ =\ (\Psi^-_{\mathcal{T}\alpha}, \Psi^+_{\mathcal{T}\beta}) \\
&\equiv\ S_{\beta\alpha} \ =\ S_{\mathcal{T}\alpha\mathcal{T}\beta} \\
&\equiv\ S_{p'_1\sigma'_1 n'_1;\,...,p_1\sigma_1 n_1;\,...} \\
&\ =\ \underbrace{(\zeta_{n'_1}(-1)^{j'_1-\sigma'_1}\ \ldots)}_{(\zeta_{n'_1\sigma'_1}e^{\mp i\pi\sigma'_1}\ ...)}\underbrace{(\zeta^*_{n_1}(-1)^{j_1-\sigma_1}\ \ldots)}_{(\zeta^*_{n_1\sigma_1}e^{\pm i\pi\sigma_1}\ ...)}\underbrace{S_{\mathcal{P}p_1-\sigma_1 n_1;\,...,\mathcal{P}p'_1-\sigma'_1 n'_1;\,...}}_{S_{\mathcal{P}p_1\sigma_1 n_1;\,...,\mathcal{P}p'_1\sigma'_1 n'_1;\,...}}
\end{aligned}
\tag{574}
$$

(vitičastim zagradama su naznačene promjene za mase = 0).
Ovo je definicija T invarijantnosti S matrice jer vrijedi samo ako Hamiltonijan H zadovoljava neke uvjete.

∗ Jednadžba (574) bit će ispunjena ako postoji operator T_0 koji djeluje na slobodna stanja prema (572,573),

$$
\begin{aligned}
&T_0\Phi_\alpha \ =\ \Phi_{\mathcal{T}\alpha} \\
&\equiv T_0\Phi_{p_1\sigma_1 n_1;\,...} \ =\ \underbrace{(\zeta_{n_1}(-1)^{j_1-\sigma_1}\ \ldots)\Phi_{\mathcal{P}p_1-\sigma_1 n_1;\,...}}_{(\zeta_{n_1\sigma_1}\exp(\mp i\pi\sigma_1)\ ...)\Phi_{\mathcal{P}p_1\sigma_1 n_1;\,...}},
\end{aligned}
\tag{575}
$$

koji komutira sa V i H_0,

$$
T_0^{-1}VT_0 \ =\ V, \qquad T_0^{-1}H_0T_0 \ =\ H_0. \tag{576}
$$

Tada se može identificirati

$$
T \ =\ T_0\ . \tag{577}
$$

D:
a . Dokaz (574)
- izraz za $S^\dagger$

$$U^\dagger(\tau,\tau_0) \overset{(450)}{=} (\Omega^\dagger(\tau)\Omega(\tau_0))^\dagger \;=\; \Omega^\dagger(\tau_0)\Omega(\tau) \;=\; U(\tau_0,\tau) \tag{578}$$

$$\Rightarrow\; S^\dagger \overset{(449)}{=} (U(+\infty,-\infty))^\dagger \;=\; U(-\infty,+\infty)\ . \tag{579}$$

- dokaz relacije $T_0^{-1}S^\dagger T_0 \;=\; S$

$$\begin{aligned} T_0^{-1}\Omega(\tau)T_0 &\overset{(422)}{=} T_0^{-1}e^{iH\tau}e^{-iH_0\tau}T_0 \;=\; e^{-iT_0^{-1}HT_0\tau}e^{iT_0^{-1}H_0T_0\tau} \;=\; e^{-iH\tau}e^{+iH_0\tau} \\ &= \Omega(-\tau) \end{aligned} \tag{580}$$

$$\Rightarrow\; T_0^{-1}\Omega(\pm\infty)T_0 \;=\; \Omega(\mp\infty) \tag{581}$$

$$\Rightarrow\; T_0^{-1}S^\dagger T_0 \overset{(579)}{=} T_0^{-1}\Omega^\dagger(-\infty)\Omega(+\infty)T_0 \;=\; \Omega^\dagger(+\infty)\Omega(-\infty) \overset{(449)}{=} S\ . \tag{582}$$

- dokaz (574)

$$\begin{aligned} (\Psi_\beta^-,\Psi_\alpha^+) \;&\equiv\; S_{\beta\alpha} \;\equiv\; (\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) \overset{(582)}{=} (\Phi_\beta, T_0^{-1}S^\dagger T_0\Phi_\alpha) \\ &\overset{(126)}{=} (S^\dagger T_0\Phi_\alpha, T_0\Phi_\beta) \overset{(125)}{=} (T_0\Phi_\alpha, ST_0\Phi_\beta) \overset{(575)}{=} (\Phi_{\mathcal{T}\alpha}, S\Phi_{\mathcal{T}\beta}) \\ &\equiv\; S_{\mathcal{T}\alpha\mathcal{T}\beta} \;\equiv\; (\Psi_{\mathcal{T}\alpha}^-,\Psi_{\mathcal{T}\beta}^+) \overset{zahtjev}{=} (T\Psi_\alpha^+, T\Psi_\beta^-) \end{aligned} \tag{583}$$

$\Rightarrow$ može se definirati T tako da je (574) ispunjeno. Q.E.D.

b. Dokaz (577) :

- iz def "in" i "out" stanja (421)

$$T_0\Psi_\alpha^\pm \;=\; T_0\Omega(\mp\infty)T_0^{-1}T_0\Phi_\alpha \;=\; \Omega(\pm\infty)\Phi_{\mathcal{T}\alpha} \;=\; \Psi_{\mathcal{T}\alpha}^\mp \overset{(572,573)}{\equiv} T\Psi_\alpha^\pm \qquad \text{Q.E.D} \tag{584}$$

$\Rightarrow \quad T = T_0^{\cdot} \qquad$ Q.E.D.

- iz LS jednadžbe (426)

$$\begin{aligned} T_0\Psi_\alpha^\pm \;&=\; T_0\Phi_\alpha + T_0(E_\alpha - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1}V\Psi_\alpha^\pm \\ &\overset{(576,426)}{=} \Phi_{\mathcal{T}\alpha} + (E_\alpha - H_0 \mp i\varepsilon)^{-1}VT_0\Psi_\alpha^\pm\ . \end{aligned} \tag{585}$$

(585) je identična jednadžbi za $\Psi_{\mathcal{T}\alpha}^\mp \equiv T\Psi_\alpha^\pm \quad \Rightarrow \quad T = T_0.$ Q.E.D.

□ Zakoni sačuvanja vezani uz T

∗ Sačuvanje T ne povlači jednakost brzina procesa $\alpha \to \beta$ i $\mathcal{T}\alpha \to \mathcal{T}\beta$

$$T \text{ sač} \quad \not\Rightarrow \quad \Gamma(\alpha \to \beta) = \Gamma(\mathcal{T}\alpha \to \mathcal{T}\beta) \ . \tag{586}$$

∗ Medjutim ako S matrica ima oblik

$$S_{\beta\alpha} \ = \ S^{(0)}_{\beta\alpha} + S^{(1)}_{\beta\alpha}, \tag{587}$$

gdje je $S^{(0)}$ mnogo veći od $S^{(1)}$ ali je za razmatrani proces matrični element $S^{(0)}$ jednak nuli a $S^{(1)}$ nije (npr. jaka i slaba medjudjelovanja u $N \to N' + e^- + \overline{\nu}$ - jaka medjudjelovanja definiraju nukleonska stanja a slaba realiziraju beta-raspad), tada (586) vrijedi.
D:
- Unitarnost za S daje

$$1 \ = \ S^\dagger S \ = \ S^{(0)\dagger}S^{(0)} + S^{(0)\dagger}S^{(1)} + S^{(1)\dagger}S^{(0)} + \mathcal{O}((S^{(1)})^2) \ . \tag{588}$$

- Iz unitarnosti za $S^{(0)}$ i T sačuvanja $S^{(1)}$-matrice tada slijedi

$$1 \ = \ S^{(0)\dagger}S^{(0)} \quad \overset{(588)}{\Rightarrow} \quad S^{(1)} \ = \ -S^{(0)}S^{(1)\dagger}S^{(0)}, \tag{589}$$

$$\begin{aligned} S^{(1)}_{\beta\alpha} &\overset{(589)}{=} -\int d\gamma' d\gamma \ S^{(0)}_{\beta\gamma'}(S^{(1)\dagger})_{\gamma'\gamma}S^{(0)}_{\gamma\alpha} \\ &= -\int d\gamma' d\gamma \ S^{(0)}_{\beta\gamma'}(S^{(1)}_{\gamma\gamma'})^* S^{(0)}_{\gamma\alpha} \\ &\overset{(574)}{=} -\int d\gamma' d\gamma \ S^{(0)}_{\beta\gamma'}(S^{(1)}_{\mathcal{T}\gamma'\mathcal{T}\gamma})^* S^{(0)}_{\gamma\alpha}, \end{aligned} \tag{590}$$

gdje se integracije $d\gamma$ i $d\gamma'$ vrše po potpunim skupovima stanja $\{\gamma\}$ i $\{\gamma'\}$ s obzirom na operator $S^{(0)}$.
- Razmotrimo najednostavniji slučaj kada skupovi $\{\gamma\}$ i $\{\gamma'\}$ imaju samo jedan element,

$$\Rightarrow \quad S^{(0)}_{\beta\gamma'} \ = \ e^{2i\delta_\beta}\delta(\beta - \gamma'), \qquad S^{(0)}_{\gamma\alpha} \ = \ e^{2i\delta_\alpha}\delta(\gamma - \alpha) \ , \tag{591}$$

$$\Rightarrow \quad S^{(1)}_{\beta\alpha} \ = \ -e^{2i(\delta_\alpha+\delta_\beta)}S^{(1)*}_{\mathcal{T}\beta\mathcal{T}\alpha} \ , \tag{592}$$

$$\Rightarrow \quad |S^{(1)}_{\beta\alpha}| \ = \ |S^{(1)*}_{\mathcal{T}\beta\mathcal{T}\alpha}| \ , \tag{593}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(\alpha \to \beta) = \Gamma(\mathcal{T}\alpha \to \mathcal{T}\beta) \qquad \text{Q.E.D. (586)} \tag{594}$$

∗ Analiza Wu et al. exp. sa stanovišta T inv. :

- Proces : $Co^{60} \rightarrow Ni^{60} e^- \overline{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad n \rightarrow p e^- \overline{\nu}$ gdje je Co^{60} polariziran (spin orjentiran):

- Observable pri T operaciji : I polarizacija Co^{60} i impuls elektrona mijenjaju predznak. Relativni kut tih dvaju veličina θ se pri tome ne mijenja. Jednake vjerojatnosti prijelaza odgovaraju istom θ prije i poslije T operacije. Stoga je sačuvanje T u skladu sa eksperimentom.

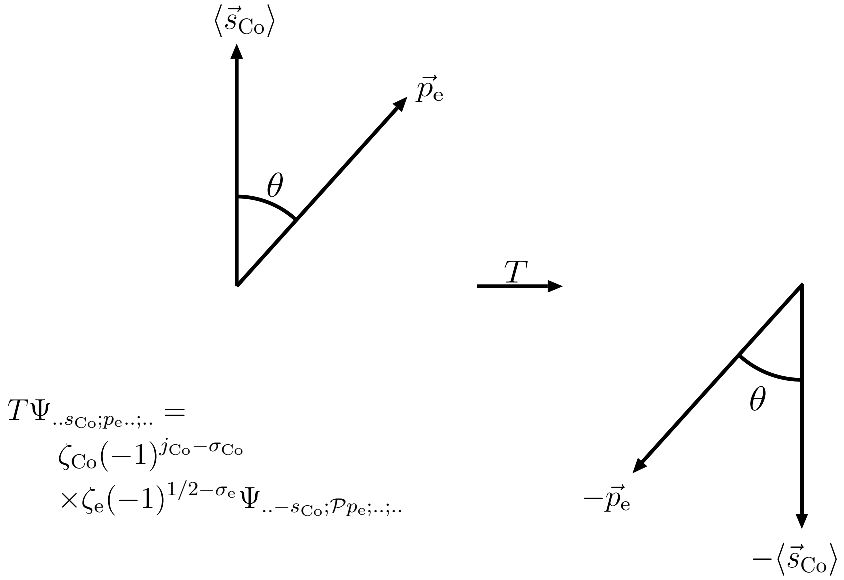


Figure 3: 3.3 Djelovanje vremenske inverzije na impuls i spin

$*$ Watsonov teorem :

- Specijalan slučaj jednadžbe (592) se javlja ako 1D skupovi baznih stanja s obzirom na $S^{(0)}$ zadovoljavaju $\mathcal{T}\alpha = \alpha$ i $\mathcal{T}\beta = \beta$,

$$S^{(1)}_{\beta\alpha} \;=\; -e^{2i(\delta_\alpha+\delta_\beta)} S^{(1)*}_{\beta\alpha} \;. \tag{595}$$

- Tada se može naći faza $S^{(1)}_{\beta\alpha}$,

$$2{\rm Arg} S^{(1)}_{\beta\alpha} \;=\; \pm\pi + 2(\delta_\alpha + \delta_\beta) \tag{596}$$

$$\Rightarrow\; S^{(1)}_{\beta\alpha} \;\propto\; \pm i e^{i(\delta_\alpha+\delta_\beta)} \;. \tag{597}$$

- Primjer primjene Watsonovog TM : $\Lambda \rightarrow n\pi^0$

Spinovi Λ n i π^0 su 1/2, 1/2 i 0. Stoga su moguće vrijednosti relativne kutne količine gibanja n i π^0 jednake $\ell_{n\pi^0} = 0, 1$. Dakle postoje dvije različite amplitude i stoga dvije moguće vrijednosti faza konačnog stanja $\beta = n + \pi^0$, $\delta_{(n\pi^0)_{\ell=0}}$ i $\delta_{(n\pi^0)_{\ell=1}}$, za isto početno stanje $\alpha = \Lambda$. Relativna faza se može mjeriti mjerenjem interferentnog člana,

$$(S^{(1)}_{(n\pi^0)_0\Lambda})^* S^{(1)}_{(n\pi^0)_1\Lambda} \;\propto\; e^{i(-\delta_{(n\pi^0)_0}+\delta_{(n\pi^0)_1})} \;\equiv\; e^{i(-\delta_0+\delta_1)} \;. \tag{598}$$

• **PT**

□ **Popis svojstava PT simetrije (uz pretpostavku postojanja operatora $P = U(\mathcal{P})$ i $T = U(\mathcal{T})$).**

∗ Djelovanje na "in" i "out" stanja (vidi (551) i (572))

$$\begin{aligned} PT\Psi^{\pm}_{\alpha} &= \Psi^{\mp}_{\mathcal{PT}\alpha} \equiv PT\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1;\,\ldots} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \eta_{n_1}(-1)^{j_1-\sigma_1}\zeta_{n_1}\ldots\Psi^{\mp}_{p_1-\sigma_1 n_1;\,\ldots}, & M_{n_1} > 0 \\ \eta_{n_1\sigma_1}\zeta_{n_1\sigma_1}\ldots\Psi^{\mp}_{p_1-\sigma_1 n_1;\,\ldots}, & M_{n_1} = 0 \end{array} \right. . \end{aligned} \tag{599}$$

Relacija (599) vrijedi i za masivne i za bezmasene čestice. Za masivne je σ_1 projekcija spina a za bezmasene helicitet. Relacija (599) pokazuje da je PT operator antiunitaran, ne mijenja 4-impuls čestica, ne mijenja tip čestica, ali mijenja predznak projekcije spina odnosno heliciteta.

∗ Kao i kod ostalih simetrija postojanje PT simetrije koja jednako djeluje na "in" i "out" stanja (kao u (599)) je ispunjeno ako postoji operator $(PT)_0$ koji slobodna stanja transformira kao u (599),

$$(PT)_0\Phi_{\alpha} = \Phi_{\mathcal{PT}\alpha}, \tag{600}$$

i koji komutira sa V i H_0. To je ispunjeno ako je $(PT)_0 = P_0T_0$ sa svojstvima (555) i (575). Tada se se formalizam za P i T simetriju može direktno primjeniti. Npr. vrijede sljedeće relacije :

$$\begin{aligned} (P_0T_0)^{-1}\Omega(\tau)(P_0T_0) &= \Omega(-\tau), \\ (P_0T_0)^{-1}\Omega(\pm\infty)(P_0T_0) &= \Omega(\mp\infty), \\ (P_0T_0)^{-1}S^{\dagger}(P_0T_0) &= S \end{aligned} \tag{601}$$

$$\stackrel{(600,601)}{\Rightarrow} S_{\beta\alpha} = S_{\mathcal{PT}\alpha\mathcal{PT}\beta} \, . \tag{602}$$

Zadnja jednadžba dokazuje sačuvanje PT simetrije uz pretpostavku da su ispunjene jednadžbe (599) i (600).

□ **Usporedba s Wu et al. eksperimentom**

∗ Pretpostavka malog PT-narušavajućeg S-matričnog elementa
Kao i kod T simetrije relacija sačuvanja S-matričnog elementa na PT simetriju (602) onemogućuje usporedbu $\alpha \to \beta$ i $\mathcal{PT}\alpha \to \mathcal{PT}\beta$ procesa, osim ako je jake sile koja definiraju stanja ne vrše prijelaz a slabe vrše,

$$S = S^{(0)} + S^{(1)}. \tag{603}$$

Tada (isto kao kod T simetrije) iz unitarnosti S operatora i (602) slijedi

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= -S^{(0)}S^{(1)\dagger}S^{(0)} && (604) \\ \Rightarrow S^{(1)}_{\beta\alpha} &= -\int d\gamma' d\gamma\, S^{(0)}_{\beta\gamma'}S^{(1)*}_{\mathcal{PT}\gamma'\mathcal{PT}\gamma}S^{(0)}_{\gamma\alpha}\ . && (605) \end{aligned}$$

$*$ Pretpostavka jednočlanih potpunih skupova s obzirom na $S^{(0)}$ matricu
Ako su potpuni skupovi s obzirom na $S^{(0)}$ matricu $\{\gamma\}$ i $\{\gamma'\}$ jednočlani, kao što je slučaj u $Co^{60} \to Ni^{60}e^-\overline{\nu}$ procesu tada vrijedi

$$S^{(0)}_{\beta\gamma'} = \delta(\beta-\gamma')e^{i\delta_\beta}, \qquad S^{(0)}_{\gamma\alpha} = \delta(\gamma-\alpha)e^{i\delta_\alpha} \qquad (606)$$

$$\Rightarrow S^{(1)}_{\beta\alpha} = -e^{i(\delta_\alpha+\delta_\beta)}S^{(1)*}_{\mathcal{PT}\beta\mathcal{PT}\alpha}\ . \qquad (607)$$

$\Rightarrow$ Uz pretpostavku sačuvanja PT simetrije spektar bi morao biti invarijantan na relativnu promjenu predznaka projekcije spina Co^{60} i 3-impulsa elektrona.
Wu et. al. eksperiment pokazuje da to nije ispunjeno $\Rightarrow$ PT simetrija je narušena.

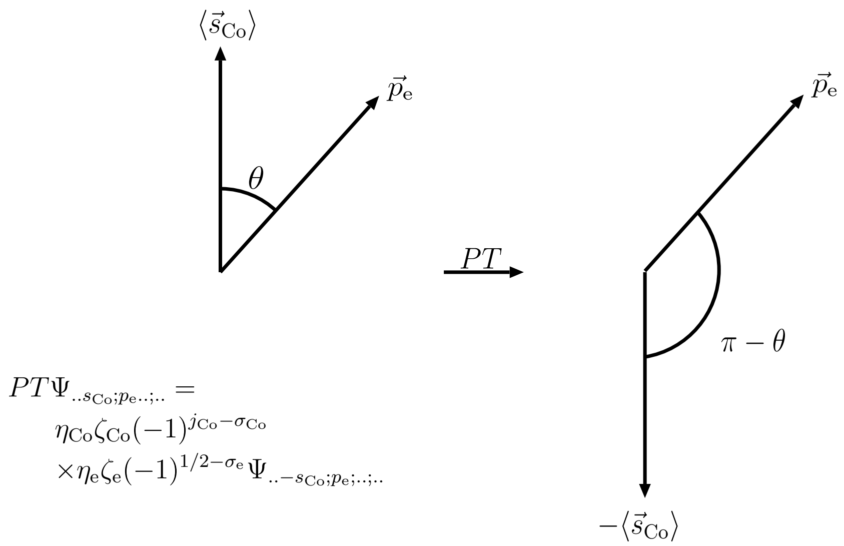


Figure 4: 3.4 Djelovanje PT na impuls i spin

• C, CP i CPT

□ C

$*$ Djelovanje C (C_0) operatora, sačuvanje C simetrije

· Definicija C operatora

- Nabojna konjugacija se definira kao transformacija koja čestice zamjenjuje antičesticama.
- Odatle slijedi postojanje unitarnog operatora (ne mijenja smjer vremena) C sa sljedećim djelovanjem na mnogočestična stanja

$$C\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1} \;=\; (\xi_{n_1}\;\ldots)\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1^c;\,\ldots} \;\equiv\; C\Psi^{\pm}_{\alpha} \;=\; \Psi^{\pm}_{\mathcal{C}\alpha}, \tag{608}$$

gdje su ξ_{n_i} kompleksne faze, tzv. pariteti nabojne konjugacije. Implicite je pretpostavljeno da C jednako djeluje na "in" i "out" stanja.

· Definicija sačuvanja nabojne konjugacije

- Posljedica te pretpostavke i jednadžbe (608) je definicija invarijantnosti S matrice na C operaciju,

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} \;&=\; (\Psi^-_\beta, \Psi^+_\alpha) \;=\; (C\Psi^-_\beta, C\Psi^+_\alpha) \;=\; (\Psi^-_{\mathcal{C}\beta}, \Psi^+_{\mathcal{C}\alpha}) \;=\; S_{\mathcal{C}\beta\,\mathcal{C}\alpha} \\ &\equiv\; S_{p_1'\sigma_1'n_1';\,\ldots,p_1\sigma_1 n_1;\,\ldots} \;=\; (\xi^*_{n_1'}\ldots)(\xi_{n_1}\ldots)S_{p_1'\sigma_1'n_1'^c;\,\ldots,p_1\sigma_1 n_1^c;\,\ldots}. \end{aligned} \tag{609}$$

· Uvjet ispunjenja jednakosti djelovanja C operatora na "in" i "out" stanja, C_0 operator

Jednadžba (609) je ispunjena ako postoji unitarni operator C_0 koji na slobodna stanja djeluje prema (608),

$$C_0\Phi_\alpha \;=\; \Phi_{\mathcal{C}\alpha} \quad\equiv\quad C_0\Phi_{p_1\sigma_1 n_1;\,\ldots} \;=\; (\xi_{n_1}\;\ldots)\Phi_{p_1\sigma_1 n_1^c;\,\ldots} \tag{610}$$

i koji komutira sa H_0 i V.
D:
Zbog unitarnosti C_0 ($C_0^{-1}iC_0 = i$) i komutativnosti sa H_0 i V,

$$C_0^{-1}H_0C_0 \;=\; H_0, \qquad C_0^{-1}VC_0 \;=\; V, \tag{611}$$

slijedi

$$C_0^{-1}SC_0 \;=\; S\;. \tag{612}$$

Stoga

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} \;&=\; (\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) \;=\; (\Phi_\beta, C_0^{-1}SC_0\Phi_\alpha) \;=\; (C_0\Phi_\beta, SC_0\Phi_\alpha) \;=\; (\Phi_{\mathcal{C}\beta}, S\Phi_{\mathcal{C}\alpha}) \\ &=\; S_{\mathcal{C}\beta\mathcal{C}\alpha} \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned} \tag{613}$$

· $C = C_0$

Pokažimo da se može staviti $C = C_0$ rabeći definiciju "in" i "out" stanja (421) i LS jednadžbu (426):

$$C_0\Psi^\pm_\alpha \overset{(421,610,611)}{=} C_0\Omega(\mp\infty)C_0^{-1}C_0\Phi_\alpha \; = \; \Omega(\mp\infty)\Phi_{\mathcal{C}\alpha} \; = \; \Psi^\pm_{\mathcal{C}\alpha} \; \equiv \; C\Psi^\pm_\alpha \qquad \text{Q.E.D} \quad (614)$$

$$\begin{aligned} C_0\Psi^\pm_\alpha &\overset{(426,610,611)}{=} \Phi_{\mathcal{C}\alpha} + (E_\alpha - H_0 \mp i\varepsilon)^{-1}VC_0\Psi^\pm_\alpha \\ &\Rightarrow \quad C_0\Psi^\pm_\alpha \; = \; \Psi^\pm_{\mathcal{C}\alpha} \; \equiv \; C\Psi^\pm_\alpha \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned} \quad (615)$$

$*$ (Ne)odredjenost pariteta nabojne konjugacije ξ

$\cdot$ Nejednoznačnost C operatora

- Kao i za operator P, C operator i

$$C' \; = \; Ce^{i(\alpha B+\beta L+\gamma Q)} \quad (616)$$

su ekvivalentni (B, L, Q su barionski broj, leptonski broj i naboj - tj. sačuvani aditivni QB).
$\Rightarrow$ ξ_n nisu jednoznačno def. ako $B, L, Q \neq 0$: p, n, e^-
$\Rightarrow$ ξ_n su jednoznačno def. ako $B, L, Q = 0$: π^0, γ .

$\cdot$ Nabojno-konjugacijski paritet fotona, ξ_γ

- Iz QED slijedi da je $\xi_\gamma = -1$.
- Neutralni pion se sa 99.8% vjerojatnosti raspada u dva fotona ($\pi^0 \to 2\gamma$). Stoga je $\xi_{\pi^0} = 1$. Takodjer bi raspad $\pi^0 \to 3\gamma$ trebao biti zabranjen što je u skladu s opažanjima.

$\cdot$ Da li je moguće odabrati C tako da $\xi_n = \pm 1$?

- Isto kao kod pariteta, to je moguće napraviti kada je C^2 element neke kontinurane interne grupe simetrija $\mathcal{I}$. $C^2 = I_C \in I$. Tada $C' = CI_C^{-\frac{1}{2}}$ ima svojstvo $\xi_n = \pm 1$.

$*$ Usporedba sa Wu et al. eksperimentom.

- Teorije polja zadovoljavaju CPT simetriju. PT simetrija nije u skladu sa Wu et al. eksperimentom. Stoga za teorije polja C simetrija nije u skladu sa Wu et al. eksperimentom.

$\square$ CP

$*$ Popis formula za CP dobijen uporabom formula za P i C simetriju

· Djelovaje CP operatora na mnogočest. stanje (po pretp. isto za "in" i "out" stanja), definicija očuvanosti CP simetrije

$$CP\Psi^{\pm}_{\alpha} = \Psi_{\mathcal{CP}\alpha} \equiv CP\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1;\ldots} = \begin{cases} \eta_{n_1}\xi_{n_1}\ldots\Psi^{\pm}_{\mathcal{P}p_1\sigma_1 n_1^c;\ldots}, & M>0 \\ \eta_{n_1\sigma_1}\xi_{n_1}\ldots\Psi^{\pm}_{\mathcal{P}p_1-\sigma_1 n_1^c;\ldots}, & M=0 \end{cases} \tag{617}$$

$$\Rightarrow S_{\beta\alpha} = S_{\mathcal{CP}\beta\,\mathcal{CP}\alpha} \,. \tag{618}$$

· Uvjet ispunjenja (617) i (618) - postojanje operatora $(CP)_0$ (uzet ćemo $(CP)_0 = C_0P_0$) sa svojstvima

$$\begin{aligned}(CP)_0\Phi_\alpha &= \Phi_{\mathcal{CP}\alpha} \equiv (CP)_0\Phi_{p_1\sigma_1 n_1;\ldots} \\ &= \begin{cases} \eta_{n_1}\xi_{n_1}\ldots\Phi_{\mathcal{P}p_1\sigma_1 n_1^c;\ldots}, & M>0 \\ \eta_{n_1\sigma_1}\xi_{n_1}\ldots\Phi_{\mathcal{P}p_1-\sigma_1 n_1^c;\ldots}, & M=0 \end{cases},\end{aligned} \tag{619}$$

$$(CP)_0^{-1}H_0(CP)_0 = H_0, \qquad (CP)_0^{-1}V(CP)_0 = V \,. \tag{620}$$

- Rabeći definiciju "in" i "out" stanja (421) i LS jednadžbu (426) nalazi se da vrijedi

$$CP = (CP)_0 \overset{pretp.}{=} C_0P_0 \,. \tag{621}$$

$*$ CP nesačuvanje u sistemu neutralnih kaona

· Gell-Mann–Pais : kaonska stanja odredjenog CP

- Nakon Wu et al. eksperimenta postalo je jasno da P i PT i (u teoriji polja u kojoj je CPT očuvan) C nisu očuvani. Za neko vrijeme se pretpostavilo da je CP apsolutno očuvan.
- Gell-Mann i Pais su uočili da neutralni kaoni K^0 i $\overline{K}^0$, budući da nisu same sebi antičestice, ne mogu biti svojstvena stanja CP, ali da to jesu njihove linearne kombinacije $K^0 \pm \overline{K}^0$. Uz definiciju CP pariteta (Weinbergova def. ima suprotnu fazu od uobičajene)

$$CP\Psi_{K^0} = \Psi_{\overline{K}^0}, \qquad CP\Psi_{\overline{K}^0} = \Psi_{K^0}, \tag{622}$$

za spomenute linearne kombinacije se dobija,

$$\begin{aligned}\Psi_{K_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{K^0} + \Psi_{\overline{K}^0}) \qquad CP\Psi_{K_1} = (+1)\Psi_{K_1}, \\ \Psi_{K_2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{K^0} - \Psi_{\overline{K}^0}) \qquad CP\Psi_{K_2} = (-1)\Psi_{K_2} \,.\end{aligned} \tag{623}$$

Budući da su paritet i C-paritet (vidi prije) $\eta_{\pi^0} = -1$, $\xi_{\pi^0} = 1$ slijedi

$$CP\Psi_{\pi^0} = -\Psi_{\pi^0} \,. \tag{624}$$

Stoga se stanje Ψ_{K_1} može raspadati samo u dva piona a Ψ_{K_2} u tri. Zbog većeg faznog prostora raspadi Ψ_{K_1} su puno brži, pa se stoga puno brže raspadaju.

· Cronin et al. eksperiment 1964

- Opaženo je medjutim da se dugoživući neutralni kaoni, koji bi trebali odgovarati Ψ_{K_2} stanjima raspadaju u dvopionska stanja sa omjerom grananja

$$B_{"K_2" \to 2\pi} = \frac{\Gamma_{"K_2" \to 2\pi}}{\Gamma_{TOT}} \;=\; 2.3 \times 10^{-3} \; . \tag{625}$$

Time je dokazano da je CP narušen. To, uz pretpostavku teorije polja ukazuje da je i T narušen, što je eksperimentalno pokazano 1996.

□ CPT

∗ Popis formula za CPT dobijen uporabom P, T i C formula

· Djelovanje CPT na mnogočestično stanje (po pretp. isto za "in" i "out" stanje), definicija invarijantnosti S matrice na CPT transformaciju

$$\begin{aligned} & CPT\Psi^{\pm}_{\alpha} = \Psi^{\mp}_{\mathcal{CPT}\alpha} \\ & \equiv CPT\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1;\,\ldots} \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} \eta_{n_1}\zeta_{n_1}(-1)^{j_1-\sigma_1}\xi_{n_1}\Psi^{\mp}_{p_1-\sigma_1 n_1^c;\,\ldots}, & M>0 \\ \eta_{n_1\sigma_1}\zeta_{n_1\sigma_1}\xi_{n_1}\Psi^{\mp}_{p_1-\sigma_1 n_1^c;\,\ldots}, & M=0 \end{array} \right. \end{aligned} \tag{626}$$

$$\Rightarrow S_{\beta\alpha} \;=\; S_{\mathcal{CPT}\alpha\,\mathcal{CPT}\beta} \; . \tag{627}$$

· Uvjet ispunjenja jednadžbi (626) i (627) - postojanje operatora $(CPT)_0$ (uzimamo $(CPT)_0 = C_0P_0T_0$) sa svojstvima

$$\begin{aligned} & (CPT)_0\Phi_{\alpha} = \Phi_{\mathcal{CPT}\alpha} \\ & \equiv \; (CPT)_0\Phi_{p_1\sigma_1 n_1;\,\ldots} \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} \eta_{n_1}\zeta_{n_1}(-1)^{j_1-\sigma_1}\xi_{n_1}\Phi_{p_1-\sigma_1 n_1^c;\,\ldots}, & M>0 \\ \eta_{n_1\sigma_1}\zeta_{n_1\sigma_1}\xi_{n_1}\Phi_{p_1-\sigma_1 n_1^c;\,\ldots}, & M=0 \end{array} \right. , \end{aligned} \tag{628}$$

$$(CPT)_0^{-1}H_0(CPT)_0 \;=\; H_0, \qquad (CPT)_0^{-1}V(CPT)_0 \;=\; V \; . \tag{629}$$

- Rabeći definiciju "in" i "out" stanja (421) i LS jednadžbu (426) nalazi se da vrijedi

$$CPT \;=\; (CPT)_0 \;=\; C_0P_0T_0 \; . \tag{630}$$

∗ Svojstva CPT u teoriji polja

∗ CPT komutira s Hamiltonijanom

- U teoriji polja CPT operator komutira s Hamiltonijanom

$$[CPT, H] \ = \ 0 \ . \tag{631}$$

- Odatle slijedi jednakost masa čestica i antičestica (sjetimo se da je dio fizikalne mase sadržan u Hamiltonijanu),

$$m_n = \ m_{n^c} \ . \tag{632}$$

- Zbog toga je precizna veza izmedju čestica i antičestica dana CPT transformacijom.

$*$ Eksperiment 1999 CPLEAR collab. : povjerena CPT simetrija preciznošći 1×10^{-19}.

$*$ Antiunitarnost CPT

- Iz (626) i (627) se vidi da je CPT antiunitarna operacija, pa se za slučaj kada slabo medjudjelovanje uzrokuje prijelaz a jako definira staja (vidi Eq. (587)). U tom slučaju unitarnost ukupnog S matričnog elementa (588) i unitarnost S matričnog elementa jakih sila vodi na izraz za S matrični element slabih sila (589), čiji matrični element za razmatrani proces glasi

$$\begin{aligned} S^{(1)}_{\beta\alpha} & \stackrel{(589)}{=} \ -\int d\gamma' d\gamma \ S^{(0)}_{\beta\gamma'} (S^{(1)\dagger})_{\gamma'\gamma} S^{(0)}_{\gamma\alpha} \\ & \stackrel{(627)}{=} \ -\int d\gamma' d\gamma \ S^{(0)}_{\beta\gamma'} (S^{(1)}_{\mathcal{CPT}\gamma'\mathcal{CPT}\gamma})^* S^{(0)}_{\gamma\alpha} \ . \end{aligned} \tag{633}$$

- Za slučaj višečlanih potpunih skupova $\{\gamma\}$ i $\{\gamma'\}$ očigledno je da ne mora vrijediti jednakost apsolutnih vrijednosti matričnih elemenata $S^{(1)}_{\beta\alpha}$ i $S^{(1)}_{\mathcal{CPT}\beta\mathcal{CPT}\alpha}$.
- Ipak u podpoglavlju §3.5 pokazat ćemo da bez ikakvih aproksimacija (u gornjem izvodu je promjenjena aproksimacija (587)) iz unitarnosti i CPT invarijantnosti slijedi jednakost ukupnih širina raspada 1-čestičnih i pripadnih antičestičnih stanja.

3.4 Brzine odvijanja procesa, širine raspada i udarni presjeci

• Metoda odredjivanja vjerojatnosti prijelaza i fizikalno mjerljivih veličina

□ Problem povezivanja $S_{\beta\alpha}$ i fizikalnih veličina

- Fizikalne veličine koje opisuju prijelaze $\alpha \to \beta$ su proporcionalne apsolutnom kvadratu S matričnog elementa, $S_{\beta\alpha}$. Medjutim zbog translacijske invarijantnosti $S_{\beta\alpha}$ sadrži $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$ funciju čiji kvadrat nije definiran.
- Ispravan put rješavanja tog problema jest da se umjesto sa slobodnim stanjima odredjenog 4-impulsa radi sa valnim paketima.
- Ovdje će se opisati aproksimativni pristup koji daje iste rezultate.

□ Aproksimativni pristup : konačni volumen u kome se odvija proces i konačno vrijeme odvijanja procesa

$*$ Konačni volumen ($V = L^3$)

- Zamišlja se da se proces odvija u makroskopskom, ali konačnom volumenu, npr. kocki volumena $V = L^3$ čije se nasuprotne stranice identificiraju u smislu jednakosti stanja nakon translacije za L. To vodi na kvantizaciju 3-impulsa,

$$\vec{p} \;=\; \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3), \qquad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}, \tag{634}$$

i na zamjenu $\delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\beta)$ funkcije sa Kroneckerovom fu.

$$\delta(\vec{p}\,' - \vec{p}) \;\to\; \delta_V(\vec{p}\,' - \vec{p}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int_V d^3x\, e^{i(\vec{p}\,'-\vec{p})\vec{x}} \;=\; \frac{V}{(2\pi)^3}\delta_{\vec{p}\,'\vec{p}}, \tag{635}$$

$$\delta_{\vec{p}\,'\vec{p}} \;=\; \delta_{n_1'n_1}\delta_{n_2'n_2}\delta_{n_3'n_3}\;. \tag{636}$$

· Normalizacija stanja
- Nakon zamjene (636) stanja koja se javljaju u definiciji S matrice nisu ispravno normalizirana zbog faktora $V/(2\pi)^3$ (račun prijelaznih vjerojatnosti mora se provoditi sa stanjima normaliziranim na jedinicu). Da bi se to ispravilo uvode se stanja sa ispravnom normalizacijom (ista kao (406) s time da su 4-impulsne δ-funkcije zamjenjene sa Kroneckerima $\delta_{\vec{p}\,'\vec{p}}$)

$$\Psi_\alpha^{BOX} \;=\; \left[\frac{(2\pi)^3}{V}\right]^{\frac{N_\alpha}{2}}\Psi_\alpha, \tag{637}$$

$$(\Psi_\alpha^{BOX}, \Psi_\beta^{BOX}) \;=\; \delta_{\alpha\beta} \;\equiv\; \sum_{PERM}(\pm)^P\prod_{\{i\}}\delta_{\vec{p}_i'\vec{p}_i}\delta_{\sigma_i'\sigma_i}\delta_{n_i'n_i}. \tag{638}$$

Takodjer S matrica se može izraziti preko S matrice izračunate uporabom (637) stanja $S^{BOX}_{\beta\alpha}$,

$$S_{\beta\alpha} = \left[\frac{V}{(2\pi)^3}\right]^{(N_\alpha+N_\beta)/2} S^{BOX}_{\beta\alpha}. \quad (639)$$

$*$ Konačno vrijeme (T, $t \in [-T/2, T/2]$)

- Da bi se izbjeglo ponavljanje istog procesa koje bi se javilo zbog konačnog volumena uzima se da je proces definiran unutar nekog vremena T, npr. $t \in [-T/2, T/2]$, gdje $t = 0$ odgovara vremenu odvijanja reakcije. Pri tome se NE identificira stanje translatirano za T u vremenu, tj. nema kvantizacije energije zbog rubnih uvjeta.
- Posljedica uzimanja konačnog vremenskog intervala medjudjelovanja jest zamjena vremenske δ-funkcije sa,

$$\delta(E_\alpha - E_\beta) \;\rightarrow\; \delta_T(E_\alpha - E_\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{-i(E_\beta - E_\alpha)t}\,. \quad (640)$$

□Vjerojatnost prijelaza, diferencijalna vjerojatnost prijelaza, diferencijalna brzina prijelaza

$*$ Vjerojatnost prijelaza

- Vjerojatnost prijelaza $\alpha \rightarrow \beta$ definira se kao apsolutni kvadrat $S^{BOX}_{\beta\alpha}$ matričnog elementa,

$$P(\alpha \rightarrow \beta) = |S^{BOX}_{\beta\alpha}|^2 = \left[\frac{(2\pi)^3}{V}\right]^{(N_\alpha+N_\beta)} |S_{\beta\alpha}|^2. \quad (641)$$

Ovime se aproksimativno glumi ispravna procedura sa valnim paketima jer je impuls valne funkcije Ψ^{BOX}_α konstantan u malom dijelu faznog prostora oko stanja α zbog BOX normalizacije.

$*$ Diferencijalna mjera izlaznih čestica

- Eksperimentalno se ne mjeri prijelaz početnog stanja u odredjeno konačno stanje, već u odredjeno fazno područje konačnih stanja.
- Diferencijalnu mjeru broja konačnih stanja znamo iz statističke fizike, kao omjer diferencijala faznog prostora $d\phi$ i $h^{3N_\beta} = (2\pi)^{3N_\beta}$

$$d\mathcal{N}_\beta = \frac{d\phi}{(2\pi)^{3N_\beta}} = \prod_{i=1}^{N_\beta} \frac{d^3x_i d^3p_i}{(2\pi)^3} \;\rightarrow\; \frac{V^{N_\beta}}{(2\pi)^{3N_\beta}} d\beta, \quad (642)$$

gdje je $d\beta = \prod_{i=1}^{N_\beta} d^3p_i$. U zadnjem koraku u (642) smo pointegrirali po volumenu - to je dopušteno zbog translacijske invarijantnosti.

$*$ Diferencijalna vjerojatnost prijelaza preko $S_{\beta\alpha}$

- Rabeći (641) i (642) moženo napisati diferencijal vjerojatnosti prijelaza

$$dP(\alpha \to \beta) \;=\; P(\alpha \to \beta)d\mathcal{N}_\beta \;=\; \left[\frac{(2\pi)^3}{V}\right]^{N_\alpha} |S_{\beta\alpha}|^2 d\beta \; . \tag{643}$$

$*$ Pretpostavka povezanih amplituda

- U daljnjem razmatranju pretpostavljamo ne samo da su stanja α i β (barem malo) različita, već da niti jedan podskup α stanja nema točno isti 4-impuls kao bilo koji od podskupova β stanja.
- Poslije ćemo pokazati da to znači da amplituda $S_{\beta\alpha}$ povezana i da se može prikazati u obliku

$$S_{\beta\alpha} \;=\; S^{c}_{\beta\alpha} \;=\; -i\underbrace{2\pi}_{(2\pi)^4}\delta^4(p_\beta - p_\alpha)M_{\beta\alpha} \tag{644}$$

$$\stackrel{BOX}{\to} \;\; -i\underbrace{2\pi}_{(2\pi)^4}\delta_V(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha)\delta_T(E_\beta - E_\alpha)M_{\beta\alpha}, \tag{645}$$

gdje $M_{\beta\alpha}$ ne sadrži niti jednu δ-funkciju. Prvi (drugi) redak odgovara neograničenom (VT-ograničenom (box normalizacija)) prostoru u kojem se zbiva reakcija. Sa vitičastim zagradama označena je standardna normalizacija koja se razlikuje od Weinbergove.

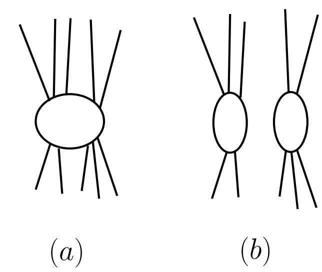


Figure 5: 3.5 Povezana (a) i nepovezana (b) amplituda $M_{\beta\alpha}$

$*$ Diferencijalna vjerojatnost prijelaza preko $M_{\beta\alpha}$ amplitude

- Box normalizacija omogućuje interpretaciju kvadrata delta-funkcija u $|S_{\beta\alpha}|^2$

$$[\delta_V(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha)]^2 \;=\; \delta_V(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha)\delta_V(\vec{0}) \;=\; \delta_V(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha)\frac{V}{(2\pi)^3} \; , \tag{646}$$

$$[\delta_T(E_\beta - E_\alpha)]^2 \;=\; \delta_T(E_\beta - E_\alpha)\delta_T(0) \;=\; \delta_T(E_\beta - E_\alpha)\frac{T}{2\pi} \; . \tag{647}$$

- Odatle slijedi izraz za diferencijalnu vjerojatnost prijelaza (kao i u jednadžbama (644) i (645) ovdje i u svim daljnjim izrazima sa vitičastom zagradom označavam uobičajenu normalizaciju koja se razlikuje od Weinbergove)

$$dP(\alpha \to \beta) \;=\; \underbrace{2\pi}_{(2\pi)^7} T\Big(\frac{(2\pi)^3}{V}\Big)^{N_\alpha - 1} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta_V(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha)\delta_T(E_\beta - E_\alpha) d\beta \;. \qquad (648)$$

∗ Diferencijalna brzina prijelaza

- U limesu velikih V i T može se zamijeniti

$$\delta_V(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha)\delta_T(E_\beta - E_\alpha) \;\to\; \delta^4(p_\beta - p_\alpha) \;. \qquad (649)$$

- U tom limesu se koeficijent uz T može interpretirati kao diferencijalna brzina prijelaza

$$d\Gamma(\alpha \to \beta) \;=\; \frac{dP(\alpha \to \beta)}{T} \;=\; \underbrace{2\pi}_{(2\pi)^7} \Big(\frac{(2\pi)^3}{V}\Big)^{N_\alpha - 1} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \;. \qquad (650)$$

To je Fermijevo zlatno pravilo za brzinu procesa $\alpha \to \beta$ koje ste izveli i u NR QM za jednočestično stanje α.
- (650) je osnovna formula za sve reakcije koja vrijedi za bilo koje ulazno stanje α.

□ Specijalni slučajevi (650) : def. širine raspada i udarnog presjeka

∗ $N_\alpha = 1$: širina raspada

- Za $N_\alpha = 1$ $d\Gamma(\alpha \to \beta)$ ne ovisi o V. Diferencijal brzine prijelaza zove se diferencijal širine raspada i jednak je

$$d\Gamma(\alpha \to \beta) \;=\; \underbrace{2\pi}_{(2\pi)^7} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \;. \qquad (651)$$

- Napomena : Formula (651) vrijedi samo ako je vrijeme života čestice α, τ_α veće od T ($\tau_\alpha > T$) (vrijeme života jednako je $1/\Gamma_\alpha$, gdje je Γ_α ukupna širina raspada čestice α. Zbog toga se kroz $\delta_T(E_\beta - E_\alpha)$ unosi neodredjenost u energiji sistema veća od Γ_α, pa formula ima smisla samo ako su karaktristične energije čestica u procesu puno veće od Γ_α.

∗ $N_\alpha = 2$: udarni presjek

- Za $N_\alpha = 2$ je $d\Gamma(\alpha \to \beta) \sim 1/V$, pa da bi se dobio fizikalo prihvatljiv rezultat treba podijeliti sa fizikalnom veličinom koja bi se u BOX normalizaciji ponašala kao $1/V$.
- Takve su veličine gustoća jedne od čestica (koja je jednaka $1/V$) ili relativni tok dvaju čestica koji se definira kao omjer razlike brzina dvaju ulaznih čestica u_α i volumena (tj. umnožak razlike brzina ulaznih čestica i gustoće jedne od njih),

$$\Phi_\alpha \;=\; \frac{u_\alpha}{V} \;. \qquad (652)$$

Tok se rabi u definiciji diferencijalnog udarnog presjeka, $d\sigma$

$$d\sigma(\alpha \to \beta) \;=\; \frac{d\Gamma(\alpha \to \beta)}{\Phi_\alpha} \;=\; \frac{\overbrace{(2\pi)^4}^{(2\pi)^{10}}}{u_\alpha}|M_{\beta\alpha}|^2\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta\;. \tag{653}$$

$*$ Slučajevi $N_\alpha > 2$

- Postoji mogućnost mjerenja procesa i za $N_\alpha > 2$. Takovi se procesi javljaju u kemijskim reakcijama i u astrofizici, npr. u jednom od najvažnijih procesa koji opisuje nastanak energije na suncu, $n + n + e^+ \to d + \overline{\nu}_e$. Za opis $N_\alpha > 2$ procesa vidi Weinbergovu knjigu poglavlje §3.6.

• Lorentz transformacijska svojstva $d\Gamma$ i $d\sigma$; interpretacija faznog faktora $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta$

□ Lorentz transformacijska svojstva $d\Gamma$ i $d\sigma$

- Lorentz transformacijska svojstva S matrice koja su opisana jednadžbom (467)

$$\begin{aligned}(467) \equiv\; & S_{p'_1\sigma'_1n'_1;p'_2\sigma'_2n'_2\ldots,p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2\ldots} \;=\; \exp\left[ia_\mu(p'^\mu_1 + p'^\mu_2 + \ldots - p^\mu_1 - p^\mu_2 - \ldots)\right] \\ & \times\left(\frac{(\Lambda p'_1)^0}{p'^0_1}\frac{(\Lambda p'_2)^0}{p'^0_2}\cdots\frac{(\Lambda p_1)^0}{p^0_1}\frac{(\Lambda p_2)^0}{p^0_2}\cdots\right)^{1/2} \\ & \times\sum_{\overline{\sigma}'_1\overline{\sigma}'_2\ldots}\sum_{\overline{\sigma}_1\overline{\sigma}_2\ldots} D^{(j'_1)*}_{\overline{\sigma}'_1\sigma'_1}(W(\Lambda,p'_1))\ldots D^{(j_1)}_{\overline{\sigma}_1\sigma_1}(W(\Lambda,p_1))\ldots \\ & \times S_{\Lambda p'_1\overline{\sigma}'_1n'_1;\Lambda p'_2\overline{\sigma}'_2n'_2\ldots,\Lambda p_1\overline{\sigma}_1n_1;\Lambda p_2\overline{\sigma}_2n_2\ldots}\;,\end{aligned} \tag{654}$$

imaju kompliciranu kutnu zavisnost zbog spinskih stupnjeva slobode (Wignerovih rotacija).

$*$ Lorentz transformacijska svojstva $\sum_{spins}|S_{\beta\alpha}|^2$

Da bismo se riješili kutne zavisnosti sumirat ćemo apsolutni kvadrat S matrice po svim spinovima (u biti sumira se po konačnim a usrednjava po početnim spinovima).

- Uporabom jednakosti za karakterističnu kombinaciju Wignerovih rotacija u Lorentz transformiranom S matričnom elementu posumiranom po spinovima,

$$\sum_{\sigma_i} D^*_{\sigma_i\overline{\overline{\sigma}}_i}(W(\Lambda,p))D_{\sigma_i\overline{\sigma}_i}(W(\Lambda,p)) \;=\; \delta_{\overline{\overline{\sigma}}_i\overline{\sigma}_i}, \tag{655}$$

(relacija vrijedi i za masivna i za bezmasena stanja) nalazimo da je

$$(p'^0_1\ldots)(p^0_1\ldots)\sum_{\sigma'_1\ldots,\sigma_1\ldots}|S_{p'_1\sigma'_1n'_1;p'_2\sigma'_2n'_2\ldots,p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2\ldots}|^2\;. \tag{656}$$

Lorentzova invarijanta.
- Rabeći nadalje Lorentz invarijantnost $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$ funkcije i produkta VT slijedi da je

$$
\begin{aligned}
&(p_1'^0 \dots)(p_1^0 \dots) \sum_{\sigma_1' \dots, \sigma_1 \dots} |M_{p_1'\sigma_1'n_1';p_2'\sigma_2'n_2' \dots, p_1\sigma_1 n_1; p_2\sigma_2 n_2 \dots}|^2 \\
&\equiv \prod_\alpha E \prod_\beta E \sum_{spins} |M_{\beta\alpha}|^2 \stackrel{def}{\equiv} R_{\beta\alpha}
\end{aligned} \tag{657}
$$

($p_i^0 = \sqrt{\vec{p}_i^{\,2} + m_i^2} = E_i$) takodjer Lorentz invarijanta.

$*$ Lorentz transformacija $d\Gamma$

- Iz jednadžbi (651) i (657) dobijamo

$$
\sum_{spins} d\Gamma(\alpha \to \beta) = \underbrace{(2\pi)}_{(2\pi)^7} \underbrace{\frac{1}{E_\alpha}}_{\frac{1}{(2\pi)^3 2E_\alpha}} \underbrace{R_{\beta\alpha}}_{\sum |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2} \underbrace{\delta^4(p_\beta - p_\alpha) \frac{d\beta}{\prod_\beta E}}_{\delta^4(p_\beta - p_\alpha) \frac{d\beta}{\prod_\beta (2\pi)^3 2E}} \tag{658}
$$

(vitičastim zagradama označene su veličine u BD odnosno Part.Data normalizaciji).
- Budući da je d^3p_i/E_i Lorentz invarijantna mjera, $\sum_{spins} d\Gamma(\alpha \to \beta)$ se transformira kao $1/E_\alpha$ na L.T.,

$$
d \sum_{spins} \Gamma(\alpha \to \beta) \sim \frac{1}{E_\alpha} , \qquad \Gamma_\alpha \sim \frac{1}{E_\alpha} . \tag{659}
$$

To je u skladu sa Lorentz dilatacijom vremena poluživota čestice.

$*$ Lorentz transformacijska svojstva $d\sigma$

- Iz jednadžbi (653) i (657) slijedi

$$
\sum_{spins} d\sigma(\alpha \to \beta) = \underbrace{(2\pi)^4}_{(2\pi)^{10}} \frac{1}{u_\alpha} \underbrace{\frac{1}{E_1}}_{\frac{1}{(2\pi)^3 2E_1}} \underbrace{\frac{1}{E_2}}_{\frac{1}{(2\pi)^3 2E_2}} \underbrace{R_{\beta\alpha}}_{\sum |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2} \underbrace{\delta^4(p_\beta - p_\alpha) \frac{d\beta}{\prod_\beta E}}_{\delta^4(p_\beta - p_\alpha) \frac{d\beta}{\prod_\beta (2\pi)^3 2E}} , \tag{660}
$$

gdje su E_1 i E_2 energije ulaznih čestica. (vitičastim zagradama označene su veličine u BD odnosno Part.Data normalizaciji)
- Stoga se na L.T. $\sum_{spins} d\sigma(\alpha \to \beta)$ transformira kao

$$
\sum_{spins} d\sigma(\alpha \to \beta) \sim \frac{1}{u_\alpha E_1 E_2} . \tag{661}
$$

- Uobičajeno je definirati $\sum_{spins} d\sigma(\alpha \to \beta)$ kao Lorentz invarijantnu veličinu. To jednoznačno definira u_α:

$$u_\alpha \;=\; \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}/(E_1 E_2)\;. \tag{662}$$

D:
- U sustavu mirovanja ulazne čestive 2 (LAB2), u_α mora biti jednaka brzini čestice 1. Provjerimo to.

$$\begin{aligned} p_2 &\overset{LAB2}{=} (\vec{0}, m_2) \qquad \Rightarrow \qquad p_1 \cdot p_2 = -E_1 m_2 \\ \Rightarrow u_\alpha &= \frac{1}{E_1 m_2}\sqrt{(E_1^2 - m_1^2)m_2^2} \;=\; \frac{p_1}{E_1} \;=\; v_1 \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned} \tag{663}$$

- U CMS sustavu, u kojem je

$$\vec{p}_\alpha = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0, \tag{664}$$

dobijamo ($\vec{p} \equiv \vec{p}_1$, $p \equiv |\vec{p}|$)

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \frac{1}{E_1 E_2}\sqrt{(-\vec{p}^2 - E_1 E_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \\ &= \frac{1}{E_1 E_2}\sqrt{p^4 + 2p^2 E_1 E_2 + (m_1^2 + p^2)(m_2^2 + p^2) - m_1^2 m_2^2} \\ &= \frac{1}{E_1 E_2}\sqrt{2p^2 E_1 E_2 + p^2 E_1^2 + p^2 E_1^2} \;=\; p\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \\ &= \frac{p}{E_1} + \frac{p}{E_2} \;=\; \left|\frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2}\right| \;=\; |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\;. \end{aligned} \tag{665}$$

Primjetimo da u_α nije fizikalna brzina jer može čak poprimiti vrijednost 2, dok je maksimalna vrijednost fizikalne veličine jednaka 1.

□ Interpretacija faznog faktora $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta$

- Interpretaciju faznih faktora u jednadžbama (651), (653), (658) i (660) dat ćemo u CMS sustavu u kojem je ukupni 3-impuls početnog stanja jednak nuli,

$$\vec{p}_\alpha \;=\; 0\;. \tag{666}$$

- Jedna od integracija po 3-impulsima, npr. d^3p_1 je trivijalna i rezultira zamjenom

$$\begin{aligned} \delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta &= \delta(\vec{p}_1' + \vec{p}_2' + \ldots)\delta(E_1' + E_2' + \ldots)d^3p_1' d^3p_2' \ldots \\ &\Rightarrow \delta(E_1' + E_2' + \ldots)d^3p_2' \ldots\;, \end{aligned} \tag{667}$$

s time da se poslije zamjene umjesto $\vec{p}_1'$ svuda stavlja

$$\vec{p}_1' \;=\; -\vec{p}_2' - \vec{p}_3' - \ldots \tag{668}$$

$*$ Slučaj $N_\beta = 2$ (2 čestice u kon. stanju)

- Za dvije čestice u konačnom stanju zamjena (667) (uz uvjet (668)) postaje

$$\begin{aligned}
\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta &\to \delta(E'_1 + E'_2 - E)d^3p'_2 \\
&= \delta(\sqrt{\vec{p}_1'^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{p}_1'^2 + m_2^2} - E)p_1'^2 dp'_1 d\Omega'_2 \\
&= \frac{\delta(p'_1 - k')}{\frac{k'}{E'_1(k')} + \frac{k'}{E'_2(k')}} k'^2 dp'_1 d\Omega'_2 \\
&\to \frac{E'_1 E'_2 k'}{E} \underbrace{d\Omega'_2}_{d\Omega} \ . \qquad (669)
\end{aligned}$$

- U prvom retku jednadžbe (669) $E = E_\alpha$ je ukupna CMS energija početnog stanja. U drugom retku primjenjena je jednakost $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$. U trećem retku k' je rješenje jednadžbe

$$0 = \sqrt{\vec{p}_1'^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{p}_1'^2 + m_2^2} - E \qquad (670)$$

(desna strana jednadžbe (670) je argument energetske δ-funkcije) po iznosu impulsa p_1,

$$\begin{aligned}
k' &= \frac{1}{2E}\lambda^{1/2}(m_1'^2, m_2'^2, E^2), \qquad (671) \\
\lambda(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz), \qquad (672)
\end{aligned}$$

a $E'_1(k')$ i $E'_2(k')$ su pridružene energije

$$E'_1(k') = \frac{E^2 + m_1'^2 - m_2'^2}{2E}, \qquad E'_2(k') = \frac{E^2 + m_2'^2 - m_1'^2}{2E} \ . \qquad (673)$$

U četvrtom retku je izvršena integracija po dp'_1. Podrazumjeva se da su sve veličine izračunate za $p'_1 = k'$. Takodjer je naznačeno da će se u formulama koje slijede $d\Omega'_2$ zvati $d\Omega$.

- Uvrštavajući zamjenu (669) u izraze (658) i (660) dobijamo izraze za širinu raspada i udarni presjek za dvije česice u konačnom stanju

$\cdot$ Širina raspada za 2 čestice u kon. stanju

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma}{d\Omega} &\overset{(658)_W}{=} (2\pi)\frac{k'}{E^2}R_{\beta\alpha} \overset{(658)_W}{=} (2\pi)\frac{k' E'_1 E'_2}{E}\sum |M_{\beta\alpha}|^2 \\
&\overset{(658)_{BD}}{=} \frac{1}{8(2\pi)^2}\frac{k'}{E^2}\sum |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \ . \qquad (674)
\end{aligned}$$

Indeks W (BD) označuje račun u Weinbergovoj (Bjorken-Drellovoj = Particle Data) normalizaciji.

· Udarni presjek za 2 čestice u kon. stanju. U drugoj jednadžbi u prvom retku upotrebljena definicija $R_{\beta\alpha}$ (657).

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &\overset{(660)_W}{=} (2\pi)^4 \frac{1}{u_\alpha}\frac{1}{E_1E_2}\frac{k'}{E}R_{\beta\alpha} \overset{(660)_W}{=} (2\pi)^4 \frac{k'}{kE^2}R_{\beta\alpha} \\ &\overset{(660)_W}{=} (2\pi)^4 \frac{1}{u_\alpha}\frac{k'E_1'E_2'}{E}\sum |M_{\beta\alpha}|^2 \overset{(660)_W}{=} (2\pi)^4 \frac{k'E_1'E_2'E_1E_2}{kE^2}\sum |M_{\beta\alpha}|^2 \\ &\overset{(660)_{BD}}{=} \frac{1}{16(2\pi)^2}\frac{1}{u_\alpha}\frac{1}{E_1E_2}\frac{k'}{E}\sum |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \overset{(660)_{BD}}{=} \frac{1}{16(2\pi)^2}\frac{k'}{kE^2}\sum |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \,. \end{aligned} \tag{675}$$

Indeks W (BD) označuje račun u Weinbergovoj (Bjorken-Drellovoj = Particle Data) normalizaciji. U drugom retku upotrebljena je definicija $R_{\beta\alpha}$ (657). U drugoj jednadžbi u prvom retku i drugoj jednadžbi u drugom retku upotrebljena je veza izmedju ulaznog impulsa u CMS i u_α koji se može očitati iz trećeg retka jednadžbe (665),

$$k \;=\; p \;=\; \frac{u_\alpha E_1E_2}{E}, \qquad u_\alpha \;=\; \frac{kE}{E_1E_2}\;. \tag{676}$$

$*$ Slučaj $N_\beta = 3$ (3 čestice u konačnom stanju)

- Za tri čestice u konačnom stanju zamjena (667) (uz uvjet (668)) postaje

$$\begin{aligned}\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta &\rightarrow d^3p_2'd^3p_3'\delta(E_1'+E_2'+E_3'-E)\Big|_{\vec{p}_1'=-\vec{p}_2'-\vec{p}_3'} \\ &= p_2'^2dp_2'p_3'^2dp_3'd\Omega_2'd\Omega_3' \\ &\times \delta\Big(\sqrt{m_1'^2+p_2'^2+p_3'^2+2p_2'p_3'\cos\theta_{23}'}+\sqrt{m_2'^2+p_2'^2}+\sqrt{m_3'^2+p_3'^2}-E\Big) \\ &= p_2'E_2'dE_2'p_3'E_3'dE_3'd\varphi_{23}'d\cos\theta_{23}'d\Omega_3'\frac{\delta(\cos\theta_{23}'-\cos\theta_{23}^0)}{\frac{1}{2}\frac{2p_2'p_3'}{E_1'}} \\ &\rightarrow E_1'E_2'E_3'dE_2'dE_3'd\Omega_3'd\varphi_{23}'\;. \end{aligned} \tag{677}$$

- U prvom retku zamjene (677) pointegrirano je po d^3p_1'. Nakon te integracije podrazumjeva se da je $\vec{p}_1' = -\vec{p}_2' - \vec{p}_3'$. U drugom retku su integracije d^3p_2' i d^3p_3' raspisane u pripadnim sfernim koordinatana a energije su eksplicite ispisane preko impulsa. Zbog jednakosti $\vec{p}_1' = -\vec{p}_2' - \vec{p}_3'$ energija E_1' zavisi o kosinusu kuta izmedju $\vec{p}_2'$ i $\vec{p}_3'$. U trećoj jednakosti upotrebljene su jednakosti (koje slijede iz Einsteinove relacije $E^2 = p^2 + m^2$)

$$p_i'dp_i' \;=\; E_i'dE_i'\;. \tag{678}$$

Nadalje, integracija po $d\Omega_2'$ se vrši u sustavu u kojem ulogu $\hat{z}$ osi ima smjer $\hat{p}_3'$. U tom sustavu je $\cos\theta_2' = \cos\theta_{23}'$, $\varphi_2' = \varphi_{23}'$. Takodjer je energetska δ-funkcija pretvorena u delta funkciju za $\cos\theta_{23}'$. $\cos\theta_{23}^0$ je rješenje jednadžbe

$$0 \;=\; \sqrt{m_1'^2+p_2'^2+p_3'^2+2p_2'p_3'\cos\theta_{23}'}+\sqrt{m_2'^2+p_2'^2}+\sqrt{m_3'^2+p_3'^2}-E \tag{679}$$

po $\cos\theta'_{23}$. U četvrtoj jednakosti je integracija po $\cos\theta'_{23}$ provedena i za $\cos\theta'_{23}$ se mora sada uvrštavati rješenje $\cos\theta^0_{23}$.

· Širina raspada za tri čestice u konačnom stanju

$$\begin{aligned} d\Gamma_\alpha &\stackrel{(658)_W}{=} (2\pi)\frac{1}{E}R_{\beta\alpha}dE'_2dE'_3d\Omega'_3d\varphi'_{23} \stackrel{(658)_W}{\rightarrow} (16\pi^3)\frac{1}{E}R_{\beta\alpha}dE'_2dE'_3 \\ &\stackrel{(658)_{BD}}{=} \frac{1}{512\pi^5}\frac{1}{E}\sum|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2dE'_2dE'_3d\Omega'_3d\varphi'_{23} \stackrel{(658)_{BD}}{\rightarrow} \frac{1}{64\pi^3}\frac{1}{E}\sum|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2dE'_2dE'_3\ . \end{aligned} \tag{680}$$

- Zamjena u prvom i drugom retku označava integraciju po $d\Omega'_3d\varphi'_{23}$. Nju je moguće provesti u $1\rightarrow 3$ raspadu jer polazna čestica ne definira niti jedan smjer. Jedini smjerovi dolaze od impulsa. Impuls $\vec{p}'_1$ je preko (668) odredjen sa impulsima $\vec{p}'_2$ i $\vec{p}'_3$. Stoga je prvi nezavisni smjer $\hat{p}'_3$. On ne fiksira φ'_{23} pa matrični element ne ovisi o njemu. To kroz integraciju daje faktor 2π. Matrični element ovisi samo o skalarnim produktima 4-impulsa, koji ne zavise o φ'_{23}. Nadalje, matrični element ne može ovisiti ni o sustavu promatranja, dakle ni o $\hat{p}'_3$. To kroz $d\Omega'_3$ daje faktor 4π. Sveukupno, $d\Omega'_3d\varphi'_{23}$ integracija daje faktor $8\pi^2$.
- Fizikalno rezultat (680) pokazuje da je $d\Gamma_\alpha/dE'_2dE'_3$ proporcionalan apsolutnom kvadratu Lorentz invarijantnog matričnog elementa. Stoga se mjerenjem te veličine može mjeriti $|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2$. Njegovo odstupanje od konstante će ukazivati na rezonantne strukture u (E'_2, E'_3) parametarskom prostoru. Dijagramatski prikaz $d\Gamma_\alpha/dE'_2dE'_3$ kao funkcije E'_2 i E'_3 zove se Dalitzov dijagam, po Dalitzu koji je tu metodu rabio za analizu $K\rightarrow 3\pi$ procesa.

· Udarni presjek za tri čestice u konačnom stanju

$$\begin{aligned} d\sigma_\alpha &\stackrel{(658)_W}{=} (2\pi)^4\frac{1}{kE}R_{\beta\alpha}dE'_2dE'_3d\Omega'_3d\varphi'_{23} \\ &\stackrel{(658)_{BD}}{=} \frac{1}{1024\pi^5}\frac{1}{kE}|\mathcal{M}|^2dE'_2dE'_3d\Omega'_3d\varphi'_{23}\ . \end{aligned} \tag{681}$$

- U ovom slučaju ulazne čestice već definiraju smjer, npr. $\hat{z}=\hat{p}_1$. sljedeći smjer je $\hat{p}'_3$ koji se slobodno može "okretati" oko $\hat{p}_1$, tako da je integraciju moguće provesti po $d\varphi'_3$. Medjutim integracije po $d\cos\theta'_3$ i po $d\varphi'_{23}$ nije moguće provesti jer matrični element o njima u principu ovisi. U gornjem rezultatu nismo proveli integraciju po $d\varphi'_3$ koja bi davala faktor 2π. Zbog kutne ovisnosti matričnog elementa o $\cos\theta'_3$ i po φ'_{23} nije moguće ustanoviti $|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2$ iz $d\sigma_\alpha/dE'_2dE'_3$.

3.5 Teorija smetnje

• Stara teorija smetnje

- Povijesno najuspješnija metoda izračunavanja S-matričnog elementa je **teorija smetnje**, ekspanzija u potencijama Hamiltonijana medjudjelovanja V, za Hamiltonijan $H = H_0 + V$.

$*$ Račun S matričnog elementa u staroj teoriji smetnje

- U staroj teoriji smetnje S matrični element se izračunava preko Lippmann-Schwingerove jednadžbe, (454),

$$S_{\beta\alpha} \overset{(454)}{=} \delta(\beta-\alpha) - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) T^+_{\beta\alpha} \,, \tag{682}$$

$$\Psi^\pm_\alpha \overset{(427)}{=} \Phi_\alpha + \int d\gamma \, \frac{\Phi_\gamma T^\pm_{\gamma\alpha}}{(E_\alpha - E_\gamma \pm i\varepsilon)} \,, \tag{683}$$

$$T^+_{\gamma\alpha} \overset{(427)}{=} (\Phi_\gamma, V\Psi^+_\alpha) \,. \tag{684}$$

- Djelovanjem na Ψ^+_α iz (683) sa "$(\Phi_\beta, V\ .)$" dobija se jednadžba za $T^+_{\beta\alpha}$

$$\begin{aligned} (\Phi_\beta, V\Psi^+_\alpha) \equiv T^+_{\beta\alpha} &= (\Phi_\beta, V\Phi_\alpha) + \int d\gamma \, \frac{(\Phi_\beta, V\Phi_\gamma) T^+_{\gamma\alpha}}{E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon} \\ &\equiv V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \, \frac{V_{\beta\gamma} T^+_{\gamma\alpha}}{E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon} \,, \end{aligned} \tag{685}$$

$$V_{\beta\alpha} \equiv (\Phi_\beta, V\Phi_\alpha), \tag{686}$$

koja se može iterirati

$$\begin{aligned} T^+_{\beta\alpha} &= (\Phi_\beta, V\Phi_\alpha) + \int d\gamma \, \frac{(\Phi_\beta, V\Phi_\gamma) T^+_{\gamma\alpha}}{E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon} \\ &= V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \frac{V_{\beta\gamma}}{E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon} \Bigg(V_{\gamma\alpha} + \int d\gamma' \frac{V_{\gamma\gamma'}}{E_\alpha - E'_\gamma + i\varepsilon} (V_{\gamma'\alpha} + \ldots \\ &= V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\alpha}}{E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon} + \int d\gamma d\gamma' \, \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\gamma'} V_{\gamma'\alpha}}{(E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon)(E_\alpha - E'_\gamma + i\varepsilon)} + \ldots \end{aligned} \tag{687}$$

Odatle slijedi izraz za $S_{\beta\alpha}$ matrični element,

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \delta(\beta-\alpha) - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) T^+_{\beta\alpha} \\ &= \delta(\beta-\alpha) - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) \Big[V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\alpha}}{E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon} \\ &\quad + \int d\gamma d\gamma' \, \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\gamma'} V_{\gamma'\alpha}}{(E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon)(E_\alpha - E'_\gamma + i\varepsilon)} + \ldots \qquad \Big] \,. \end{aligned} \tag{688}$$

- Što se prednosti i nedostataka stare pertubativne teorije tiče, nedostatak je što energetski nazivnici u (687) nisu Lorentz invarijantni. Lorentz invarijantnost je eksplicitna u niže diskutiranom vremenski ovisnom računu smetnje. S druge strane ti isti nazivnici su i prednost kada se želi u S matrici točno ustanoviti odakle dolazi pojedino medjustanje.

• Vremenski ovisan račun smetnje

$*$ Izvod iterativne jednadžbe za S matrični element

- Polazna točka vremenski ovisnog računa smetnje je izraz za S operator preko operatora evolucije $U(\tau, \tau_0)$,

$$
\begin{aligned}
S &\overset{(449)}{\equiv} U(+\infty, -\infty), && (689) \\
U(\tau, \tau_0) &\overset{(450)}{\equiv} \Omega^\dagger(\tau)\Omega(\tau_0) = \exp(iH_0\tau)\exp(-iH(\tau-\tau_0))\exp(-iH_0\tau_0) \,. && (690)
\end{aligned}
$$

- Diferenciranjem (690) po τ dobija se diferencijalna jednadžba

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{d\tau}U(\tau, \tau_0) &= V(\tau)U(\tau, \tau_0), && (691) \\
V(\tau) &\overset{def}{\equiv} e^{iH_0\tau}Ve^{-iH_0\tau} \,. && (692)
\end{aligned}
$$

D:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}U(\tau, \tau_0) &= e^{iH_0\tau}\underbrace{(iH_0 - iH)}_{-iV}e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} \\
&\Downarrow \\
i\frac{d}{d\tau}U(\tau, \tau_0) &= e^{iH_0\tau}Ve^{-iH_0\tau}e^{iH_0\tau}e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0} \equiv V(\tau)U(\tau, \tau_0) \,. \qquad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}
$$

- Za operatore definirane unitarnom transformacijom $e^{iH_0\tau}Oe^{-iH_0\tau}$ kao u (692) kaže se da su u **slici medjudjelovanja**, za razliku od operatora u **Heisenbergovoj slici** $O_H(\tau) = e^{iH\tau}Oe^{-iH\tau}$. Pri tome se uzima da su V i O operatori neovisni o vremenu.
- Integrirajući jednadžbu (691) po τ i uzimajući u obzir početni uvjet $U(\tau_0, \tau_0) = 1$ dobija se formalno rješenje jednadžbe (691),

$$
U(\tau, \tau_0) = 1 - i\int_{\tau_0}^{\tau} dt\, V(t)U(t, \tau_0) \,. \qquad (693)
$$

Iteracijom te jednadžbe se dobija razvoj $U(\tau, \tau_0)$ po potencijama V,

$$
U(\tau, \tau_0) = 1 - i\int_{\tau_0}^{\tau} dt\, V(t)U(t, \tau_0)
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - i\int_{\tau_0}^{\tau} dt_1\, V(t_1)\left[1 - i\int_{\tau_0}^{t_1} dt_2\, V(t_2)\left[1 - i\int_{\tau_0}^{t_2} dt_3\, V(t_3)\,[\ldots\right.\right.\\
&= 1 - i\int_{\tau_0}^{\tau} dt_1\, V(t_1) + (-i)^2\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\tau_0}^{t_1} dt_1 dt_2\, V(t_1)V(t_2)\\
&\quad +(-i)^3\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\tau_0}^{t_1}\int_{\tau_0}^{t_2} dt_1 dt_2 dt_3\, V(t_1)V(t_2)V(t_3) + \ldots
\end{aligned}
\tag{694}
$$

- Stavljajući $\tau = +\infty$ i $\tau_0 = -\infty$ u (694) dobija se pertubativni izraz za S matricu,

$$
\begin{aligned}
S &= 1 - i\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\, V(t_1) + (-i)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t_1} dt_1 dt_2\, V(t_1)V(t_2)\\
&\quad +(-i)^3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} dt_1 dt_2 dt_3\, V(t_1)V(t_2)V(t_3) + \ldots
\end{aligned}
\tag{695}
$$

$*$ Ekvivalentnost stare teorije smetnje i vremenski ovisnog računa smetnje

- Izrazi za $S_{\beta\alpha}$ (688) i S operator (695) su ekvivalentni. Da bismo to pokazali treba promotriti matrični element $(\Phi_\beta, S\Phi_\alpha)$ S operatora (695) i u izrazu za $S_{\beta\alpha}$ (688) upotrijebiti formulu,

$$
(E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon)^{-1} e^{i(E_\gamma - E_\alpha - i\varepsilon)t} = -i\int_{-\infty}^{t} dt' e^{i(E_\gamma - E_\alpha - i\varepsilon)t'} \ . \tag{696}
$$

D:
- Matrični element $V(t)$

$$
(\Phi_\beta, V(t)\Phi_\alpha) = (\Phi_\beta, e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}\Phi_\alpha) \overset{(686)}{=} e^{i(E_\beta - E_\alpha)t} V_{\beta\alpha} \ . \tag{697}
$$

- Matrični element S operatora (695)

$$
\begin{aligned}
S_{\beta\alpha} &= (\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) = \delta(\beta - \alpha) - i\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\, e^{i(E_\beta - E_\alpha)t_1} V_{\beta\alpha}\\
&+ (-i)^2\int d\gamma\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\int_{-\infty}^{t_1} dt_2\, e^{i(E_\beta - E_\gamma)t_1} e^{i(E_\gamma - E_\alpha)t_2} V_{\beta\gamma} V_{\gamma\alpha}\\
&+ (-i)^3\int d\gamma d\gamma'\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\int_{-\infty}^{t_1} dt_2\int_{-\infty}^{t_2} dt_3\, e^{i(E_\beta - E_\gamma)t_1} e^{i(E_\gamma - E_{\gamma'})t_2}\\
&\times e^{i(E_{\gamma'} - E_\alpha)t_3} V_{\beta\gamma} V_{\gamma\gamma'} V_{\gamma'\alpha} \ .
\end{aligned}
\tag{698}
$$

- Vremenski integrali

$$
-i\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\, e^{i(E_\beta - E_\alpha)t_1} = -2\pi i\delta(E_\beta - E_\alpha), \tag{699}
$$

$$\begin{aligned}
&(-i)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2\ e^{i(E_\beta - E_\gamma)t_1} e^{i(E_\gamma - E_\alpha)t_2} \\
&= \ -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\ e^{i(E_\beta - E_\gamma)t_1} \frac{e^{i(E_\gamma - E_\alpha)t_1}}{E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon} \\
&= (-2\pi i)\delta(E_\beta - E_\alpha) \frac{1}{E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon}
\end{aligned} \tag{700}$$

$$\begin{aligned}
&(-i)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3\ e^{i(E_\beta - E_\gamma)t_1} e^{i(E_\gamma - E_{\gamma'})t_2} e^{i(E_{\gamma'} - E_\alpha)t_3} \\
&= \ (-i)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2\ e^{i(E_\beta - E_\gamma)t_1} e^{i(E_\gamma - E_{\gamma'})t_2} \frac{e^{i(E_{\gamma'} - E_\alpha)t_2}}{E_\alpha - E_{\gamma'} + i\varepsilon} \\
&= \ (-i) \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\ e^{i(E_\beta - E_\gamma)t_1} \frac{e^{i(E_\gamma - E_\alpha)t_1}}{E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon} \frac{1}{E_\alpha - E_{\gamma'} + i\varepsilon} \\
&= \ (-2\pi i)\delta(E_\beta - E_\alpha) \frac{1}{(E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon)(E_\alpha - E_{\gamma'} + i\varepsilon)}\ .
\end{aligned} \tag{701}$$

- Konačan izraz za $S_{\beta\alpha}$ nakon vremenskih integracija,

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha} \ &= \ \delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha)\Big(V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\alpha}}{E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon} \\
&\quad + \int d\gamma d\gamma' \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\gamma'} V_{\gamma'\alpha}}{(E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon)(E_\alpha - E'_\gamma + i\varepsilon)} + \ldots \Big),
\end{aligned} \tag{702}$$

podudara se sa (688). Q.E.D.

∗ Vremenski uredjeni produkt; Dysonova formula

- Izraz a za S operator (695) se može napisati, u obliku koji je zgodan za dokaz manifestne Lorentz invarijantnosti tog operatora, rabeći vremenski uredjeni produkt operatora T. Operacija T stavlja operatore sa većim vremenom ljevije od operatora s manjim vremenom,

$$\begin{aligned}
T\{V(t)\} \ &\equiv \ V(t), \\
T\{V(t_1)V(t_2)\} \ &\equiv \ \theta(t_1 - t_2)V(t_1)V(t_2) + \theta(t_2 - t_1)V(t_2)V(t_1), \\
&\ldots \\
T\{V(t_1)\ldots V(t_n)\} \ &\equiv \ \sum_{\mathcal{P}} \theta(t_{\mathcal{P}1} - t_{\mathcal{P}2}) \ldots \theta(t_{\mathcal{P}n-1} - t_{\mathcal{P}n}) V(t_{\mathcal{P}1}) \ldots V(t_{\mathcal{P}n}), \\
&\ldots
\end{aligned} \tag{703}$$

gdje $\mathcal{P}$ označava permutaciju. Vremenski uredjen produkt n V-ova jest suma svih $n!$ permutacija V-ova sa svaka sa svojim poretkom vremena. Vremenski integral svakog od tih $n!$ doprinosa jednako doprinosi S operatoru, pa se on može zapisati u obliku

$$S \ = \ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \ldots dt_n\ T\{V(t_1)\ldots V(t_n)\} \tag{704}$$

$$\stackrel{def}{\equiv} \; T \; \exp\Big[-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\, V(t)\Big] \,, \tag{705}$$

poznatom kao Dysonov red (Dysonova formula za S opertor). Drugi red, (705), dobijen je uzimajući da je T linearna operacija. Dokažimo (704).

D:

- Prikaz n-tog člana S operatora preko T produkta

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n\, V(t_1)\ldots V(t_n) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n\, \theta(t_1-t_2)\ldots\theta(t_{n-1}-t_n)V(t_1)\ldots V(t_n) \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\mathcal{P}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt_{\mathcal{P}1} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_{\mathcal{P}n}}_{\text{sim na perm}}\, \theta(t_{\mathcal{P}1}-t_{\mathcal{P}2})\ldots\theta(t_{\mathcal{P}n-1}-t_{\mathcal{P}n})V(t_{\mathcal{P}1})\ldots V(t_{\mathcal{P}n}) \\
&= \frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n\, \sum_{\mathcal{P}} \theta(t_{\mathcal{P}1}-t_{\mathcal{P}2})\ldots\theta(t_{\mathcal{P}n-1}-t_{\mathcal{P}n})V(t_{\mathcal{P}1})\ldots V(t_{\mathcal{P}n}) \\
&= \frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n\, T\{V(t_1)\ldots V(t_n)\} \qquad \Rightarrow \qquad \text{(Q.E.D. (704))}
\end{aligned} \tag{706}$$

$*$ Napomena o konvergentnosti reda (704)

Red (704) je eksponencijani red ako V komutira sam sa sobom. Medjutim, generalno to nije tako. Nadalje, općenito red (704) nije konvergentan, i u najboljem slučanju je asimptotski red.

• Dokaz Lorentz invarijantnosti teorija sa skalarnom gustoćom Hamiltonijana

$*$ Podsjetnik uvjeta Poincaré (nehom. Lorentz) invarijantnosti (P.I.)

- P.I. je ispunjena ako S operator komutira sa operatorima $U_0(\Lambda, a)$ slobodnih P. T. odnosno sa generatorima slobodnih P.T. H_0, $\vec{P}_0$, $\vec{J}_0$, $\vec{K}_0$.

$*$ **Hipoteza**

- Hipoteza : Hamiltonijan medjudjelovanja jednak je prostornom integralu gustoće Hamiltonijana, $\mathcal{H}(\vec{x}, t)$,

$$\boxed{V(t) \;=\; \int d^3x \mathcal{H}(\vec{x}, t),} \tag{707}$$

koja je skalar na P.T. u sljedećem smislu,

$$U_0(\Lambda, a)\mathcal{H}(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) \;=\; \mathcal{H}(\Lambda x + a) \,. \tag{708}$$

$*$ Provjera konzistentnosti vremenskog razvoja $V(t)$

- Za infinitezimalnu P.T. (708) glasi

$$
\begin{aligned}
[\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\varepsilon_\rho P^\rho, \mathcal{H}(x)] &= (\omega x + \varepsilon)_\rho \partial^\rho \mathcal{H}(x) \\
&= [\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(x^\sigma\partial^\rho - x^\rho\partial^\sigma) + \varepsilon_\rho\partial^\rho]\mathcal{H}(x) \qquad (709)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad [J^{\rho\sigma}, \mathcal{H}(x)] &= i(x^\rho\partial^\sigma - x^\sigma\partial^\rho)\mathcal{H}(x) \qquad (710) \\
\Rightarrow \qquad [P^\rho, \mathcal{H}(x)] &= i\partial^\rho\mathcal{H}(x) \ . \qquad (711)
\end{aligned}
$$

- Posebno ($\partial^0 = \frac{\partial}{\partial x_0} = -\frac{\partial}{\partial t}$),

$$
\begin{aligned}
[H_0, \mathcal{H}(x)] \ = \ [P^0, \mathcal{H}(x)] &\stackrel{(711)}{=} i\partial^0\mathcal{H}(x) \ = \ -i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}(x) \\
\Rightarrow \ i[H_0, V(t)] &= \frac{\partial V(t)}{\partial t} \ . \qquad (712)
\end{aligned}
$$

- S druge strane definicija $V(t)$ (692) daje isti rezultat,

$$
\begin{aligned}
V(\tau + dt) &\stackrel{(692)}{\equiv} e^{iH_0(\tau+dt)}Ve^{-iH_0(\tau+dt)} \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\tau}V(\tau) &= i[H_0, V(\tau)], \qquad (713)
\end{aligned}
$$

što potvrdjuje konzistentnost (708) za definicijom $V(t)$, (692). Q.E.D.

$*$ Lorentz (Poincaré) invarijantni zapis S operatora

Rabeći Dysonovu formulu za S matricu (704) i (707) dobijamo formalno L. inv. izraz za S operator

$$
S \ = \ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \ T\{\mathcal{H}(x_1)\dots\mathcal{H}(x_n)\} \ . \qquad (714)
$$

U tom izrazu jedino definicija T produkta nije manifestno Lorentz invarijantna. Ako je razlika prostorno-vremenskih točaka dvaju gustoća Hamiltonijana vremenolika, $(x_i - x_j)^2 < 0$, onda se predznak razlike vremena $\mathrm{sign}(x_i^0 - x_j^0)$ ne može promijeniti pa je i pripadna $\theta(x_i^0 - x_j^0)$ u T produktu invarijantna. Ako je pak prostornolika, $(x_i - x_j)^2 > 0$, T produkt nije jedinstveno definiran ako gustoće Hamiltonijana ne komutiraju za prostornolike intervale. Da bi se to izbjeglo, zahtjeva se komutacija gustoća Hamiltonijana za prostornolike udaljenosti pripadnih prostorno-vremenskih koordinata,

$$
[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] \ = \ 0 \qquad \text{za } (x - x')^2 > 0 \ . \qquad (715)
$$

To je dovoljan (ali ne i nužan) uvjet Lorentz invarijantnosti S operatora. Pokažimo to.
D:
- Jednadžbe (500), (506) i (474) nam pokazuju uz uvjet da su matrični elementi $\vec{W}$ operatora izmedju valnih paketa bez singulariteta na realnoj energetskoj osi da je Lorentz invarijantnost ispunjena ako

$$\begin{aligned} (500) &\equiv 0 = [\vec{K}_0, V] + [\vec{W}, H], \\ (506) &\equiv [\vec{K}_0, U(t,t_0)] = -\vec{W}(t)U(t,t_0) + U(t,t_0)\vec{W}(t_0), \\ (474) &\equiv 0 = [H_0, S] = [\vec{P}_0, S] = [\vec{J}_0, S] = [\vec{K}_0, S] . \end{aligned}$$

- Iz (710) nalazimo

$$\begin{aligned} [\vec{K}_0, \mathcal{H}(x)] &\overset{(195)}{\equiv} [\{J_0^{i0}\}, \mathcal{H}(x)] \overset{(710)}{=} i\Big(-\vec{x}\frac{\partial}{\partial t} - t\nabla\Big)\mathcal{H}(x) \\ &\overset{(712)}{=} \vec{x}[H_0, \mathcal{H}(x)] - it\nabla\mathcal{H}(x) . \end{aligned} \tag{716}$$

- Stavljajući $t = 0$ i integrirajući po d^3x ($V \equiv V(t=0) = \int d^3x\mathcal{H}(\vec{x},0)$) dobijamo

$$\begin{aligned} [\vec{K}_0, V] &= \Big[H_0, \int d^3x\vec{x}\mathcal{H}(\vec{x},0)\Big] \\ &= -\Big[\int d^3x\vec{x}\mathcal{H}(\vec{x},0), H\Big] + \int d^3xd^3x'\ \vec{x}[\mathcal{H}(\vec{x},0), \mathcal{H}(\vec{x}',0)] . \end{aligned} \tag{717}$$

- Identificirajući

$$\vec{W} = \int d^3x\vec{x}\mathcal{H}(\vec{x},0) \tag{718}$$

nalazimo da je uvjet (500) ispunjen ako je ispunjen uvjet (715). Q.E.D.

· Medjutim za ispunjenje L. inv. dovoljno je ispuniti uvjet

$$[\vec{W}, V] = \int d^3xd^3x'\ \vec{x}[\mathcal{H}(\vec{x},0), \mathcal{H}(\vec{x}',0)] = 0 . \tag{719}$$

To je nužan i dovoljan ispunjenja L. invarijantnosti.

· Napomenimo još da je upravo uvjet (717) ono što spoj Lorentz invarijantnosti i kvantne mehanike čini toliko restriktivnom.

• Bornova aproksimacija za deformirani ulazni val

- Do sada razmatrana pertubativna metoda vrijedi samo ako je V malen.
- Za slučaj kada je

$$V = V_s + V_W, \tag{720}$$

gdje je V_s jako medjudjelovanje a V_W slabo, može se primijeniti metoda Bornove aproksimacije za deformirani ulazni val. Opis te aproksimacije slijedi.
- Kao prvo definira se "in" i "out" stanje ako je V_s jedino medjudjelovanje.

$$\Psi^{\pm}_{s\alpha} = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1} V_s \Psi^{\pm}_{s\alpha} \ . \tag{721}$$

- Rabeći (721) amplituda $T^+_{\beta\alpha}$ se može napisati kao zbroj amplitude koja ovisi o slabom medjudjelovanju, jakom "out" stanju i kompletnom "in" stanju i amplitude koja ovisi o jakom medjudjelovanju, jakom "out" stanju i slobodnom "in" stanju,

$$T^+_{\beta\alpha} = (\Psi^-_{s\beta}, V_W \Psi^+_\alpha) + (\Psi^-_{s\beta}, V_s \Phi_\alpha) \ . \tag{722}$$

D:

$$\begin{aligned} T^+_{\beta\alpha} &\overset{(427)}{=} (\Phi_\beta, V\Psi^+_\alpha) \\ &\overset{(720,721)}{=} ([\Psi^-_{s\beta} - (E_\beta - H_0 - i\varepsilon)^{-1} V_s \Psi^-_{s\beta}], (V_s + V_W)\Psi^+_\alpha) \\ &= (\Psi^-_{s\beta}, V_W \Psi^+_\alpha) + (\Psi^-_{s\beta}, \underbrace{[V_s - V_s(E_\beta - H_0 + i\varepsilon)^{-1}(V_s + V_W)]\Psi^+_\alpha}_{V_s \underbrace{[1-(E_\beta - H_0 + i\varepsilon)^{-1}V]\Psi^+_\alpha}_{\Phi_\alpha}}) \qquad (723) \\ &\overset{(426)}{=} (\Psi^-_{s\beta}, V_W \Psi^+_\alpha) + (\Psi^-_{s\beta}, V_s \Phi_\alpha) \ . \qquad (724) \end{aligned}$$

- Formula (722) je najkorisnija kada je drugi član jednak nuli, tj. kada jako medjudjelovanje ne može izvršiti prijelaz $\alpha \to \beta$ (kao npr. u β-raspadu),

$$T^+_{\beta\alpha} = (\Psi^-_{s\beta}, V_W \Psi^+_\alpha) \tag{725}$$

(svi dosadašnji rezultati su egzaktni), te kada je V_W toliko slabo da se može zanemariti njegov utjecaj na Ψ^+_α ($\Psi^+_\alpha \approx \Psi^+_{s\alpha}$),

$$T^+_{\beta\alpha} = (\Psi^-_{s\beta}, V_W \Psi^+_{s\alpha}) \ . \tag{726}$$

- Rezultat (726) je valjan u prvom redu u V_W i u svakom redu u V_s. On se rabi u procesima kao što je β raspad nukleona, gdje je dio čestica definiran jakim silama.

3.6 Posljedice Unitarnosti

Popis tema :

* Optički teorem : veza $M_{\alpha\alpha}$ i σ
* Difrakcijski vrh
* Jednakost širina raspada čestice i antičestice
* Boltzmannov H teorem (nećemo raditi)

□ Optički teorem

* Unitarni uvjet

- Iz unitarnosti S matrice i izraza (468) za S matricu

$$(468) \;\equiv\; S_{\beta\alpha} \;=\; \delta(\beta-\alpha) - 2\pi i \delta(p_\beta - p_\alpha) M_{\beta\alpha}$$

slijedi

$$\begin{aligned} \delta(\gamma-\alpha) &= \int d\beta\, S^*_{\beta\gamma} S_{\beta\alpha} \;=\; \delta(\gamma-\alpha) + 2\pi i \delta^4(p_\gamma - p_\alpha) M^*_{\alpha\gamma} - 2\pi i \delta^4(p_\gamma - p_\alpha) M_{\gamma\alpha} \\ &+ 4\pi^2 \int d\beta\, \underbrace{\delta^4(p_\beta - p_\alpha)\delta^4(p_\beta - p_\gamma)}_{=\,\delta^4(p_\gamma - p_\alpha)\delta^4(p_\beta - p_\alpha)} M^*_{\beta\gamma} M_{\beta\alpha} \qquad (727) \\ \equiv 0 &= -iM_{\gamma\alpha} + iM^*_{\alpha\gamma} + 2\pi \int d\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) M^*_{\beta\gamma} M_{\beta\alpha}\Big|_{p_\gamma = p_\alpha} . \qquad (728) \end{aligned}$$

- Unitarni uvjet (728) je najkorisniji za specijalni slučaj $\alpha = \gamma$,

$$\mathrm{Im} M_{\alpha\alpha} \;=\; -\pi \int d\beta\; \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |M_{\beta\alpha}|^2 \qquad (729)$$

$*$ Veza $M_{\alpha\alpha}$ sa Γ_α i σ_α

Uporabom (729) i izraza za $d\Gamma$ (650) i $d\sigma$ (650,652),

$$(650) \;\Rightarrow\; d\Gamma(\alpha\to\beta) \;=\; (2\pi)^{3N_\alpha-2}V^{1-N_\alpha}|M_{\beta\alpha}|^2\delta^4(p_\beta-p_\alpha)d\beta, \tag{730}$$

$$(650,652) \;\Rightarrow\; d\sigma(\alpha\to\beta) \;=\; (2\pi)^4 u_\alpha^{-1}|M_{\beta\alpha}|^2\delta^4(p_\beta-p_\alpha)d\beta, \tag{731}$$

slijedi

$$\Gamma_\alpha \;=\; \int d\beta\frac{d\Gamma(\alpha\to\beta)}{d\beta} \;=\; (2\pi)^{3N_\alpha-2}V^{1-N_\alpha}\frac{-1}{\pi}\mathrm{Im}M_{\alpha\alpha}, \tag{732}$$

$$\sigma_\alpha \;=\; (2\pi)^4 u_\alpha^{-1}\frac{-1}{\pi}\mathrm{Im}M_{\alpha\alpha} \tag{733}$$

$$\equiv\; \mathrm{Im}M_{\alpha\alpha} \;=\; -\frac{u_\alpha\sigma_\alpha}{16\pi^3}\;. \tag{734}$$

$*$ $2\to2$ raspršenje i amplituda $f(\alpha\to\beta)$

- za $2\to2$ raspršenje diferencijali udarni presjek u CM sustavu glasi

$$\frac{d\sigma(\alpha\to\beta)}{d\Omega} \;\overset{(675)}{=}\; \frac{(2\pi)^4k'E_1'E_2'E_1E_2}{kE^2}|M_{\beta\alpha}|^2\;. \tag{735}$$

- zgodno je uvesti amplitudu raspršenja definiranu sa

$$f(\alpha\to\beta) \;\equiv\; -\frac{4\pi^2}{E}\sqrt{\frac{k'E_1'E_2'E_1E_2}{k}}M_{\beta\alpha} \tag{736}$$

$$\frac{d\sigma(\alpha\to\beta)}{d\Omega} \;\overset{(735,736)}{=}\; |f(\alpha\to\beta)|^2. \tag{737}$$

$*$ Elastično $2\to2$ raspršenje, optički TM

- Za elastično $2\to2$ raspršenje

$$E_1 \;=\; E_1', \qquad E_2 \;=\; E_2' \tag{738}$$

$$\Rightarrow\; f_{El}(\alpha\to\beta) \;=\; -\frac{4\pi^2E_1E_2}{E}(M_{\beta\alpha})_{El} \tag{739}$$

- posebno za $\alpha=\beta$ (raspršenje unaprijed, tj. bez raspršenja; to je specijalan slučaj el. raspršenja), ($u_\alpha=(k/E_1+k/E_2)=kE/E_1E_2$) vrijedi jednakost

$$\boxed{\mathrm{Im}f(\alpha\to\alpha)} \;=\; -\frac{4\pi^2E_1E_2}{E}ImM_{\alpha\alpha}$$

$$\overset{(734)}{=}\; \left(-\frac{4\pi^2E_1E_2}{E}\right)\left(-\frac{\overbrace{u_\alpha}^{\frac{kE}{E_1E_2}}\sigma_\alpha}{16\pi^3}\right) \;=\; \boxed{\frac{k}{4\pi}\,\sigma_\alpha,} \tag{740}$$

poznata kao optički TM.

□ Difrakcijski vrh

- Jedna od posljedica optičkog TM (740) jest postojanje jako velikog diferencijalnog udarnog presjeka u smjeru bliskom smjeru ulaznih čestica, tzv. difrakcijskog vrha. Izvod slijedi.

- Logično je pretpostaviti da je amplituda $2 \to 2$ raspršenja $f(\Omega)$ glatka (neprekidna) funkcija prostornog kuta. Stoga postoji prostorni kut $\Delta\Omega$ unutar koga $|f(\Omega)|^2$ ima približno istu vrijednost, npr. unutar faktora 2,

$$|f(\Omega)|^2 \geq \frac{1}{2}|f(\alpha \to \alpha)|^2 \qquad \text{unutar } \Delta\Omega \ . \tag{741}$$

Stoga za totalni udarni presjek σ_α vrijedi,

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha \quad &\geq \quad \sigma_\alpha^{2\to 2} \overset{(735)}{=} \int d\Omega\, |f|^2 \overset{(741)}{\geq} \frac{1}{2}|f(\alpha \to \alpha)|^2 \Delta\Omega \\ &\geq \quad \frac{1}{2}|\underbrace{\mathrm{Im} f(\alpha \to \alpha)}_{\frac{k}{4\pi}\sigma_\alpha}|^2 \Delta\Omega \ = \ \frac{k^2}{32\pi^2}\sigma_\alpha^2 \Delta\Omega \end{aligned} \tag{742}$$

$$\Delta\Omega \quad \overset{(742)}{\leq} \quad \frac{32\pi^2}{k^2 \sigma_\alpha} \ . \tag{743}$$

- Eksperiment pokazuje da totalni udarni presjek σ_α ili teži konstanti ili blago (približno logaritamski) raste sa energijom (tj. k). Stoga je prostorni kut unutar koga je diferencijani udarni presjek približno konstantan približno proporcionalan $1/k^2$, čineći istaknuti vrh u diferencijanom udarnom presjeku, tzv. difrakcijski vrh.

□ Jednakost širina raspada čestice i antičestice

- CPT invarijantnost daje jednakost S matričnih elemenata za $\alpha \to \beta$ i $\mathcal{CPT}\beta \to \mathcal{CPT}\alpha$ proces

$$S_{\beta\alpha} \quad = \quad S_{\mathcal{CPT}\alpha\, \mathcal{CPT}\beta} \ . \tag{744}$$

- Podsjetimo se da operacije $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ i $\mathcal{T}$ sadrže i promjene $p\sigma n$ kvantnih brojeva i faze,

$$P\Psi_\alpha^\pm = \Psi_{\mathcal{P}\alpha}^\pm \ \equiv \ P\Psi_{p_1\sigma_1 n_1;\,\ldots}^\pm \ = \ \begin{cases} \eta_{n_1}\Psi^\pm_{\mathcal{P}p_1\sigma_1 n_1;\,\ldots}, & M>0 \\ \eta_{n_1\sigma_1}e^{\pm i\pi\sigma}\Psi^\pm_{\mathcal{P}p_1 -\sigma_1 n_1;\,\ldots}, & M=0 \end{cases}, \tag{745}$$

$$T\Psi_\alpha^\pm = \Psi_{\mathcal{T}\alpha}^\mp \ \equiv \ T\Psi_{p_1\sigma_1 n_1;\,\ldots}^\pm \ = \ \begin{cases} \zeta_{n_1}(-1)^{j_1-\sigma_1}\Psi^\mp_{\mathcal{P}p_1 -\sigma_1 n_1;\,\ldots}, & M>0 \\ \zeta_{n_1\sigma_1}e^{\mp i\pi\sigma}\Psi^\mp_{\mathcal{P}p_1\sigma_1 n_1;\,\ldots}, & M=0 \end{cases}, \tag{746}$$

$$C\Psi^{\pm}_{\alpha} = \Psi^{\pm}_{\mathcal{C}\alpha} \; \equiv \; C\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1;\,\dots} \; = \; \xi_{n_1}\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1^c;\,\dots}, \tag{747}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow CPT\Psi^{\pm}_{\alpha} = \Psi^{\mp}_{\mathcal{CPT}\alpha} \\ &\quad \equiv \; CPT\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1;\,\dots} \; = \; \left\{ \begin{array}{ll} \eta_{n_1}\zeta_{n_1}(-1)^{j_1-\sigma_1}\xi_{n_1}\Psi^{\mp}_{p_1-\sigma_1 n_1^c;\,\dots}, & M>0 \\ \eta_{n_1\sigma_1}\zeta_{n_1\sigma_1}\xi_{n_1}\Psi^{\mp}_{p_1-\sigma_1 n_1^c;\,\dots}, & M=0 \end{array} \right. . \end{aligned} \tag{748}$$

- Iz Eq. (748) se vidi da je CPT transformacija ne mijenja 4-impuls, mijenja predznak projekcije spina (heliciteta) i mijenja česticu u antičesticu. Zbog invarijantnosti 4-impulsa na CPT čestica i antičestica imaju istu masu. Nadalje, ne mijenja se ni delta-funkcija $\delta^4(p_1' - p_1)$, pa su prema (468) jednake i amplitude M,

$$M_{\beta\alpha} \;=\; M_{\mathcal{CPT}\alpha\,\mathcal{CPT}\beta} \; . \tag{749}$$

- Posebno ako je $\alpha = \beta$ fazni faktori iz (748) se krate,

$$M_{p_1\sigma_1 n_1;\,\dots,p_1\sigma_1 n_1;\,\dots} \;=\; M_{p_1-\sigma_1 n_1^c;\,\dots,p_1-\sigma_1 n_1^c;\,\dots} \; . \tag{750}$$

Stoga su i imaginarni dijelovi tih amplituda jednaki,

$$\mathrm{Im}M_{p_1\sigma_1 n_1;\,\dots,p_1\sigma_1 n_1;\,\dots} \;=\; \mathrm{Im}M_{p_1-\sigma_1 n_1^c;\,\dots,p_1-\sigma_1 n_1^c;\,\dots} \; . \tag{751}$$

- Iz jednadžbi (751) i (732) slijedi jednakost brzina procesa $\alpha \to$ (bilo što) i $CPT\alpha \to CPT$(bilo što)

$$\Gamma_{\alpha} \;=\; \Gamma_{\mathcal{CPT}\alpha} \; . \tag{752}$$

- Posebno ako je α jednočestično stanje

$$\Gamma_{p\sigma n} \;=\; \Gamma_{p-\sigma n^c}, \tag{753}$$

tj. dobija se jednakost širina raspada jednočestičnih stanja $p\sigma n$ i $p-\sigma n^c$. Budući da u sustavu mirovanja $\vec{p} = 0$ nema smjera koji bi definirao projekciju spina pa stoga vrijedi jednakost širina raspada,

$$\Gamma_{p\sigma n} \;=\; \Gamma_{p\sigma n^c} \; . \tag{754}$$

4 Princip dekompozicije nakupina

• STRUKTURA HAMILTONIJANA H:
Po prvi puta ćemo detaljnije govoriti o strukturi H. H se može definirati zadajući sve matrične elemenate H izmedju stanja sa bilo kojim brojem čestica. Ekvivalentno H se može prikazati preko operatora stvaranja i poništenja čestica (koje su uvedene pri kanonskoj kvantizaciji polja – u uvodu).

• RAZLOG ZA UVODJENJE OPERATORA STVARANJA I PONIŠTENJA:
ako $H = \sum(a^\dagger \ldots a \ldots)\delta^3()$(nesingularni koeficijent) zadovoljen je PRINCIP DEKOMPOZICIJE NAKUPINA (CDP)
— zbog CDP se a i $a^\dagger$ uvode u (nerelativističku) kvantnu statističku mehaniku
— ispunjenje CDP i Lorentz invarijantnosti S-matrice je razlog za postojanje teorije polja (lokalnost)

4.1 Bozoni i fermioni

• **Hilbertov prostor je razapet** sa 0, 1, 2, ... **čestičnim stanjima** (analiza koja će biti ovdje iznesena vrijedi za slobodna, "in" i "out" stanja)

• Sve su čestice **ili bozoni ili fermioni**
– Promjena faze pri zamjeni identičnih čestica :

$$\Phi_{\ldots\vec{p}\,\sigma\,n\ldots\vec{p}'\,\sigma'\,n\ldots} = \pm\Phi_{\ldots\vec{p}'\,\sigma'\,n\ldots\vec{p}\,\sigma\,n\ldots}, \tag{755}$$

"$-$" za dva identična fermiona, "$+$" inače.

• **"Dokaz" da su čestice bozoni ili fermioni**

∗ Ako su u stanju **identične čestice**, onda zamjenom dvaju identičnih čestica nužno dobijamo isto stanje, tj. ta se stanja mogu razlikovati **samo u fazi**,

$$\Phi_{\ldots\vec{p}\,\sigma\,n\ldots\vec{p}'\,\sigma'\,n\ldots} = \alpha_n\Phi_{\ldots\vec{p}'\,\sigma'\,n\ldots\vec{p}\,\sigma\,n\ldots}, \tag{756}$$

(756) je zapravo definicija identičnosti čestica.

faza - o čemu može ovisiti :

∗ ne ovisi o drugim česticama (inače bi bio narušen princip dekompozicije nakupina

(CDP))
∗ može ovisiti o p, medjutim faza je broj (dakle Lorentz invarijanta), pa može ovisiti samo o skalarnim produktima $p_i \cdot p_j$; to ne mijenja konačan rezultat za α_n
∗ ne ovisi o σ (rotacijska grupa ima samo trivijalnu 1-dim rep.)
∗ može u principu ovisiti o stazi kojom smo došli u stanje - ali taj se problem javlja samo u 2 dimenzije

Stoga faza zavisi samo o stanju n, te dvostruka zamjena identičnih čestica,

$$\Phi_{\ldots\vec{p}\,\sigma\,n\ldots\vec{p}'\,\sigma'\,n\ldots} = \alpha_n^2 \Phi_{\ldots\vec{p}\,\sigma\,n\ldots\vec{p}'\,\sigma'\,n\ldots} \ , \tag{757}$$

daje $\alpha_n^2 = 1$ odnosno

$$\alpha_n = \pm 1 \ . \tag{758}$$

∗ Zamjena različitih čestica :
– moguća konvencija : slaganje po redosljedu - prvo svih fotona, pa svih protona, pa svih elektrona, itd. - nespretno
– zgodnije : uvesti konvenciju da svi fermioni antikomutiraju a svi bozoni komutiraju

• **Normalizacija**
∗ mora biti u **skladu** sa **simetrijskim uvjetima** :
∗ [notacija $q = (p\,\sigma\,n)$]
– vakuum i 1-čestično stanje : nema efekata simetrije :

$$(\Phi_0, \Phi_0) = 1, \tag{759}$$
$$(\Phi_{q'}, \Phi_q) = \delta(q - q') \ . \tag{760}$$

– kod dvočestičnih i višečestičnih stanja u normi se javljaju efekti simetrije:

$$(\Phi_{q_1' q_2'}, \Phi_{q_1 q_2}) = \delta(q_1' - q_1)\delta(q_2' - q_2) \pm \delta(q_2' - q_1)\delta(q_1' - q_2) \tag{761}$$
$$(\Phi_{q_1' q_2' \ldots q_M'}, \Phi_{q_1 q_2 \ldots q_N}), = \delta_{MN} \sum_{\mathcal{P}} \delta_{\mathcal{P}} \prod_i \delta(q_i - q'_{\mathcal{P}_i}) \ . \tag{762}$$

U Eq. (762) se negativan predznak javlja samo u slučaju dva identična fermiona, inače je predznak pozitivan. U Eq. (762) suma je preko svih permutacija cijelih brojeva 1, 2,... N. Takodjer, $\delta_{\mathcal{P}}$ je faza jednaka -1 ako $\mathcal{P}$ sadrži neparnu permutaciju fermiona, a inače je jednaka $+1$.

4.2 Operatori stvaranja i poništenja

• **Operator stvaranja** definiramo njegovim djelovanjem na stanja – **dodavat** će česticu stanju **ispred** ostalih čestica u stanju

$$a^\dagger(q)\Phi_{q_1\ldots q_N} \;=\; \Phi_{qq_1\ldots q_N} \;. \tag{763}$$

Odatle slijedi **definicija N-čestičnog stanja**

$$a^\dagger(q_1)\ldots a^\dagger(q_N)\Phi_0 \;=\; \Phi_{q_1\ldots q_N} \;. \tag{764}$$

• **Operator poništenja** : $a(q)$, hermitski pridružen operatoru $a^\dagger(q)$, **uklanja česticu iz stanja**

$$a(q)\Phi_{q_1\ldots q_N} \;=\; \sum_{r=1}^{N}(\pm)^{r-1}\delta(q-q_r)\Phi_{q_1\ldots q_{r-1}q_{r+1}\ldots q_N}, \tag{765}$$

i zbog toga se zove anihilacijski operator (operator poništenja).

Dokaz (765) :

$$\begin{aligned}(\Phi_{q'_1\ldots q'_M}, a(q)\Phi_{q_1\ldots q_N}) \;&=\; (a^\dagger(q)\Phi_{q'_1\ldots q'_M}, \Phi_{q_1\ldots q_N}) \;=\; (\Phi_{qq'_1\ldots q'_M}, \Phi_{q_1\ldots q_N}) \\ &=\; \delta_{M+1,N}\sum_{r=1}^{N}\delta(q-q_r)(\pm)^{r-1}(\Phi_{q'_1\ldots q'_M}, \Phi_{q_1\ldots q_{r-1}q_{r+1}\ldots q_N}) \\ &=\; \delta_{M+1,N}(\Phi_{q'_1\ldots q'_M}, \sum_{r=1}^{N}(\pm)^{r-1}\delta(q-q_r)\Phi_{q_1\ldots q_{r-1}q_{r+1}\ldots q_N})\end{aligned} \tag{766}$$

$\Rightarrow$ Q.E.D. (765)
• (765) $\Rightarrow$

$$a(q)\Phi_0 \;=\; 0 \;. \tag{767}$$

D :

$$(\Phi_{q_1\ldots}, a(q)\Phi_0) \;=\; (\Phi_{qq_1\ldots}, \Phi_0) \;=\; 0,$$

jer L stanje $\Phi_{qq_1\ldots}$ ima bar jednu česticu a desno niti jednu. Q.E.D

• **"Komutacijske" relacije**

Usporedbom izraza dobijenih djelovanjem operatora $a(q')a^\dagger(q)$ i $a^\dagger(q)a(q')$, na opće stanje,

$$\begin{aligned}
a(q')a^\dagger(q)\Phi_{q_1\dots q_N} &= a(q')\Phi_{qq_1\dots q_N} \\
&= \delta(q'-q)\Phi_{q_1\dots q_N} + \sum_r (\pm)^{r-1+1}\delta(q'-q_r)\Phi_{qq_1\dots q_{r-1}q_{r+1}\dots q_N}, \qquad (768)\\
a^\dagger(q)a(q')\Phi_{q_1\dots q_N} &= a^\dagger(q)\Big[\sum_r (\pm)^{r-1}\delta(q'-q_r)\Phi_{q_1\dots q_{r-1}q_{r+1}\dots q_N}\Big] \\
&= \sum_r (\pm)^{r-1}\delta(q'-q_r)\Phi_{qq_1\dots q_{r-1}q_{r+1}\dots q_N}), \qquad (769)
\end{aligned}$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
[a(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a(q') &= \delta(q-q')]\Phi_{q_1\dots q_N} \qquad \forall \Phi_{q_1\dots q_N} \qquad (770)\\
\Rightarrow\ a(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a(q') &= \delta(q-q')\ . \qquad (771)
\end{aligned}$$

Slično

$$\begin{aligned}
a^\dagger(q')a^\dagger(q)\Phi_{q_1\dots q_N} &= \Phi_{q'qq_1\dots q_N} \;=\; \pm\Phi_{qq'q_1\dots q_N} \;=\; \pm a^\dagger(q)a^\dagger(q')\Phi_{q_1\dots q_N} \\
&\Rightarrow\ [a^\dagger(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a^\dagger(q')]\Phi_{q_1\dots q_N} \;=\; 0 \qquad \forall\Phi_{q_1\dots q_N} \\
&\Rightarrow\ a^\dagger(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a^\dagger(q') \;=\; 0\ . \qquad (772)
\end{aligned}$$

Hermitskom konjugacijom (772) dobijamo

$$a(q)a(q') \mp a(q')a(q) \;=\; 0\ . \qquad (773)$$

Rezimirajmo

$$\begin{aligned}
(771) &\equiv a(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a(q') \;=\; \delta(q-q'),\\
(772) &\equiv a^\dagger(q')a^\dagger(q) \mp a^\dagger(q)a^\dagger(q') \;=\; 0,\\
(773) &\equiv a(q)a(q') \mp a(q')a(q) \;=\; 0\ . \qquad (774)
\end{aligned}$$

Gornji predznaci odgovaraju bozonskim operatorima a doljnji fermionskim.

• **Teorem : Svaki operator $\mathcal{O}$, koji djeluje u Hilbertovom prostoru "in", "out" ili slobodnih stanja, može se prikazati preko operatora stvaranja i poništenja**,

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}\int dq_1'\dots dq_N' dq_1\dots dq_M a^\dagger(q_1')\dots a^\dagger(q_N')a(q_M)\dots a(q_1)\\
&\times\ C_{NM}(q_1'\dots q_N' q_1\dots q_M)\ . \qquad (775)
\end{aligned}$$

D:
Treba pokazati da možemo izabrati koeficijente $\mathbf{C_{NM}}$ tako da **matrični elementi mogu**

poprimiti bilo koju vrijednost.
Dokaz se provodi matematičkom indukcijom :
1. Prvo pokažimo da $(\Phi_0, \mathcal{O}\Phi_0)$ može poprimiti bilo koju vrijednost.
2. Zatim pokazujemo da $\forall\ \Psi_{q'_1 \ldots q'_L}$ i $\Psi_{q_1 \ldots q_K}$ vrijedi isto tj. da $(\Psi_{q'_1 \ldots q'_L}, \mathcal{O}\Psi_{q_1 \ldots q_K})$ takodjer mogu poprimiti bilo koju vrijednost.

$*$ proizvoljnost $(\Phi_0, \mathcal{O}\Phi_0)$:

$$(\Phi_0, \mathcal{O}\Phi_0) \stackrel{(775)}{=} C_{00} \ . \tag{776}$$

Odabirom C_{00} po volji očigledno dobijamo bilo koju željenu vrijednost $(\Phi_0, \mathcal{O}\Phi_0)$.
$*$ Proizvoljnost $(\Psi_{q'_1 \ldots q'_L}, \mathcal{O}\Psi_{q_1 \ldots q_K})$:
- Pretpostavimo da smo našli koeficijente C_{NM} za $N < L$ i $M \le K$ ili $N \le L$ i $M < K$, tako da matrični elementi

$$(\Phi_{q'_1 \ldots q'_N}, \mathcal{O}\Phi_{q_1 \ldots q_M}) \tag{777}$$

imaju željene vrijednosti.
- Matrični element za kojeg ispitujemo da li može poprimiti bilo koju vrijednost ima sljedeću strukturu

$$\begin{aligned} &(\Psi_{q'_1 \ldots q'_L}, \mathcal{O}\Psi_{q_1 \ldots q_K}) && (778)\\ &= \ \delta_{L+M,N+K}[\delta_{LN}\delta_{MK}\, L!\, K!\, C_{KL}(q'_1 \ldots q'_L, q_1 \ldots q_K) \\ &+ \ (\text{članovi sa koeficijentima } C_{NM}\ N < L \text{ i } M \le K \text{ ili } N \le L \text{ i } M < K)] \ . && (779) \end{aligned}$$

Drugi sumand sadrži članove koji u kojima se kontrahira barem jedan operator poništenja iz $(\Psi_{q'_1 \ldots q'_L}|$ sa jednim operatorom stvaranja iz stanja $|\Phi_{q_1 \ldots q_M})$. Stoga njemu doprinose samo članovi sa C_{NM} $N < L$ i $M \le K$ ili $N \le L$ i $M < K$. Prvi član ne sadrži niti jednu takvu kontrakciju i proporcionalan je koeficijentu C_{LK}. Koeficijenti C_{NM} $N < L$ i $M \le K$ ili $N \le L$ i $M < K$ su fiksirani ranije, dok je C_{LK} neodredjen. Njegovim izborom može se dobiti bilo koja vrijednost matričnog elementa $(\Psi_{q'_1 \ldots q'_L}, \mathcal{O}\Psi_{q_1 \ldots q_K})$. Q.E.D.

• Komentar o NORMALNOM UREDJENJU

$*$ U izrazu za $\mathcal{O}$, (775), operatori stvaranja, $a^\dagger$ su slijeva a operatori a su s desna – drugim riječima on je NORMALNO UREDJEN.
$*$ Formula (775) vrijedi i za operatore koji nisu u normalnom uredjenju – prijelaz u normalno uredjenje daje samo članove nižeg reda i eventualno $\pm$ predznak.

• Aditivni operatori

- definicija

$$F\Phi_{q_1 \ldots q_N} \ = \ (f(q_1) + \ldots f(q_N))\Phi_{q_1 \ldots q_N} \ . \tag{780}$$

- oblik operatora koji ima svojstvo aditivnosti

$$F = \int dq a^\dagger(q) a(q) f(q) \; . \tag{781}$$

Npr. operator energije slobodne čestice glasi

$$H_0 = \int dq a^\dagger(q) a(q) E(q), \tag{782}$$

$$E(q) = \sqrt{\vec{p}^2 + m_n^2} = E(\vec{p}, \sigma, n) \; . \tag{783}$$

D aditivnosti :

$$\begin{aligned}
\int dq\; a^\dagger(q) a(q) E(q) \Phi_{q_1 \ldots q_N} &= \int dq\; E(q) a^\dagger(q) \sum_{r=1}^{N} (\pm)^{r-1} \delta(q - q_r) \Phi_{q_1 \ldots q_{r-1} q_{r+1} \ldots q_N} \\
&= \int dq\; E(q) \sum_{r=1}^{N} [(\pm)^{r-1}]^2 \delta(q - q_r) \Phi_{q_1 \ldots q_{r-1} q q_{r+1} \ldots q_N} \\
&= (E(q_1) + \ldots + E(q_N)) \Phi_{q_1 \ldots q_N} \; .
\end{aligned} \tag{784}$$

• Lorentz transformacijska svojstva operatora stvaranja i poništenja

∗ Lorentz transformacija N-čestičnog stanja

$$\begin{aligned}
& U_0(\Lambda, a) \Phi_{p_1 \sigma_1 n_1, p_2 \sigma_2 n_2, \ldots} \\
& \stackrel{(405)}{=} \left(e^{-i(\Lambda p_1) a} \ldots \right) \left(\sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0}{p_1^0}} \ldots \right) \left(\sum_{\overline{\sigma}_1 \ldots} D^{(j_1)}_{\overline{\sigma}_1 \sigma_1}(W(\Lambda, p_1)) \ldots \right) \Phi_{\Lambda p_1 \overline{\sigma}_1 n_1, \Lambda p_2 \overline{\sigma}_2 n_2, \ldots},
\end{aligned} \tag{785}$$

$$\Phi_{p_1 \sigma_1 n_1, p_2 \sigma_2 n_2, \ldots} \equiv (a^\dagger(p_1 \sigma_1 n_1) \ldots) \Phi_0 \; . \tag{786}$$

(Razlika u translacijskoj fazi u (405) i (785) : u (405) je prvo primjenjena Lorentzova transformacija pa translacija a u (785) prvo translacija pa Lorentzova transformacija.)

∗ **Vakuumsko stanje : uzima se da je vakuum inv. na svojstvene ortokrone Lorentz, P, C i T transformacije; zapravo da je invarijantan na sve transformacije**,

$$U_0(\Lambda, a) \Phi_0 = \Phi_0 \tag{787}$$

Sada možemo zaključiti

$$\begin{aligned}
U_0(\Lambda, a) \Phi_{p \sigma n} &\stackrel{(785)}{=} e^{-i(\Lambda p) a} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\overline{\sigma}} D^{(j)}_{\overline{\sigma} \sigma}(W(\Lambda, p)) \Phi_{\Lambda p \overline{\sigma} n} \\
&= U_0(\Lambda, a) a^\dagger(p \sigma n) U_0^{-1}(\Lambda, a) U_0(\Lambda, a) \Phi_0 \\
&\stackrel{(787)}{=} U_0(\Lambda, a) a^\dagger(p \sigma n) U_0^{-1}(\Lambda, a) \Phi_0
\end{aligned} \tag{788}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_0(\Lambda,a)a^\dagger(p\sigma n)U_0^{-1}(\Lambda,a) \;=\; e^{-i(\Lambda p)a}\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\overline{\sigma}} D^{(j)}_{\overline{\sigma}\sigma}(W(\Lambda,p))a^\dagger(\Lambda p\,\overline{\sigma}n)} \,. \tag{789}$$

Analogno se dokazuju relacije za C, P i T transformacije,

$$Ca^\dagger(p\sigma n)C^{-1} \overset{(747)}{=} \xi_n a^\dagger(p\sigma n^c), \tag{790}$$

$$Pa^\dagger(p\sigma n)P^{-1} \overset{(745)}{=} \eta_n a^\dagger(\mathcal{P}p\sigma n), \tag{791}$$

$$Ta^\dagger(p\sigma n)T^{-1} \overset{(746)}{=} \zeta_n(-1)^{j-\sigma}a^\dagger(\mathcal{P}p\;-\sigma n)\;. \tag{792}$$

4.3 Dekompozicija nakupina i povezane amplitude

□ **Vjerojatnosti prijelaza udaljenih** eksperimenata su **nezavisne**

$\Downarrow$

□ S **matrična teorija - princip dekompozicije nakupina :**

Ako se mnogočestični procesi $\alpha_1 \to \beta_1$, $\alpha_2 \to \beta_2$,$\ldots \alpha_{\mathcal{N}} \to \beta_{\mathcal{N}}$, zbivaju na medjusobno **udaljenim lokacijama** tada **se** S **matrica faktorizira**

$$S_{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{\mathcal{N}},\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\mathcal{N}}} \stackrel{\text{udaljenost}}{\longrightarrow} S_{\beta_1\alpha_1} S_{\beta_2\alpha_2} \ldots S_{\beta_{\mathcal{N}}\alpha_{\mathcal{N}}} \; . \tag{793}$$

□ **Matematički, kombinatorički rastav** S **matrice :**
definicija "povezanog" dijela S **matrice** (za sada nije objašnjena veza sa povezanošću S matrice)

$$S_{\beta\alpha} \;\; = \;\; \sum_{\text{PART}} (\pm) S^c_{\beta_1\alpha_1} S^c_{\beta_2\alpha_2} \ldots S^c_{\beta_{\mathcal{N}}\alpha_{\mathcal{N}}} \; . \tag{794}$$

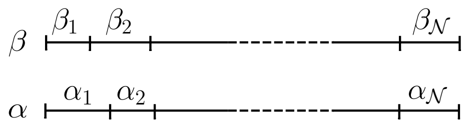


Figure 6: 4.1 Particija α i β stanja

Suma ide preko svih particija β i α stanja koje se dobivaju permutiranjem stanja unutar α ($\alpha \to \mathcal{P}_a\alpha$) odnosno β ($\beta \to \mathcal{P}_b\beta$) te zatim razdjelom na $\mathcal{N}$ posdkupova stanja. Permutacije unutar podskupova nisu bitne (podskupovi ($I = 1, \ldots, \mathcal{N}$) se npr. urede uzlazno : $n_{i_I} < n_{(i+1)_I}$). Predznak je pozitivan (negativan) ako permutacije $\mathcal{P}_a$ i $\mathcal{P}_b$ imaju paran (neparan) broj zamjena fermiona. Suma po particijama sadrži i sumu po $\mathcal{N}$ (koji nema veze sa $\mathcal{N}$ iz (793)).

$*$ Iterativnost definicije
$\cdot$ povezani dijelovi amplitude se definiraju iterativno po nekom principu: prvo za vakuum, pa za jednočestično stanje itd. Napomenimo da se po definiciji povezana amplituda ne može prikazati kao produkt druge dvije amplitude.
$\cdot$ Općenito povezana amplituda za prijelaz $\alpha \to \beta$ $S^c_{\beta\alpha}$ dana je sa

$$S_{\beta\alpha} \;\; = \;\; S^c_{\beta\alpha} + {\sum_{PART}}' (\pm) S^c_{\beta_1\alpha_1} S^c_{\beta_2\alpha_2} \ldots , \tag{795}$$

gdje su amplitude $S^c_{\beta_1\alpha_1}$ definirane prethodno iterativnom procedurom po nekom danom principu.

· Npr. uz **pretpostavku da je broj čestica sačuvan** vrijede sljedeće iterativne definicije povezanih amplituda
- vakuum

$$S_{00} \;=\; 1, \qquad S^c_{00} \;=\; 0\ ; \tag{796}$$

- jednočestična stanja

$$S_{q'q} \;=\; \delta(q'-q) \;=\; S^c_{q'q}\ ; \tag{797}$$

- dvočestično stanje

$$S_{q_1'q_2'q_1q_2} \;=\; S^c_{q_1'q_2'q_1q_2} + (\delta(q_1'-q_1)\delta(q_2'-q_2) \pm \delta(q_1'-q_2)\delta(q_2'-q_1))\ ; \ldots \tag{798}$$

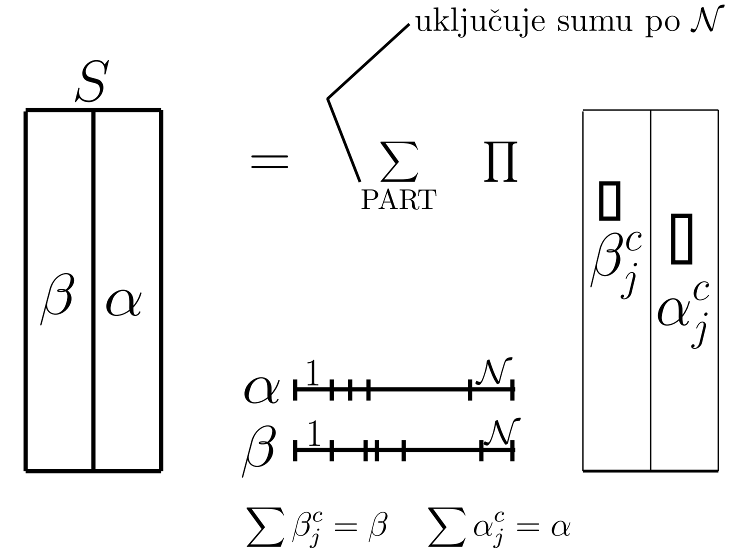
Uočiti da vakuumska amplituda po definciji ne može biti povezana, da je po definiciji amplituda jednočestičnog stanja povezana, te da se iterativnost definicije povezane amplitude javlja po prvi puta u dvočestičnom stanju (delta funkcije su povezane amplitude ukupne amplitude jednočestičnih stanja).

□ TM o principu dekompozicije nakupina.

Teorem : Princip dekompozicije nakupina za S matricu (A) ekvivalentan je zahtjevu da $S^c_{\beta\alpha} \to 0$ ako se bilo koja čestica iz $\alpha+\beta$ nastoji izdvojiti i udaljiti u beskonačnost (B).

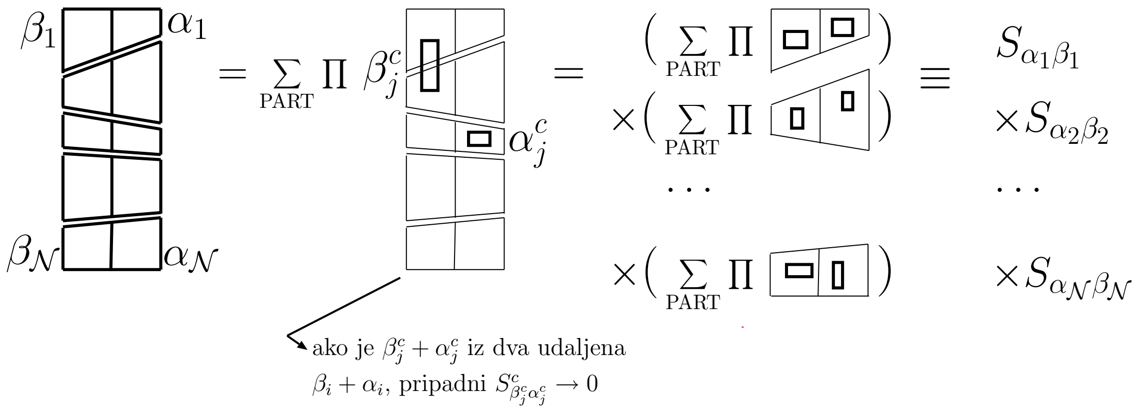
$$\begin{aligned} &S_{\beta_1+\beta_2+\ldots,\alpha_1+\alpha_2+\ldots} \xrightarrow{d[\alpha_i+\beta_i,\alpha_j+\beta_j]\to\infty} S_{\beta_1\alpha_1}S_{\beta_2\alpha_2}\ldots S_{\beta_\mathcal{N}\alpha_\mathcal{N}} \\ &\Leftrightarrow\ S^c_{\beta_i\alpha_i} \xrightarrow{q\in(\beta_i+\alpha_i)\to\infty} 0 \end{aligned} \tag{799}$$

(794) $\equiv$



(800)

(793) $\equiv$



(801)

Nužnost (A$\Leftarrow$B) : Uvjet TM vrijedi za svaki S^c matrični element, specijalno za $S^c_{\beta_{ij}\alpha_{ij}}$

$$S^c_{\beta_j\alpha_j} \xrightarrow{q\in(\beta_j+\alpha_j)\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow \quad S_{\beta\alpha} \;=\; (\sum_{PART}\prod S^c_{\beta^c_{1j}\alpha^c_{1j}})\dots(\sum_{PART}\prod S^c_{\beta^c_{\mathcal{N}j}\alpha^c_{\mathcal{N}j}}) \;=\; S_{\beta_1\alpha_1}\dots S_{\beta_{\mathcal{N}}\alpha_{\mathcal{N}}} \quad Q.E.D. \tag{802}$$

Dovoljnost (A$\Rightarrow$B):

$$S_{\beta\alpha} \;=\; S_{\beta_1\alpha_1}\dots S_{\beta_{\mathcal{N}}\alpha_{\mathcal{N}}} \;=\; (\sum_{PART}\prod S^c_{\beta^c_{1j}\alpha^c_{1j}})\dots(\sum_{PART}\prod S^c_{\beta^c_{\mathcal{N}j}\alpha^c_{\mathcal{N}j}})\;; \tag{803}$$

(803) $\Rightarrow$ nema matričnog elemenata $S^c_{\beta_j^c\alpha_j^c}$ sa elementima u dva $\alpha_i + \beta_i$
$\Rightarrow S^c_{\beta_j^c\alpha_j^c} \to 0$ ako se bilo koji element $\alpha_j^c + \beta_j^c$ izdvoji i ode u beskonačnost. Q.E.D

□ Princip dekompozicije nakupina u impulsnom prostoru

$*$ gledamo već kroz ekvivalentni uvjet za ostvarenje principa dekompozicije nakupina,

$$S^c_{\beta_i\alpha_i} \xrightarrow{q\in(\beta_i+\alpha_i)\to\infty} 0 \;. \tag{804}$$

Analiziramo $S^c_{\beta_i\alpha_i}$ u $\vec{p}$ prostoru:

$$S^c_{\vec{x}_1'\vec{x}_2'\dots;\vec{x}_1\vec{x}_2\dots} \;\equiv\; \int (d^3p_1'\dots)(d^3p_1\dots)S^c_{\vec{p}_1'\vec{p}_2'\dots;\vec{p}_1\vec{p}_2\dots}(e^{i\vec{p}_1'\vec{x}_1'}\dots)(e^{i\vec{p}_1\vec{x}_1}\dots)\;; \tag{805}$$

- Pokušaj 1 :
Pretpostavimo da je $S^c_{\vec{p}'_1\vec{p}'_2\ldots;\vec{p}_1\vec{p}_2\ldots}$ Lebesgue integrabilna funkcija argumenata. Tada za bilo koju kombinaciju $\{\vec{x}'_i \to \infty\}, \{\vec{x}_i \to \infty\}$ $S^c_{\vec{x}'_1\vec{x}'_2\ldots;\vec{x}_1\vec{x}_2\ldots} \to 0$. To je očigledno prejak uvjet jer istovremena translacija svih koordinata za isti iznos ne smije mijenjati amplitudu zbog translacijske invarijantnosti.

- Pokušaj 2 :
Pretpostavimo da vrijedi translacijska invarijantnost. To je ekvivalentno uvjetu da $S^c_{\vec{x}'_1\vec{x}'_2\ldots;\vec{x}_1\vec{x}_2\ldots}$ ne ovisi o jednoj od koordinata (npr. x_1 ili koordinati "težišta" $\vec{x}_c$),

$$S^c_{x-prostor} = S^c_{\vec{x}'_1-\vec{x}_c,\ldots;\vec{x}_1-\vec{x}_c\ldots} . \tag{806}$$

Odatle slijedi da je F.T. proporcionalan δ-funkciji,

$$\begin{aligned} S^c_{p-prostor} &\equiv S^c_{\vec{p}'_1\vec{p}'_2\ldots;\vec{p}_1\vec{p}_2\ldots} \\ &\propto \delta^3((\vec{p}'_1+\vec{p}'_2+\ldots)-(\vec{p}'_1+\vec{p}'_2+\ldots)), \end{aligned} \tag{807}$$

isto kao ukupna S matrica.

Nadalje, može se zaključiti da je $S^c_{p-prostor}$ proporcionalan δ-funkciji koja čuva energiju. Naime, za S matricu vrijedi zakon sačuvanja energije, ali taj izvod vrijedi ne samo za ukupan prijelaz $\alpha \to \beta$ (dakle za $S_{\beta\alpha}$) nego i za svaki par podstanja $\alpha_i \to \beta_i$ (dakle i $S_{\alpha_i\beta_i}$) koji ne medjudjeluju sa ostalim dijelovima ukupnog početnog (α) i konačnog (β) stanja (po izvodu, stanja koja medjudjeluju zadovoljavaju barem zakon sačuvanja energije; ako ne medjudjeluju pored energije čuvaju sve kvantne brojeve). Stoga,

$$S^c_{p-prostor} \propto \delta((E'_1+E'_2+\ldots)-(E_1+E_2+\ldots)) . \tag{808}$$

Stoga

$$\begin{aligned} S^c_{\vec{p}'_1,\ldots;\vec{p}_1,\ldots} &= \delta^3((\vec{p}'_1+\vec{p}'_2+\ldots)-(\vec{p}'_1+\vec{p}'_2+\ldots)) \\ &\times\ \delta((E'_1+E'_2+\ldots)-(E_1+E_2+\ldots))C_{\vec{p}'_1,\ldots;\vec{p}_1,\ldots} . \end{aligned} \tag{809}$$

- provjera : integracija po $d^3p'_1$ u (805) vodi na ovisnost $S^c_{\vec{x}'_1\vec{x}'_2\ldots;\vec{x}_1\vec{x}_2\ldots}$ o razlikama $\vec{x}'_i - \vec{x}'_1$ i $\vec{x}_i - \vec{x}'_1$.
- **Neovisnost o još jednoj od koordinata?**
Neovisnost o još jednoj od koordinata bi vodila na mogućnost odvajanja dva dijela $\alpha+\beta$ čestica relativno u beskonačnost. To nije moguće zbog uvjeta (804). Nadalje, to bi značilo da funkcija $C_{\vec{p}'_1,\ldots;\vec{p}_1,\ldots}$ ima još jednu impulsnu δ f-ju.

$\Rightarrow$ $C_{\vec{p}'_1,\ldots;\vec{p}_1\ldots}$ ne smije sadržavati δ f-ju zbog CDP.
$\Rightarrow$ $S^c_{\vec{p}'_1,\ldots;\vec{p}_1\ldots}$ mora sadržavati jednu i samo jednu δ f-ju zbog CDP.

Napomena : $C_{\vec{p}'_1,\ldots;\vec{p}_1,\ldots}$ nije nužno analitička. Ona može sadržavati polove i rezove, ali ne singularitete tipa δ-funkcije.

4.4 Struktura Hamiltonijana medjudjelovanja

∗ **PITANJE** : Kako mora izgledati Hamiltonijan da bi dobili S matricu koja zadovoljava princip dekompozicije nakupina.

∗ Hamiltonijan : **opća struktura bilo kojeg operatora**

$$\begin{aligned} H &= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}\int dq'_1\ldots dq'_N dq_1\ldots dq_M \\ & a^\dagger(q'_1)\ldots a^\dagger(q'_N)a(q_M)\ldots a(q_1)h_{NM}(q'_1\ldots q'_N,q_1\ldots q_M)\;. \end{aligned} \tag{810}$$

• **TEOREM :** S-matrica zadovoljava princip dekompozicije nakupina ako (i koliko je Weinbergu poznato samo ako) Hamiltonijan ima oblik (810) **sa koeficijentnom funkcijom h_{NM} koja sadrži samo jednu 3-D δ funkciju**. Eksplicite,

$$\begin{aligned} & h_{NM}(\vec{p}'_1\sigma'_1 n'_1\ldots\vec{p}'_N\sigma'_N n'_N,\vec{p}_1\sigma_1 n_1\ldots\vec{p}_M\sigma_M n_M) \\ &= \delta(\vec{p}'_1+\ldots\vec{p}'_N-\vec{p}_1-\ldots-\vec{p}_M) \\ &\times \tilde{h}_{NM}(\vec{p}'_1\sigma'_1 n'_1\ldots\vec{p}'_N\sigma'_N n'_N,\vec{p}_1\sigma_1 n_1\ldots\vec{p}_M\sigma_M n_M), \end{aligned} \tag{811}$$

gdje $\tilde{h}_{NM}$ ne sadrži niti jednu δ funkciju.

☐ Dokaz TM :

∗ Rabimo vremenski ovisan račun smetnje. Kod njega se faktori koji odgovaraju zbroju energija množe (e^{iEt}), za razliku od od faktora $1/(E-E_\alpha+i\varepsilon)$ koji nemaju to svojstvo.

∗ S matricu prikazujemo preko Dysonove formule (705),

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \sum_0^\infty \frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\ldots dt_n(\overbrace{\Phi_\beta,}^{\Phi_0,\prod a}\; T\{\overbrace{V(t_1)}^{\sum\prod a^\dagger\prod a()}\;\ldots\;\overbrace{V(t_n)}^{\sum\prod a^\dagger\prod a()}\}\overbrace{\Phi_\alpha}^{\prod a^\dagger\Phi_0}), \\ V(t) &\equiv e^{iH_0 t}Ve^{-iH_0 t}, \qquad H = H_0+V\;. \end{aligned} \tag{812}$$

Stanja i Hamiltonijan medjudjelovanja se mogu izraziti preko op. stvaranja i poništenja (izraz (812) za S je napisan formalno, samo da se istakne njegov sadržaj op. stvaranja i poništenja)

$$\Phi_\alpha = \left(\prod_{q\in\alpha}a_q^\dagger\right)\Phi_0, \qquad \Phi_\beta = \left(\prod_{q\in\beta}a_q^\dagger\right)\Phi_0, \tag{813}$$

$$V \supseteq \sum(\ldots)(\prod a^\dagger)(\prod a)\;. \tag{814}$$

∗ **komutacijske relacije :** "pomičemo" a-ove na desno prema Φ_0 Φ_α-stanja i $a^\dagger$-ove na lijevo prema Φ_0 Φ_β-stanja. Pri tome uporabom komutacijskih (antikomutacijskih) pravila,

$$a(q')a^\dagger(q) \;=\; \pm a^\dagger(q)a(q') + \delta(q'-q)\ . \tag{815}$$

a ($a^\dagger$) daje $\delta(q-q')$ doprinose sve dok ne dosegne vakuumsko stanje, kada daje nulu ($\phi_0 a^\dagger = 0$; $a\phi_0 = 0$).

$\Rightarrow$ konačan rezultat sadrži samo δ-funkcije od komutacijskih relacija, δ funkcije iz h_{NM}-ova, $\tilde{h}_{NM}$-ove te integracije i sume iz V-ova i integracije iz definicije S matrice. Formalno prikazano,

$$S_{\beta\alpha} \;=\; \underbrace{\sum\int}_{S_{\beta\alpha}} \underbrace{\left(\text{"}\sum\int \tilde{h}_{NM}\delta\left(\sum p' - \sum p\right)\text{"}\right)}_{V-ovi:\ fu-dio} \underbrace{\left(\sum\prod \delta(q-q')(\pm)\right)}_{V-ovi,\Phi_\alpha,\Phi_\beta:\ kombinatorika\ a,a^\dagger}\ . \tag{816}$$

∗ **Grafički prikaz matričnih elemenata** $S_{\beta\alpha}$ Svaki od članova u sumi (816) može se prikazati dijagramom (nije još Feynmanov dijagram jer se ne pridjeluju faktori elementima i gledaju se samo 3-D δ-fje). Svakom Hamiltonijanu $V(t)$ se pridjeljuje točka. Početnom (Φ_α) i konačnom (Φ_β) stanju se pridjeluju plohe (točke, linije) u $t=-\infty$ odnosno $t=\infty$. δ-funkcijama nastalim (anti)komutacijom operatora stvaranja i poništenja se pridjeluju linije koje povezuju objekte (V-ove, Φ_α, Φ_β) odakle dolaze pripadni operatori stvaranja tj. poništenja. Primjeri dijagrama dani su na Slici 3.

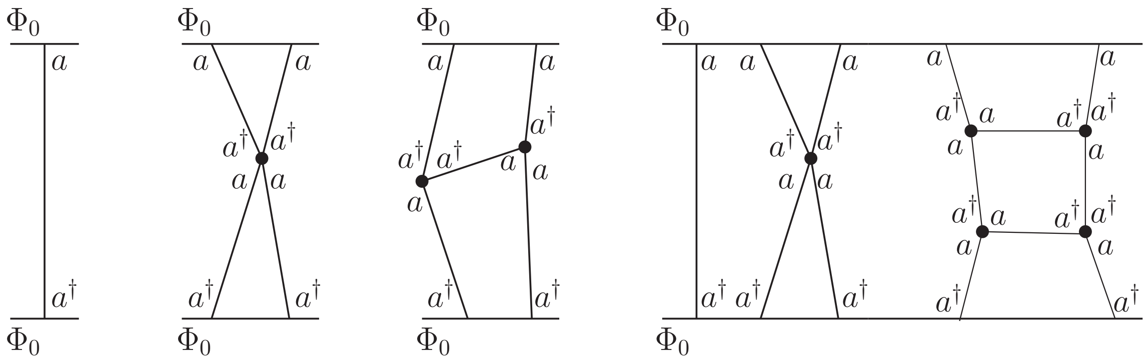


Figure 7: Primjeri dijagrama

Slika (a) prikazuje slučaj kada nema medjudjelovanja. I početno i konačno stanje su jednočestična stanja.
Slika (b) prikazuje slučaj sa jednim medjudjelovanjem koje nosi dva operatora stvaranja i

dva operatora poništenja. Početno i konačno stanje su dvočestična. Dijagram je povezan. Slika (c) prikazuje ponovno povezani dijagram, ali sada sa dva medjudjelovanja. Jedno od njih ima dva operatora stvaranja i jedan operator poništenja, a drugo dva operatora poništenja i jedan operator stvaranja. Početno i konačno stanje su dvočestična.
Slika (d) prikazuje primjer nepovezanog dijagrama sa nekoliko nezavisnih dijelova. Prvi odgovara slučaju (a), drugi slučaju (b) a treći složenijem dijagramu.

· Slika (d) ilustrira što se dešava u generalnom slučaju :
- Vrhovi se grupiraju (particioniraju) u skupine koje medjusobno medjudjeluju.
- Vrhovi nepovezanih dijelova dijagrama medjusobno komutiraju.
- Početno i konačno stanje se raspada (particionira) na podstanja koja su povezana sa nekom od grupa medjudjelujućih vrhova.

□ Prikaz amplitude $S_{\beta\alpha}$ preko njenih povezanih dijelova

$*$ $(\Phi_\beta, T(V(t_1)\ldots V(t_n))\Phi_\alpha)$

- Prema gornjoj raspravi matrični elementi iz (812) $(\Phi_\beta, T(V(t_1)\ldots V(t_n))\Phi_\alpha)$ sadrže sumu doprinosa koji odgovaraju tvorbama svih rastava vremenski uredjenog produkta vrhova, početnog i konačnog stanja danog matričnog elementa na isti broj dijelova (ν), i povezivanjem vrhova i dijelova poč i kon. stanja $i-tog$ člana (povezana nakupina = pn)

$$(\Phi_\beta, T(V(t_1)\ldots V(t_n))\Phi_\alpha) = \sum_{pn}(\pm)\prod_{j=1}^{\nu}(\Phi_{\beta_j}, T(V(t_{j_1})\ldots V(t_{j_{n_j}})\Phi_{\alpha_j})_c \tag{817}$$

$$(\nu \text{ povezanih dijelova} \sim \{n_1,\alpha_1,\beta_1\} + \ldots\{n_\nu,\alpha_\nu,\beta_\nu\})\ . \tag{818}$$

- povezani članovi $\{n_i,\alpha_i,\beta_i\}$ ne moraju nužno biti ostvarivi, tj. mogu davati doprinos 0; zbog toga je $\prod_\nu$ neovisan o sumama; preživljavaju samo doprinosi u kojima su svi članovi u produktu (817) različiti od 0.
- $\pm$ predznak dolazi zbog permutacija fermionskih čestica poč. i kon. stanja da bi se dobila stanja $\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu$ i $\beta_1+\ldots+\beta_\nu$.
- indeks "c" označava da je i-ti matrični-podelement povezan.
- rastavi $n_1+\ldots+n_\nu$ (vrhova), $\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu$ i $\beta_1+\ldots+\beta_\nu$ su medjusobno nezavisni,

$$\sum_{pn}(\pm) = \sum_{part\ stanja}(\pm)\sum_{\substack{n_1\ldots n_\nu \\ n_1+\ldots n_\nu=n}}\ . \tag{819}$$

$*$ $S_{\beta\alpha}$

- sumacija i integracija po vremenskim koordinatama u $S_{\beta\alpha}$ (812) koja je ispred matričnog

elementa (817) komutira sa sumom $\sum_{part\ stanja}(\pm)$.
- zbog integracije po vremenskim koordinatama se $V(t_i)$ ne mogu razlikovati, što daje dodatni statistički faktor koji opisuje rastav n identičnih veličina na ν dijelova (samo se tu javlja produkt po ν),

$$\frac{n!}{\prod_{j=1}^{\nu} n_j!} \; . \tag{820}$$

- sumacije u S i suma po n_i-ovima uz konstantan n se kombinira u produkt suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \sum_{\substack{n_1 \ldots n_\nu \\ n_1 + \ldots + n_\nu = n}} \frac{n!}{\prod_i n_i!} \;\rightarrow\; \prod_{j=1}^{\nu} \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n_j}}{n_j!} \; . \tag{821}$$

Upotrebom gore navedenih komentara dobijamo sljedeći izraz za $S_{\beta\alpha}$

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \sum_{part\ stanja} (\pm) \sum_{\substack{n_1 \ldots n_\nu \\ n_1 + \ldots n_\nu = n}} \prod_{j=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j_1} \ldots dt_{j_{n_j}} \\ &\times \; (\Phi_{\beta_j}, T(V(t_{j_1}) \ldots V(t_{j_{n_j}}) \Phi_{\alpha_j})_c \, \frac{n!}{\prod_{j=1}^{\nu} n_j!} \\ &= \sum_{part\ stanja} (\pm) \prod_{j=1}^{\nu} \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n_j}}{n_j!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j_1} \ldots dt_{j_{n_j}} (\Phi_{\beta_j}, T(V(t_{j_1}) \ldots V(t_{j_{n_j}})) \Phi_{\alpha_j})_c \\ &= \sum_{part\ stanja} (\pm) \prod_{j=1}^{\nu} S^c_{\beta_j \alpha_j}, \end{aligned} \tag{822}$$

$$S^c_{\beta_j \alpha_j} \;\equiv\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j_1} \ldots dt_{j_{n_j}} (\Phi_{\beta_j}, T(V(t_{j_1}) \ldots V(t_{j_{n_j}})) \Phi_{\alpha_j})_c \; . \tag{823}$$

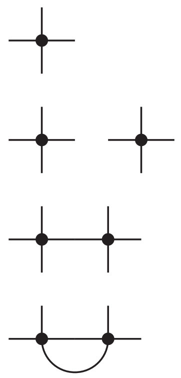
$*$ Prema Eq. (809) i objašnjenju ispod te jedn. S^c može imati jednu i samo jednu $\delta^3(\sum \vec{p}_f - \sum \vec{p}_i)$ funkciju. Stoga je preostalo provjeriti da li je to ispunjeno.
Svaki vrh nosi jednu δ^3 funkciju. Svaka unutarnja linija (propagator) daje jednu integraciju po unutarnjim impulsima. Svaka zatvorena petlja čini jedan od impulsa neodredjenim, pa takva integracija ne poništava δ^3-fj-u. Stoga je broj δ-funkcija D jednak

$$D \;=\; V - I + L \; . \tag{824}$$

Postoji **topološki teorem koji povezuje broj vrhova V, broj unutarnjih linija I broj petlji L i broj povezanih dijelova dijagrama C** :

$$C \;=\; V - I + L \;. \tag{825}$$

Primjeri koji ilustriraju TM su prikazani na slici:



$C = 1 \quad V = 1 \quad I = 0 \quad L = 0$

$C = 2 \quad V = 2 \quad I = 0 \quad L = 0$

$C = 1 \quad V = 2 \quad I = 1 \quad L = 0$

$C = 1 \quad V = 2 \quad I = 2 \quad L = 1$

Figure 8: Topološki teorem

Očigledno je broj delta-funkcija jednak broju povezanih dijelova dijagrama.

$$C \;=\; D \;. \tag{826}$$

Za povezani dijagram broj povezanih dijelova dijagrama je $C \;=\; 1$. Stoga je za njega broj δ-funkcija, $D \;=\; 1$. Drugim riječima S^c ima samo jednu δ^3-fju. Q.E.D.
Time je dokazan i CDP za S matricu sa Hamiltonijanom (811). Q.E.D.

5 KVANTNA POLJA I ANTIČESTICE

• Teme ovog poglavlja:

∗ konstrukcija slobodih polja

∗ posljedice ujedinjenja QM i relativnosti:
- veza spina i statistike (spin-statistika TM)
- postojanje i razlog postojanja antičestica
- CPT teorem

5.1 Slobodna polja

• Podsjetnik svojstava S-matrice:

1. Uvjeti Lorentz invarijantnost S-matrice

S matrica je Lorentz invarijantna ako se Hamiltonijan medjudjelovanja može napisati kao integral gustoće Hamiltonijana medjudjelovanja koji je Lorentzov skalar,

$$
\begin{aligned}
(707) \quad &\equiv \quad V(t) \;=\; \int d^3x \mathcal{H}(\vec{x}, t), && (827) \\
(708) \quad &\equiv \quad U_0(\Lambda, a)\mathcal{H}(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) \;=\; \mathcal{H}(\Lambda x + a), && (828)
\end{aligned}
$$

i koja zadovoljava dodatni uvjet

$$
(715) \quad \equiv \quad [\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] \;=\; 0 \qquad \text{za } (x - x')^2 > 0 \; . \qquad (829)
$$

2. Princip dekompozicije nakupina (CDP)

Hamiltonijan medjudjelovanja (i slobodni Hamiltonijan) se kao i svaki operator može prikazati preko operatora stvaranja i poništenja,

$$
\begin{aligned}
(810) \;\equiv\; V \;=\; &\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty} \int dq_1' \ldots dq_N' dq_1 \ldots dq_M \\
&a^\dagger(q_1') \ldots a^\dagger(q_N') a(q_M) \ldots a(q_1) h_{NM}(q_1' \ldots q_N', q_1 \ldots q_M) \; . \qquad (830)
\end{aligned}
$$

Medjutim S matrica zadovoljava dodatni uvjet, princip dekompozicije nakupina (793), iz kojeg proizlazi da koeficijentne funkcije Hamiltonijana h_{NM} imaju jednu i samo jednu δ^3-funkciju,

$$\begin{aligned}(811) \equiv h_{NM}(\vec{p}_1'\sigma_1'n_1' \ldots \vec{p}_N'\sigma_N'n_N', \vec{p}_1\sigma_1 n_1 \ldots \vec{p}_M\sigma_M n_M) \\ = \delta(\vec{p}_1' + \ldots \vec{p}_N' - \vec{p}_1 - \ldots - \vec{p}_M) \\ \times \tilde{h}_{NM}(\vec{p}_1'\sigma_1'n_1' \ldots \vec{p}_N'\sigma_N'n_N', \vec{p}_1\sigma_1 n_1 \ldots \vec{p}_M\sigma_M n_M) \; . \end{aligned} \tag{831}$$

□ **Problem :**
Transformacijska svojstva operatora stvaranja i poništenja su komplicirana,

$$(789) \equiv U_0(\Lambda, a)a^\dagger(p\sigma n)U_0^{-1}(\Lambda, a) = e^{-i(\Lambda p)a}\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\overline{\sigma}} D^{(j)}_{\overline{\sigma}\sigma}(W(\Lambda, p))a^\dagger_{\Lambda p\overline{\sigma}n}, \tag{832}$$

pa na prvi pogled izgleda da nije moguće zadovoljiti istovremeno raspis Hamiltonijana medjudjelovanja preko operatora stvaranja i poništenja i Lorentz invarijantnost S matrice.
- Napomena : u daljnjem razmatranju će Lorentzove transformacije Λ uključivati svojstvene ortokrone L.T ili će još dodatno uključivati paritetnu simetriju.

• Rješenje problema : POLJA

$*$ Lorentz transformacija polja

- Problem se rješava tako da se gustoća Hamiltonijana $\mathcal{H}(x)$ izgradjuje od polja - polja poništanja (čestica) $\psi_\ell^+(x)$ i polja stvaranja (čestica) $\psi_\ell^-(x)$,

$$\psi_\ell^+(x) = \sum_{\sigma n} \int d^3p \; u_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)a(\vec{p}, \sigma, n), \tag{833}$$

$$\psi_\ell^-(x) = \sum_{\sigma n} \int d^3p \; v_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)a^\dagger(\vec{p}, \sigma, n), \tag{834}$$

sa koeficijentima $u_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$ i $v_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$ odabranim tako da se pri Lorentzovim transformacijama polja množe sa x-neovisnim matricama,

$$U_0(\Lambda, a)\psi_\ell^+(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) = \sum_{\overline{\ell}} D_{\ell\overline{\ell}}(\Lambda^{-1})\psi_{\overline{\ell}}^+(\Lambda x + a), \tag{835}$$

$$U_0(\Lambda, a)\psi_\ell^-(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) = \sum_{\overline{\ell}} D_{\ell\overline{\ell}}(\Lambda^{-1})\psi_{\overline{\ell}}^-(\Lambda x + a), \tag{836}$$

(stavili smo jednake $D^\pm$ matrice za ψ_ℓ^+ i ψ_ℓ^- polja jer se može se pokazati da se uvijek mogu odabrati polja tako da su te matrice jednake).

$*$ Svojstva D matrica

- D matrice tvore reprezentaciju homogene Lorentzove grupe
D:
Rabeći izraz za produkt dvaju Poincaréovih transformacija (vidi Tab 1.),

$$U(\Lambda', a')U(\Lambda, a) \;=\; U(\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a'), \tag{837}$$

i transformacijska svojstva polja (835) i (836) nalazimo

$$\begin{aligned}
U(\Lambda', a')U(\Lambda, a) \;:\; \psi^{\pm}_{\ell}(x) &\;\to\; \sum_{\bar{\bar\ell}\bar\ell} D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1}) D_{\bar\ell\bar{\bar\ell}}(\Lambda'^{-1}) \psi^{\pm}_{\bar{\bar\ell}}(\Lambda'\Lambda x + \Lambda' a + a') \\
&\stackrel{(837)}{\to}\; \sum_{\bar{\bar\ell}} D_{\ell\bar{\bar\ell}}((\Lambda'\Lambda)^{-1}) \psi^{\pm}_{\bar{\bar\ell}}(\Lambda'\Lambda x + \Lambda' a + a') \\
\Rightarrow \sum_{\bar\ell} D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1}) D_{\bar\ell\bar{\bar\ell}}(\Lambda'^{-1}) &\;=\; D_{\ell\bar{\bar\ell}}(\Lambda^{-1}\Lambda'^{-1}) \\
\Rightarrow D(\Lambda_1\Lambda_2) &\;=\; D(\Lambda_1) D(\Lambda_2) \qquad \text{Q.E.D.}
\end{aligned} \tag{838}$$

- Moguće ireducibilne reprezezentacije $D(\Lambda)$ (homogene Lorentzove grupe) : skalarna $D(\Lambda) = 1$, vektorska $D(\Lambda)^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$, te razne tenzorske i spinorne reprezentacije (vidi poslije).
- Razmatranja u ovom poglavlju vrijede i za reducibilne reprezentacije homogene Lorentzove grupe.
- **Napomena :** uočiti da polja čine reprezentacije **Lorentzove grupe** a ne Poincaréove grupe.

• Lorentz invarijantna gustoća Hamiltonijana

- Opći oblik gustoće Hamiltonijana izgradjena preko polja je

$$\mathcal{H}(x) \;=\; \sum_{MN} \sum_{\ell'_1 \ldots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \ldots \ell_M} g_{\ell'_1 \ldots \ell'_N, \ell_1 \ldots \ell_M} \psi^{-}_{\ell'_1}(x) \ldots \psi^{-}_{\ell'_N}(x) \psi^{+}_{\ell_1}(x) \ldots \psi^{+}_{\ell_M}(x), \tag{839}$$

gdje su $g_{\ell'_1 \ldots \ell'_N, \ell_1 \ldots \ell_M}$ konstantni koeficijenti.
- Uvjet skalarnosti gustoće Hamiltonijana (708,828) daje dodatni uvjet na koeficijente $g_{\ell'_1 \ldots \ell'_N, \ell_1 \ldots \ell_M}$,

$$\begin{aligned}
g_{\bar\ell'_1 \ldots \bar\ell'_N, \bar\ell_1 \ldots \bar\ell_M} \;=\; & \sum_{\ell'_1 \ldots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \ldots \ell_M} D_{\ell'_1\bar\ell'_1}(\Lambda^{-1}) \ldots D_{\ell'_N\bar\ell'_N}(\Lambda^{-1}) \\
& \times D_{\ell_1\bar\ell_1}(\Lambda^{-1}) \ldots D_{\ell_M\bar\ell_M}(\Lambda^{-1}) g_{\ell'_1 \ldots \ell'_N, \ell_1 \ldots \ell_M} \;.
\end{aligned} \tag{840}$$

D:

$$
\begin{aligned}
L &\equiv \mathcal{H}(\Lambda x+a) \stackrel{(828)}{=} U_0(\Lambda,a)\mathcal{H}(x)U_0^{-1}(\Lambda,a) = D \\
L &= \sum_{MN}\sum_{\overline{\ell}'_1\ldots\overline{\ell}'_N}\sum_{\overline{\ell}_1\ldots\overline{\ell}_M} \\
& \quad g_{\overline{\ell}'_1\ldots\overline{\ell}'_N,\overline{\ell}_1\ldots\overline{\ell}_M} \\
& \quad \psi^-_{\overline{\ell}'_1}(\Lambda x+a)\ldots\psi^-_{\overline{\ell}'_N}(\Lambda x+a)\psi^+_{\overline{\ell}_1}(\Lambda x+a)\ldots\psi^+_{\overline{\ell}_M}(\Lambda x+a) \qquad (841)\\
D &= \sum_{MN}\sum_{\ell'_1\ldots\ell'_N}\sum_{\ell_1\ldots\ell_M}\sum_{\overline{\ell}'_1\ldots\overline{\ell}'_N}\sum_{\overline{\ell}_1\ldots\overline{\ell}_M} \\
& \quad D_{\ell'_1\overline{\ell}'_1}(\Lambda^{-1})\ldots D_{\ell'_N\overline{\ell}'_N}(\Lambda^{-1})D_{\ell_1\overline{\ell}_1}(\Lambda^{-1})\ldots D_{\ell_M\overline{\ell}_M}(\Lambda^{-1})g_{\ell'_1\ldots\ell'_N,\ell_1\ldots\ell_M} \\
& \quad \psi^-_{\overline{\ell}'_1}(\Lambda x+a)\ldots\psi^-_{\overline{\ell}'_N}(\Lambda x+a)\psi^+_{\overline{\ell}_1}(\Lambda x+a)\ldots\psi^+_{\overline{\ell}_M}(\Lambda x+a) \qquad (842)
\end{aligned}
$$

$$(828,841,842) \Rightarrow (840) \qquad \text{Q.E.D.} \qquad (843)$$

S uvjetom (840) koeficijenti $g_{\ell'_1\ldots\ell'_N,\ell_1\ldots\ell_M}$ postaju CG koeficijenti za Lorentzovu grupu.

• **Nalaženje koeficijentnih funkcija** $u_\ell(x;\vec{p},\sigma,n)$**,** $v_\ell(x;\vec{p},\sigma,n)$ **za** $M>0$

□ **Opće Poincaréove transformacije**

(Napomena : koeficijenti za $M=0$ bit će nadjeni u poglavlju §5.9.)

∗ Transformacija operatora stvaranja i poništenja

- Unitarnost reprezentacija Wignerovih rotacija $D^{(j)}(W)$ i jednakosti $D^{(j)}(W^{-1}) = D^{(j)^{-1}}(W)$ daje

$$D^{(j)}_{\overline{\sigma}\sigma}(W) = (D^{(j)^{-1}})_{\overline{\sigma}\sigma}(W^{-1}) = (D^{(j)})^\dagger_{\overline{\sigma}\sigma}(W^{-1}) = D^{(j)*}_{\sigma\overline{\sigma}}(W^{-1}) . \qquad (844)$$

- Uporabom (844) i L. transf. operatora stvaranja (789) nalazimo

$$
\begin{aligned}
U_0(\Lambda,a)a^\dagger(\vec{p}\sigma n)U_0^{-1}(\Lambda,a) &= e^{-i(\Lambda p)a}\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\overline{\sigma}} D^{(j_n)*}_{\sigma\overline{\sigma}}(W^{-1}(\Lambda,p))\; a^\dagger(\vec{p}_\Lambda\overline{\sigma}n), \qquad (845)\\
U_0(\Lambda,a)a(\vec{p}\sigma n)U_0^{-1}(\Lambda,a) &= e^{i(\Lambda p)a}\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\overline{\sigma}} D^{(j_n)}_{\sigma\overline{\sigma}}(W^{-1}(\Lambda,p))\; a(\vec{p}_\Lambda\overline{\sigma}n) . \qquad (846)
\end{aligned}
$$

- L. transf. $a(p\sigma n)$ dobijena je hermitskom konjugacijom (845) ($D^{(j_n)*}_{\sigma\overline{\sigma}}(W^{-1}(\Lambda,p))$ su brojevi). j_n je spin čestice n.
- Zbog Einsteinove relacije izmedju energije i impulsa a i $a^\dagger$ operatori ovise samo o prostornim komponentama 4-impulsa, $\vec{p}$ odnosno $\vec{p}_\Lambda$, $\Lambda p = (\vec{p}_\Lambda, \Lambda^0_\mu p^\mu)$.

$*$ Nalaženje koeficijenata $u_\ell(x;\vec{p},\sigma,n)$, $v_\ell(x;\vec{p},\sigma,n)$ iz L. transf. polja

$$L \;\equiv\; U_0(\Lambda,a)\psi_\ell^{\pm}(x)U_0^{-1}(\Lambda,a) \;\stackrel{(835,836)}{=}\; \sum_{\overline{\ell}} D_{\ell\overline{\ell}}(\Lambda^{-1})\psi_{\overline{\ell}}^{\pm}(\Lambda x+a) \;\equiv\; R\;; \qquad (847)$$

$$\begin{aligned} L \;&\stackrel{+}{=}\; \int \frac{d^3p_\Lambda\, p^0}{(\Lambda p)^0}\sum_{\sigma n}\left[u_\ell(x;\vec{p},\sigma,n)e^{i\Lambda p\cdot a}\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\overline{\sigma}} D^{(j_n)}_{\sigma\overline{\sigma}}(W^{-1}(\Lambda,p))a(\vec{p}_\Lambda\overline{\sigma}n)\right] \\ &\stackrel{-}{=}\; \int \frac{d^3p_\Lambda\, p^0}{(\Lambda p)^0}\sum_{\sigma n}\left[v_\ell(x;\vec{p},\sigma,n)e^{-i\Lambda p\cdot a}\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\overline{\sigma}} D^{(j_n)^*}_{\sigma\overline{\sigma}}(W^{-1}(\Lambda,p))a^\dagger(\vec{p}_\Lambda\overline{\sigma}n)\right], \quad (848) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R \;&\stackrel{+}{=}\; \sum_{\overline{\ell}} D_{\ell\overline{\ell}}(\Lambda^{-1})\int d^3p_\Lambda \sum_{\overline{\sigma}n} u_{\overline{\ell}}(\Lambda x+a,\vec{p}_\Lambda,\overline{\sigma},n)a(\vec{p}_\Lambda\overline{\sigma}n) \\ &\stackrel{-}{=}\; \sum_{\overline{\ell}} D_{\ell\overline{\ell}}(\Lambda^{-1})\int d^3p_\Lambda \sum_{\overline{\sigma}n} v_{\overline{\ell}}(\Lambda x+a,\vec{p}_\Lambda,\overline{\sigma},n)a^\dagger(\vec{p}_\Lambda\overline{\sigma}n)\;. \qquad (849) \end{aligned}$$

U izrazu za L smo rabili jednakost $d^3p = d^3p_\Lambda(p^0/(\Lambda p)^0)$. U izrazu za R rabili smo nijemost integracija i zamijenili $\vec{p}\to\vec{p}_\Lambda$ i $\sigma\to\overline{\sigma}$. Usporedbom izraza za L i R dobijamo

$$\begin{aligned} &e^{i\Lambda p\cdot a}\sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_{\sigma} u_\ell(x;\vec{p},\sigma,n)D^{(j_n)}_{\sigma\overline{\sigma}}(W^{-1}(\Lambda,p)) \\ &\stackrel{+}{=}\; \sum_{\overline{\ell}} D_{\ell\overline{\ell}}(\Lambda^{-1})u_{\overline{\ell}}(\Lambda x+a,\vec{p}_\Lambda,\overline{\sigma},n), \qquad (850) \\ &e^{-i\Lambda p\cdot a}\sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_{\sigma} v_\ell(x;\vec{p},\sigma,n)D^{(j_n)^*}_{\sigma\overline{\sigma}}(W^{-1}(\Lambda,p)) \\ &\stackrel{-}{=}\; \sum_{\overline{\ell}} D_{\ell\overline{\ell}}(\Lambda^{-1})v_{\overline{\ell}}(\Lambda x+a,\vec{p}_\Lambda,\overline{\sigma},n), \qquad (851) \end{aligned}$$

odnosno množeći sa inverznim matricama $D^{(j_n)}(W(\Lambda,p))$ $(D^{(j_n)^*}(W(\Lambda,p)))$ i $D(\Lambda)$ dobija se zgodniji oblik jednadžbe iz kojeg, kao što ćemo pokazati se mogu naći koeficijentne funkcije $u_\ell(x;\vec{p},\sigma,n)$ i $v_\ell(x;\vec{p},\sigma,n)$,

$$\begin{aligned} &\sum_{\overline{\sigma}} u_{\overline{\ell}}(\Lambda x+a,\vec{p}_\Lambda,\overline{\sigma},n)D^{(j_n)}_{\overline{\sigma}\sigma}(W(\Lambda,p)) \\ &\stackrel{+}{=}\; \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_{\ell} D_{\overline{\ell}\ell}(\Lambda)e^{i\Lambda p\cdot a}u_\ell(x;\vec{p},\sigma,n), \qquad (852) \end{aligned}$$

$$\sum_{\overline{\sigma}} v_{\overline{\ell}}(\Lambda x + a, \vec{p}_\Lambda, \overline{\sigma}, n) D^{(j_n)^*}_{\overline{\sigma}\sigma}(W(\Lambda, p)) \stackrel{-}{=} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\ell} D_{\overline{\ell}\ell}(\Lambda) e^{-i\Lambda p\cdot a} v_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n) \ . \tag{853}$$

□ Translacije

Struktura koeficijentnih funkcija $u_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$ i $v_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$ se odredjuje u par koraka. Pogledajmo prvo slučaj translacija, $\Lambda = 1$, a po volji ($\Rightarrow W(\Lambda, p) = 1$, $D(\Lambda) = 1$, $D^{(j_n)}(W(\Lambda, p)) = 1$),

$$u_\ell(x + a; \vec{p}, \sigma, n) \stackrel{(852)}{=} e^{ip\cdot a} u_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n), \tag{854}$$

$$v_\ell(x + a; \vec{p}, \sigma, n) \stackrel{(853)}{=} e^{-ip\cdot a} v_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n) \ . \tag{855}$$

Rješenja jednadžbi (854) i (855)

$$u_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n) = e^{ip\cdot x} u_\ell(0; \vec{p}, \sigma, n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{ip\cdot x} u_\ell(\vec{p}, \sigma, n), \tag{856}$$

$$v_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n) = e^{-ip\cdot x} v_\ell(0; \vec{p}, \sigma, n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{-ip\cdot x} v_\ell(\vec{p}, \sigma, n), \tag{857}$$

eliminiraju x ovisnost iz koeficijentnih funkcija $u_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$ i $v_\ell(x; \vec{p}, \sigma, n)$. Faktor $1/\sqrt{(2\pi)^3}$ je konvencija. Uvrštavanjem (854) i (855) u izraze za polja (833) i (834) slijedi

$$\psi^+_\ell(x) \stackrel{(833,854)}{=} \sum_{\sigma n} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \, e^{ip\cdot x} u_\ell(\vec{p}, \sigma, n) a(\vec{p}, \sigma, n), \tag{858}$$

$$\psi^-_\ell(x) \stackrel{(834,855)}{=} \sum_{\sigma n} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \, e^{-ip\cdot x} v_\ell(\vec{p}, \sigma, n) a^\dagger(\vec{p}, \sigma, n) \ . \tag{859}$$

Uvrštavanjem (854) i (855) u opće uvjete (852) i (853) dobivaju se uvjeti za koeficijentne funkcije $u_\ell(\vec{p}, \sigma, n)$ i $v_\ell(\vec{p}, \sigma, n)$,

$$\sum_{\overline{\sigma}} u_{\overline{\ell}}(\vec{p}_\Lambda, \overline{\sigma}, n) D^{(j_n)}_{\overline{\sigma}\sigma}(W(\Lambda, p)) \stackrel{(852,856)}{=} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\ell} D_{\overline{\ell}\ell}(\Lambda) u_\ell(\vec{p}, \sigma, n), \tag{860}$$

$$\sum_{\overline{\sigma}} v_{\overline{\ell}}(\vec{p}_\Lambda, \overline{\sigma}, n) D^{(j_n)^*}_{\overline{\sigma}\sigma}(W(\Lambda, p)) \stackrel{(853,857)}{=} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\ell} D_{\overline{\ell}\ell}(\Lambda) v_\ell(\vec{p}, \sigma, n) \ . \tag{861}$$

$\square$ **Boostovi**

Pogledajmo zatim slučaj kada je u jednadžbama (860) i (861) $\vec{p}=0$ i $\Lambda = L(q)$ standardni boost. Tada je $p=(\vec{0},m)$, $L(p)=1$, $q=L(q)p$,

$$W(\Lambda,p) \;=\; L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \;=\; L(q)^{-1}L(q) \;=\; 1\;. \tag{862}$$

Stoga

$$u_{\overline{\ell}}(\vec{q},\sigma,n) \;=\; \left(\frac{m}{q^0}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{\ell} D_{\overline{\ell}\ell}(L(q))u_{\ell}(0,\sigma,n), \tag{863}$$

$$v_{\overline{\ell}}(\vec{q},\sigma,n) \;=\; \left(\frac{m}{q^0}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{\ell} D_{\overline{\ell}\ell}(L(q))v_{\ell}(0,\sigma,n)\;. \tag{864}$$

Drugim riječima, ako poznajemo funkcije $u_\ell(0,\sigma,n)$ i $v_\ell(0,\sigma,n)$ za impuls nula, tada znamo funkcije $u_{\overline{\ell}}(\vec{q},\sigma,n)$ i $v_{\overline{\ell}}(\vec{q},\sigma,n)$ za svaki $\vec{p}$ (izrazi za $D_{\overline{\ell}\ell}(L(q))$ bit će izračunati za skalarno, vektorsko i spinorno polje. Za opće polje dano je u poglavlju §5.7 Weinbergove knjige).

$\square$ **Rotacije**

Pogledajmo sada slučaj $\vec{p}=0$ uz homogenu Lorentzovu transformaciju jednaku čistoj rotaciji $\Lambda = R$. Tada je $p=\Lambda p=(\vec{0},m)$ $L(p)=L(\Lambda p)=1$, $W(\Lambda,p)=R$, i jednadžbe (860) i (861) glase

$$\sum_{\overline{\sigma}} u_{\overline{\ell}}(0,\overline{\sigma},n)D^{(j_n)}_{\overline{\sigma}\sigma}(R) \;=\; \sum_{\ell} D_{\overline{\ell}\ell}(R)u_{\ell}(0,\sigma,n), \tag{865}$$

$$\sum_{\overline{\sigma}} v_{\overline{\ell}}(0,\overline{\sigma},n)D^{(j_n)*}_{\overline{\sigma}\sigma}(R) \;=\; \sum_{\ell} D_{\overline{\ell}\ell}(R)v_{\ell}(0,\sigma,n)\;. \tag{866}$$

Ekvivalentno,

$$\sum_{\overline{\sigma}} u_{\overline{\ell}}(0,\overline{\sigma},n)\vec{J}^{(j_n)}_{\overline{\sigma}\sigma} \;=\; \sum_{\ell} \vec{\mathcal{J}}_{\overline{\ell}\ell}u_{\ell}(0,\sigma,n), \tag{867}$$

$$-\sum_{\overline{\sigma}} v_{\overline{\ell}}(0,\overline{\sigma},n)\vec{J}^{(j_n)*}_{\overline{\sigma}\sigma} \;=\; \sum_{\ell} \vec{\mathcal{J}}_{\overline{\ell}\ell}v_{\ell}(0,\sigma,n), \tag{868}$$

gdje su $\vec{J}^{(j_n)}$ i $\vec{\mathcal{J}}$ generatori kutne količine gibanja u reprezentacijama rotacija $D^{(j_n)}(R)$ i $D(R)$ (rotacije operatora stvaranja odnosno rotacije polja).
- jedinstvenost rastava na rotacijske irep:
jednadžbe (865) i (866) pokazuju da kada se reprezentacija $D(\Lambda)$ ograniči na rotacije $D(R)$ sadrži ireducibilnu spinsku reprezentaciju $D^{(j_n)}$. Može se pokazati da svaka irrep

homogene Lorentzove grupe sadrži bilo koju irrep rotacijske grupe najviše jednom, tako ako se polja $\psi^{\pm}_{\ell}(x)$ transformiraju ireducibilno, ona su jedinstvena do na skalu.
- Koeficijentne funkcije $u_\ell(\vec{p},\sigma,n)$ i $v_\ell(\vec{p},\sigma,n)$ iz jednadžbi (863) i (864) i koeficijentne funkcije $u_\ell(\vec{0},\sigma,n)$ i $v_\ell(\vec{0},\sigma,n)$ iz jednadžbi (865) i (866) zadovoljavaju opće uvjete (860) i (861):
D:
Dokaz ćemo napraviti za u_ℓ funkciju

$$\begin{aligned}
(860)_R &\equiv \left(\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\overline{\ell}} D_{\overline{\overline{\ell}}\,\overline{\ell}}(\Lambda) u_{\overline{\ell}}(\vec{p},\sigma,n) \\
&\overset{(863)}{=} \left(\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell\overline{\ell}} D_{\overline{\overline{\ell}}\,\overline{\ell}}(\Lambda) D_{\overline{\ell}\ell}(L(p)) u_\ell(0,\sigma,n) \\
&= \left(\frac{m}{(\Lambda p)^0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell} D_{\overline{\overline{\ell}}\ell}(\Lambda L(p)) u_\ell(0,\sigma,n) \\
&= \left(\frac{m}{(\Lambda p)^0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell} (D(L(\Lambda p)) D(W(\Lambda,p)))_{\overline{\overline{\ell}}\ell} u_\ell(0,\sigma,n) \\
&\overset{(865)}{=} \left(\frac{m}{(\Lambda p)^0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell_1} D(L(\Lambda p))_{\overline{\overline{\ell}}\ell_1} \times \sum_{\overline{\sigma}} u_{\ell_1}(0,\overline{\sigma},n) D^{(j_n)}_{\overline{\sigma}\sigma}(W(\Lambda,p)) \\
&\overset{(863)}{=} \sum_{\overline{\sigma}} u_{\overline{\overline{\ell}}}(\Lambda p,\overline{\sigma},n) D^{(j_n)}_{\overline{\sigma}\sigma}(W(\Lambda,p)) \equiv (860)_L \qquad \text{Q.E.D.} \qquad (869)
\end{aligned}$$

• Hamiltonijan izražen preko polja i princip dekompozicije nakupina

Provjerimo da li Hamiltonijan čija gustoća je izražen preko polja (839) zadovoljava uvjete principa dekompozicije nakupina (830), (831):

$$\begin{aligned}
V &= V(0) = \int d^3x\, \mathcal{H}(\vec{x},0) \\
&\overset{(839)}{=} \int d^3x \sum_{MN} \sum_{\ell'_1\ldots\ell'_N} \sum_{\ell_1\ldots\ell_M} g_{\ell'_1\ldots\ell'_N,\ell_1\ldots\ell_M} \psi^-_{\ell'_1}(\vec{x},0)\ldots\psi^-_{\ell'_N}(\vec{x},0)\psi^+_{\ell_1}(\vec{x},0)\ldots\psi^+_{\ell_M}(\vec{x},0) \\
&\overset{(833,834)}{=} \sum_{MN} \int d^3p'_1\ldots d^3p'_N d^3p_1\ldots d^3p_M \sum_{\sigma'_1 n'_1}\cdots\sum_{\sigma'_N n'_N}\sum_{\sigma_1 n_1}\cdots\sum_{\sigma_M n_M} \\
&\quad a^\dagger(p'_1\sigma'_1 n'_1)\ldots a^\dagger(p'_N\sigma'_N n'_N) a(p_1\sigma_1 n_1)\ldots a(p_M\sigma_M n_M) \\
&\quad \times\delta^3(\vec{p}'_1+\ldots+\vec{p}'_N-\vec{p}_1-\ldots-\vec{p}_M)
\end{aligned}$$

$$\times(2\pi)^{3-\frac{3}{2}(N+M)} \sum_{\ell'_1\ldots\ell'_N} \sum_{\ell_1\ldots\ell_M} g_{\ell'_1\ldots\ell'_N\ell_1\ldots\ell_M}$$
$$v_{\ell'_1}(\vec{p}'_1\sigma'_1n'_1)\ldots v_{\ell'_N}(\vec{p}'_N\sigma'_Nn'_N)u_{\ell_1}(\vec{p}_1\sigma_1n_1)\ldots u_{\ell_M}(\vec{p}_M\sigma_Mn_M) \tag{870}$$

gdje

$$\begin{aligned} u_\ell(\vec{p}\sigma n) &= \sqrt{\frac{m_n}{p^0}}\sum_{\ell'} D_{\ell\ell'}(L(\vec{p}))u_{\ell'}(0\sigma n), \\ v_\ell(\vec{p}\sigma n) &= \sqrt{\frac{m_n}{p^0}}\sum_{\ell'} D_{\ell\ell'}(L(\vec{p}))v_{\ell'}(0\sigma n)\ . \end{aligned} \tag{871}$$

Ako označimo δ^3-funkciju i sve iza nje sa $\mathcal{V}_{NM}$ a sve iza δ^3-funkcije sa $\tilde{\mathcal{V}}_{NM}$ vidimo da $V \equiv V(t=0)$ ima traženu strukturu (830) i (831) sa koeficijentima $h_{NM} = \mathcal{V}_{NM}$ i $\tilde{h}_{NM} = \tilde{\mathcal{V}}_{NM}$ gdje $\tilde{\mathcal{V}}_{NM}$ nemaju δ-funkcijske singularitete i jedini singulariteti su od rezova funkcija $1/\sqrt{p^0}$ koje se javljaju u normama koeficijentnih funkcija $u_\ell(\vec{p}\sigma n)$ i $v_\ell(\vec{p}\sigma n)$.

• Ispunjavanje dodatnog uvjeta Lorentz invarijantnosti (829)

- Do sada smo za gustoću Hamiltonijana izraženu preko polja (839) ispunili princip dekompozicija nakupina (830,831) a od uvjeta za Lorentz kovarijantnost S matrice (467) ispunili uvjet skalarnosti gustoće Hamiltonijana (828,840). Preostalo je još ispuniti uvjet komutativnosti gustoće Hamiltonijana u prostorno udaljenim prostorno-vremenskim točkama (829),

$$(829) \ \equiv \ [\mathcal{H}(x),\mathcal{H}(x')] \ = \ 0 \qquad \text{za } (x-x')^2 > 0\ .$$

∗ **Problem** :
- Taj uvjet nije moguće ispuniti za bilo kakvu kombinaciju polja poništenja i polja stvaranja budući da komutator/antikomutator polja poništenja (858) i pripadnog polja stvaranja (859) nije jednak nuli,

$$[\psi^+_\ell(x),\psi^-_{\bar{\ell}}(y)]_\mp \ = \ (2\pi)^{-3}\sum_{\sigma n}\int d^3p u_\ell(\vec{p}\sigma n)v_{\bar{\ell}}(\vec{p}\sigma n)e^{ip\cdot(x-y)} \tag{872}$$

(komutator (antikomutator) se javlja ako su čestice koje se poništavaju odnosno stvaraju operatorima ponistenja ψ^+_ℓ polja odnosno operatorima stvaranja $\psi^-_{\bar{\ell}}$ polja bozoni (fermioni)).
- Zbog hermitičnosti Hamiltonijana problem se ne može riješiti izgradnjom gustoće Hamiltonijana samo od polja poništenja odnosno samo od polja stvaranja.

∗ **Rješenje problema**:
- Jedini način rješavanja problema je izgradnja gustoće Hamiltonijana od **linearnih kombinacija polja poništenja i stvaranja**,

$$\psi_\ell(x) \ = \ \kappa_\ell\psi^+_\ell(x)+\lambda_\ell\psi^-_\ell(x), \tag{873}$$

sa koeficijentima odabranim tako da je za prostornoliki $x-y$ ispunjen uvjet

$$[\psi_\ell(x), \psi_{\ell'}(y)]_\mp \;=\; [\psi_\ell(x), \psi^\dagger_{\ell'}(y)]_\mp \;=\; 0\;. \tag{874}$$

Ispunjavanje uvjeta (874) poljima (873) opisano je za polja koja tvore ireducibilne L. reprezentacije u nadolazećim poglavljima.

- **Nejednoznačnost:** Uvjeti (874) fiksiraju samo jednu od dvije konstante. Druga ostaje neodredjena. Time "skala" polja $\psi(x)$ ostaje neodredjena.

- **Kauzalnost:** Povijesno se uvjeti (874) povezuju sa kauzalnošću. Naime, ako je $x-y$ prostornolik onda po spec. teor. rel. signal poslan iz x ne može stići u y. Medjutim, takva logika vrijedi za polja koja se mogu mjeriti, kao što je EM polje, ali ne za npr. spinorno polje koje nije samo za sebe observabilno.

Uvjet (874) je zapravo posljedica **dodatnog uvjeta Lorentz invarijantosti** teorije (715,829) a ne zahtjeva kauzalnosti.

• **Razlog postojanja antičestica kod nabijenih polja**

$*$ Ako polja (873) sadrže operatore stvaranja i poništenja s **nabojem** (npr. električni naboj) javlja se dodatni problem. Neka je Q operator naboja. Ako je naboj čestica tipa n ima vrijednost $q(n)$ tada je

$$[Q, a(\vec{p}\sigma n)] \;=\; -q(n)a(\vec{p}\sigma n), \tag{875}$$
$$[Q, a^\dagger(\vec{p}\sigma n)] \;=\; q(n)a^\dagger(\vec{p}\sigma n), \tag{876}$$

D:
Q je aditivni operator (vidi (781)). Nadalje svaki tip čestice nosi svoj naboj $q(n)$. Stoga

$$Q \;=\; \sum_n Q(n) \;=\; \sum_n q(n)\sum_\sigma \int d^3p a^\dagger(\vec{p}\sigma n)a(\vec{p}\sigma n)\;. \tag{877}$$

Uporabom identiteta

$$[AB, C]_- \;=\; [A, C]_- B + A[B, C]_-\;, \tag{878}$$
$$[AB, C]_- \;=\; -[A, C]_+ B + A[B, C]_+\;, \tag{879}$$

i (anti)komutacijskih relacija za operatore stvaranja i poništenja (774) dobijamo

$$[Q, a(\vec{p}\sigma n)] \;=\; [Q(n), a(\vec{p}\sigma n)] \;=\; -q(n)a(\vec{p}\sigma n),$$
$$[Q, a^\dagger(\vec{p}\sigma n)] \;=\; [Q(n), a^\dagger(\vec{p}\sigma n)] \;=\; q(n)a^\dagger(\vec{p}\sigma n)\;. \qquad \text{Q.E.D.}$$

- Problem je da Hamiltonijan medjudjelovanja V, dakle i gustoća Hamiltonijana $\mathcal{H}(x)$ mora komutirati sa generatorima svih internih simetrija, dakle i sa Q. Da bi to bilo ostvareno komutator Q s poljima $\psi_\ell(x)$ mora biti jednostavan,

$$[Q, \psi_\ell(x)] \;=\; -q_\ell\psi_\ell(x), \tag{880}$$

tj. dijelovi tog polja ne smiju imati različite naboje. Tada je komutativnost $\mathcal{H}(x)$ s Q moguće ostvariti izgradjujući $\mathcal{H}(x)$ od produkta polja $\psi_{\ell_1}(x)\psi_{\ell_2}(x)\ldots$ i hermitski pridruženih polja $\psi^\dagger_{m_1}(x)\psi^\dagger_{m_2}(x)\ldots$ čiji je ukupni naboj jednak nuli,

$$q_{\ell_1} + q_{\ell_m} + \ldots - q_{m_1} - q_{m_2} - \ldots \;=\; 0 \;. \tag{881}$$

- Problem se rješava tako da se polje $\psi_\ell(x)$ izgradjuje od operatora stvaranja $(a^\dagger(\vec{p}\sigma\overline{n}))$ i poništenja $(a(\vec{p}\sigma n))$ istog naboja, $-q(n) = q(\overline{n}) = -q_\ell$,

$$[Q, a(\vec{p}\sigma n)] \;=\; -q(n)a(\vec{p}\sigma n), \qquad [Q, a^\dagger(\vec{p}\sigma\overline{n})] \;=\; q(\overline{n})a^\dagger(\vec{p}\sigma\overline{n}). \tag{882}$$

Pri tome se polje poništanja $\psi^+_\ell(x)$ izgraduje od $a(\vec{p}\sigma n)$ operatora, a polje stvaranja $\psi^-_\ell(x)$ od $a^\dagger(\vec{p}\sigma\overline{n})$ operatora. Sačuvanje naboja stoga implicira za svaku nabijenu česticu $(a^\dagger(\vec{p}\sigma n))$ postojanje čestice suprotnih sačuvanih naboja $(a^\dagger(\vec{p}\sigma\overline{n}))$, tj. njenu **antičesticu**. Drugim riječima **sačuvanje naboja** implicira **postojanje antičestica u teoriji polja**.

• O jednadžbama gibanja za polja

- Polja (858) i (859) su konstruirana uz pretpostavku principa dekompozicija nakupina i Lorentz invarijantnosti. Cjelokupna x-zavisnost polja (858) i (859) je u Fourieovim funkcijama $e^{\pm ip\cdot x}$, pa zbog toga zadovoljavaju slobodnu Klein-Gordanovu jednadžbu,

$$(\Box - m_\ell^2)\psi^\pm_\ell(x) \;=\; 0 \;. \tag{883}$$

- Neka od polja (858) i (859) mogu zadovoljavati i dodatne jednadžbe, koje se javljaju ukoliko polje ima više komponenti nego stupnjeva slobode (npr. Diracovo polje ima 4 "spinske" komponente i 2 nezavisna "spinska" stupnja slobode).
- U standardnim udžbenicima se kreće od tih jednadžbi gibanja za polja, ili iz gustoće Lagrangijana iz koje se izvode jednadžbe gibanja. Polja se razvijaju po Fourieovim komponenetama, u Fourieovim komponentama polja se identificiraju operatori stvaranja i poništenja, i preko operatora stvaranja se definiraju fizikalna stanja. U Weinbergovom pristupu polazi se od stanja, preko njih se definiraju operatori stvaranja i poništanja, od njih se konstruiraju polja uz zahtjev Lorentzove invarijantosti i principa dekompozicije nakupina, a jednadžbe gibanja su posljedice tako konstruiranih polja - tj. uvjeta ugradjenih u polja kroz njihovu konstrukciju.

• O normalnom uredjenju i dodatnom uvjetu Lorentz invarijantnosti

Prema teoremu dokazanom u poglavlju §4.4 princip dekompozicije nakupina je zadovoljen ako gustoća Hamiltonijana $\mathcal{H}(x)$ ima oblik (810) uz uvjet (811). Taj uvjet je ispunjen gustoćom Hamiltonijana (839),

$$
\begin{aligned}
(839) \quad \equiv \quad \mathcal{H}(x) &= \sum_{MN} \sum_{\ell'_1 \dots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \dots \ell_M} g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M} \psi^-_{\ell'_1}(x) \dots \psi^-_{\ell'_N}(x) \psi^+_{\ell_1}(x) \dots \psi^+_{\ell_M}(x) \\
&\equiv \mathcal{H}(\{\psi^-_{\ell'_i}(x)\}, \{\psi^+_{\ell_i}(x)\}) \ . \qquad (884)
\end{aligned}
$$

S druge strane dodatni uvjet Lorentzove invarijantnosti zahtjeva $\mathcal{H}(x)$ koji je funkcija polja (873),

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(x) &= \sum_{MN} \sum_{\ell'_1 \dots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \dots \ell_M} \overline{g}_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M} \psi_{\ell'_1}(x) \dots \psi_{\ell'_N}(x) \psi^\dagger_{\ell_1}(x) \dots \psi^\dagger_{\ell_M}(x) \\
&\equiv \mathcal{H}(\{\psi_{\ell'_i}(x)\}, \{\psi^\dagger_{\ell_i}(x)\}) \ . \qquad (885)
\end{aligned}
$$

Usporedba (884) i (885) ukazuje da je ispravan oblik $\mathcal{H}(x)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(x) &= \sum_{MN} \sum_{\ell'_1 \dots \ell'_N} \sum_{\ell_1 \dots \ell_M} g_{\ell'_1 \dots \ell'_N, \ell_1 \dots \ell_M} : \psi_{\ell'_1}(x) \dots \psi_{\ell'_N}(x) \psi^\dagger_{\ell_1}(x) \dots \psi^\dagger_{\ell_M}(x) : \\
&\equiv \ : \mathcal{H}(\{\psi_{\ell'_i}(x)\}, \{\psi^\dagger_{\ell_i}(x)\}) : \qquad (886)
\end{aligned}
$$

gdje ”::” označava normalno uredjenje, operaciju koja operatore stvaranja (polja stvaranja) stavlja slijeva operatorima poništanja (poljima poništanja). Pri tome se komutatori operatora stvaranja i poništanja zanemaruju a predznaci koji se javljaju pri zamjeni fermionskih polja zadržavaju. Npr. za dva polja

$$
\begin{aligned}
: \psi_{\ell_1}(x)\psi_{\ell_2}(x) : \ &= \ : (\kappa_{\ell_1}\psi^+_{\ell_1}(x) + \lambda_{\ell_1}\psi^-_{\ell_1}(x))(\kappa_{\ell_2}\psi^+_{\ell_2}(x) + \lambda_{\ell_2}\psi^-_{\ell_2}(x)) : \\
&= \kappa_{\ell_1}\kappa_{\ell_2}\psi^+_{\ell_1}(x)\psi^+_{\ell_2}(x) \pm \kappa_{\ell_1}\lambda_{\ell_2}\psi^-_{\ell_2}(x)\psi^+_{\ell_1}(x) \\
&+ \lambda_{\ell_1}\kappa_{\ell_2}\psi^-_{\ell_1}(x)\psi^+_{\ell_2}(x) + \lambda_{\ell_1}\lambda_{\ell_2}\psi^-_{\ell_1}(x)\psi^-_{\ell_2}(x) \\
&= (\kappa_{\ell_1}\psi^+_{\ell_1}(x) + \lambda_{\ell_1}\psi^-_{\ell_1}(x))(\kappa_{\ell_2}\psi^+_{\ell_2}(x) + \lambda_{\ell_2}\psi^-_{\ell_2}(x)) \\
&- \kappa_{\ell_1}\lambda_{\ell_2}[\psi^+_{\ell_1}(x), \psi^-_{\ell_2}(x)]_\mp \\
&= \psi_{\ell_1}(x)\psi_{\ell_2}(x) - \kappa_{\ell_1}\lambda_{\ell_2}[\psi^+_{\ell_1}(x), \psi^-_{\ell_2}(x)]_\mp \ . \qquad (887)
\end{aligned}
$$

Primjer sa dva polja ilustrira da se normalno uredjeni produkt polja uvijek može prikazati kao suma običnih produkta polja,

$$
\begin{aligned}
: \psi_{\ell'_1}(x) \dots \psi_{\ell_1}(x) \dots : \ &= \underbrace{\psi_{\ell'_1}(x) \dots \psi_{\ell_1}(x) \dots}_{2N \text{ polja}} + A^1_{ij} \underbrace{\psi_{\ell'_1}(x) \dots \psi_{\ell_1}(x) \dots}_{2N-2 \text{ polja (bez ij)}} \\
&\dots + A^N \cdot 1 \ . \qquad (888)
\end{aligned}
$$

Time je osiguran i oblik gustoće Hamiltonijana (884) (zbog normalnog uredjenja (886)) i Lorentz invarijantnost (zbog toga što polja (873) komutiraju za prostornolike intervale i relacije (888)).

5.2 Kauzalno skalarno polje

• Realno skalarno polje

$*$ Kutna količina gibanja skalarnog polja

- Razmotrimo prvo 1-komponentna skalarna polja $\phi^+(x)$ i $\phi^-(x)$ koja se transformiraju kao skalari, sa

$$D(\Lambda) = 1, \tag{889}$$

za svaku L.T. (ograničavamo se na jedan tip čestice pa indeks n nećemo pisati). Ograničenje te transformacije na rotacije, $\{D(R)\}$, je skalarna reprezentacija rotacijske grupe sa $\vec{\mathcal{J}} = 0$, tako da je jedino rješenje jednadžbi (867,868) $j = 0$, odakle $\sigma, \overline{\sigma} = 0$.
D:

$$\begin{aligned} D(R(\vec{\theta})) &= e^{i\vec{\mathcal{J}}\vec{\theta}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{J}} = 0 \\ &\overset{(867),(868)}{\Rightarrow} \sum_{\sigma} u(0\overline{\sigma})\vec{J}^{(j)}_{\overline{\sigma}\sigma} = 0, \qquad \sum_{\sigma} v(0\overline{\sigma})\vec{J}^{(j)*}_{\overline{\sigma}\sigma} = 0, \\ &\Rightarrow (\vec{J}^{(j)})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad j = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma, \overline{\sigma} = 0 \ . \end{aligned} \tag{890}$$

$*$ Koeficijentne funkcije skalarnog polja

- Stoga koeficijentne funkcije $u(0, \sigma, n)$, $v(0, \sigma, n)$ iz jednadžbi (867,868) nemaju zavisnosti o n i σ, $u(0)$, $v(0)$, tj. obični su brojevi. Uobičajeno se stavlja

$$u(0) = v(0) = (2m)^{-\frac{1}{2}} \ . \tag{891}$$

- Time valne funkcije impulsa $\vec{p}$, (871), postaju jednake

$$u(\vec{p}) = v(\vec{p}) = (2p^0)^{-\frac{1}{2}} \ . \tag{892}$$

$*$ Izrazi za realno skalarno polje

- Uz dodatnu pretpostavku da polje opisuje jedan tip čestica, u kojem su čestični i anticestični operatori stvaranja jednaki (to vrijedi ako čestica nema naboja različitih od nule) dobijamo sljedeće izraze za polja poništenja i stvaranja (858,859),

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}} e^{ip\cdot x} a(p), \tag{893}$$

$$\phi^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}} e^{-ip\cdot x} a^\dagger(p) = {\phi^+}^\dagger(x) \ . \tag{894}$$

$\square$ **Gustoća Hamiltonijana i uvjeti Lorentzove invarijantnosti**

$*$ **Ispunjenje prvog uvjeta L. inv. (828,708)**

- Gustoća Hamiltonijana $\mathcal{H}(x)$ je polinom u $\phi^+(x)$ i $\phi^-(x)$. Svako od tih polja se prema (835,836), (889) transformira kao skalar,

$$U_0(\Lambda,a)\phi^{\pm}(x)U_0^{-1}(\Lambda,a) \;=\; \phi^{\pm}(\Lambda x+a), \tag{895}$$

pa se stoga i $\mathcal{H}(x)$ transformira kao skalar. Time je prvi od dva uvjeta Lorentz invarijantnosti (828,708) ispunjen.

$*$ **Ispunjenje drugog uvjeta L. inv. (829,715)**

- Još je preostalo zadovoljiti uvjet komutativnosti gustoća Hamiltonijana u dvije prostornoliko udaljene točke, $[\mathcal{H}(x),\mathcal{H}(y)]=0$ za $(x-y)^2>0$.
- Iz hermitičnosti Hamiltonijana slijedi da Hamiltonijan sadrži i polja ϕ^+ i polja ϕ^- koja (preciznije sadrži jednak broj ϕ^+ i ϕ^-), tako da se u izrazu za $[\mathcal{H}(x),\mathcal{H}(y)]$ nužno javljaju komutatori (za bozone) odnosno antikomutatori (za fermione)

$$\begin{aligned}
[\phi^+(x),\phi^-(y)]_{\mp} &= \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3(2p^0 2p'^0)^{\frac{1}{2}}}\; e^{ip\cdot x}e^{-ip'\cdot y}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\; e^{ip\cdot(x-y)} \;\equiv\; \Delta_+(x-y)\ .
\end{aligned} \tag{896}$$

- Konačan izraz je Lorentz invarijantna funkcija oblika $\Delta(x)$. Ta funkcija je različita od nule za prostornolike intervale $x^2>0$. To vidimo odabirući inercijani sustav S u kojem je $x^0=0$ (u izvodu koji slijedi uvodimo $x=|\vec{x}|$ i $p=|\vec{p}|=mu$)

$$\begin{aligned}
\Delta_+(x) &\overset{S}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\; e^{i\vec{p}\vec{x}} \;=\; \int \frac{\overbrace{d\varphi}^{2\pi}\; d\cos\theta\; p^2dp}{(2\pi)^3 2p^0}\; e^{ipx\cos\theta} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{p^2dp}{2\sqrt{p^2+m^2}}\frac{\overbrace{e^{i\vec{p}\vec{x}}-e^{-i\vec{p}\vec{x}}}^{2i\sin px}}{ipx} \\
&= \frac{m}{(2\pi)^2x}\int_0^\infty \frac{udu\sin mux}{\sqrt{u^2+1}} \;=\; \frac{m}{(2\pi)^2x}K_1(mx) \;\neq\; 0,
\end{aligned} \tag{897}$$

gdje je $K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}i^{n+1}H_\nu^{(1)}(ix)$ modificirana Besselova funkcija. Budući da je $|\vec{x}|=\sqrt{x^2}$ u svakom inercijalnom sustavu vrijedi

$$\Delta_+(x) \;=\; \frac{m}{(2\pi)^2\sqrt{x^2}}K_1(m\sqrt{x^2}) \;\neq\; 0\ . \tag{898}$$

Funkcija $\Delta_+(x)$ je različita od nule i parna je u x.
- Problem neisčezavanja $\Delta_+(x)$ rješava se izražavajući $\mathcal{H}(x)$ preko linearnih kombinacija ϕ^+ i ϕ^- polja,

$$\phi(x) \;=\; \kappa\phi^+(x) + \lambda\phi^-(x)\;. \tag{899}$$

i hermitskih konjugata polja $\phi^\dagger(x)$. Da bi bio ispunjen Lorentzov uvjet (829,715) polja ϕ i polja $\phi^\dagger$ moraju komutirati za prostornoliki $x-y$. Uporabom (896), (894) i (899) za prostornoliki $x-y$ slijedi

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)]_\mp \;=\; |\kappa|^2\Delta_+(x-y) \mp |\lambda^2|\Delta_+(y-x) \;=\; (|\kappa|^2 \mp |\lambda^2|)\Delta_+(x-y), \tag{900}$$

$$[\phi(x), \phi(y)]_\mp \;=\; \kappa\lambda(\Delta_+(x-y) \mp \Delta_+(y-x)) \;=\; \kappa\lambda\Delta_+(x-y)(1\mp 1)\;. \tag{901}$$

U zadnjim jednadžbama (900) i (901) primjenjena je parnost $\Delta_+(x)$ u x. Jednadžba (901) pokazuje da samo komutator dvaju skalarnih polja može iščezavati. Zbog toga **skalarna polja moraju biti bozoni**. Iz jednadžbe (900) slijedi da su κ i λ jednaki po apsolutnoj vrijednosti,

$$|\kappa| \;=\; |\lambda|\;. \tag{902}$$

$*$ Odabir faze

- Relativna faza κ i λ se može mijenjati redefinirajući fazu fizikalnih stanja $a(\vec{p}) \to e^{i\alpha}a(\vec{p})$ $(a^\dagger(\vec{p}) \to e^{-i\alpha}a^\dagger(\vec{p}))$ odakle $\kappa \to \kappa' \;=\; \kappa e^{i\alpha}$ $(\lambda \to \lambda' \;=\; \lambda e^{-i\alpha})$
- Odabirući fazu

$$\alpha \;=\; \frac{1}{2}(Arg[\lambda] - Arg[\kappa]) \qquad \Rightarrow \qquad \kappa' \;=\; \lambda'$$

$$\Rightarrow \;\; \phi(x) \;=\; \kappa'(\phi^+(x) + \phi^-(x))\;. \tag{903}$$

- Redefinicijom polja apsorpcijom κ' u $\phi(x)$ dobijamo

$$\phi(x) = (\phi^+(x) + \phi^-(x)) \;=\; \phi^\dagger(x)\;. \tag{904}$$

- Faza α se može birati na razne načine, medjutim kada se jednom za dano polje izabere **ne smije se mijenjati**, jer isto polje sa dva izbora faze ne komutira sa samim sobom. Npr. polje (904) i polje

$$\tilde{\phi}(x) = (e^{i\alpha}\phi^+(x) + e^{-i\alpha}\phi^-(x)) \tag{905}$$

ne komutiraju za prostornoliki $x-y$.
D:

$$[\phi(x), \tilde{\phi}(y)] \;=\; (e^{-i\alpha} - e^{i\alpha})\Delta_+(x-y) \neq 0\;. \tag{906}$$

- To da se polje ne smije mijenjati to znači da **niti jedna transformacija na koju je teorija invarijantna ne smije mijenjati relativnu fazu ϕ^+ i ϕ^- polja**.

• Kompleksno (nabijeno) skalarno polje

∗ Uključenje antičestica

- Ako čestice koje se stvaraju i poništavaju poljem $\phi(x)$ imaju neki sačuvani kvantni broj, tada će $\mathcal{H}(x)$ komutirati s operatorom tog kvantnog broja samo ako svaki operator stvaranja i poništenja sadržan u polju imaju isti naboj. Konkretno polje poništenja $\phi^+(x)$ i polje stvaranja $\phi^-(x)$ sadržano u polju $\phi(x)$ (899) imaju isti naboj

$$
\begin{aligned}
[Q, \phi^+(x)] &= -q\phi^+(x), \\
[Q, \phi^-(x)] &= q_c\phi^-(x) \;=\; -q\phi^-(x), \qquad \phi^-(x) \;=\; \phi^{+c\dagger}(x) \;.
\end{aligned} \tag{907}
$$

Tu je q naboj $a^\dagger(\vec{p})$ operatora čiji hermitski konjugati $a(\vec{p})$ su sadržani u $\phi^+(x)$ polju, a $q_c = -q$ je naboj $a^{c\dagger}(\vec{p})$ operatora iz $\phi^-(x)$ polja. Zbog toga polje poništenja $\phi^+(x)$ i polje stvaranja $\phi^-(x)$ koje konstituiraju polje $\phi(x)$ ne mogu biti jedno drugome hermitski konjugirana već je $\phi^-(x)$ hermitski konjugat polja poništenja $\phi^{+c}(x)$ suprotnog naboja i iste mase kao $\phi^+(x)$, dakle polje antičestica,

$$
\phi(x) \;=\; \kappa\phi^+(x) + \lambda\phi^{+c\dagger}(x), \qquad [Q, \phi(x)] \;=\; -q\phi(x) \;. \tag{908}
$$

∗ Ispunjenje uvjeta Lorentz invarijantnosti

- Prvi uvjet (828,708) je automatski ispunjen jer je $\phi(x)$ skalarno polje.
- U svrhu ispitivanje drugog uvjeta (829,715) ispitujemo (anti)komutatore polja na prostornolikim udaljenostima $x - y$,

$$
[\phi(x), \phi(y)]_\mp \;=\; 0, \tag{909}
$$

$$
\begin{aligned}
[\phi(x), \phi^\dagger(y)]_\mp &= |\kappa|^2\Delta_+(x-y) \mp |\lambda|^2\Delta_+^c(y-x) \\
&= (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2)\Delta_+(x-y) \;.
\end{aligned} \tag{910}
$$

U drugom retku jednadžbe (910) upotrebljena je parnost $\Delta_+(x-y)$ funkcije u x i pretpostavljeno je da su mase čestica i antičestica jednake.
Prvi od (anti)komutatora (909) trivijalo iščezava zbog neidentičnosti operatora $a(\vec{p})$ i $a^c(\vec{p})$, pa stoga ne daje nikakvu informaciju o konstantama κ i λ.
Od (anti)komutatora (910) samo komutator može biti jednak nuli i to ako je $|\kappa| = |\lambda|$. Stoga je i **nabijeno skalarno polje bozonsko polje**

∗ Odabir faza

- Kao i kod realnog skalarnog polja faznom transformacijom stanja i odabirom faza kao u jednadžbi (903) može se postići jednakost konstanti $\kappa = \lambda$. Redefinicijom polja kao u jednadžbi (904) dobija se

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi^{+}(x) + \phi^{+c\dagger}(x) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}} \left[a(\vec{p})e^{ip\cdot x} + a^{c\dagger}(\vec{p})e^{-ip\cdot x}\right] . \end{aligned} \tag{911}$$

- Formula (911) vrijedi i za neutralne spinske čestice koje su jednake svojim antičesticama, $a(\vec{p}) = a^c(\vec{p})$ i za nabijene spinske čestice za česticama različitim od antičestica $a(\vec{p}) \neq a^c(\vec{p})$.

$*$ **Komutator** $\Delta(x)$

- U teoriji polja istaknuto mjesto ima komutator skalarnog polja i njegovog hermitskog konjugata,

$$\begin{aligned}[\phi(x), \phi^{\dagger}(y)] \equiv \Delta(x-y) &= \Delta_{+}(x-y) - \Delta_{+}(y-x) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\left[e^{ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(y-x)}\right] . \end{aligned} \tag{912}$$

• P, C i T transformacije skalarnog polja

$*$ **P, C i T transformacije operatora stvaranja i poništenja**

- Uporabom P, C i T transformacija operatora stvaranja za masivne čestice, (791), (790) i (792),

$$\begin{aligned}(791) \equiv Pa^{\dagger}(p\sigma n)P^{-1} &= \eta_n a^{\dagger}(\mathcal{P}p\sigma n), \\ (790) \equiv Ca^{\dagger}(p\sigma n)C^{-1} &= \xi_n a^{\dagger}(p\sigma n^c), \\ (792) \equiv Ta^{\dagger}(p\sigma n)T^{-1} &= \zeta_n(-1)^{j-\sigma}a^{\dagger}(\mathcal{P}p - \sigma n),\end{aligned}$$

dobijamo P, C i T transformacije za operatore poništenja skalarnih čestica i operatore stvaranje skalarnih antičestica koji se javljaju u izrazu za polje (911),

$$Pa(p)P^{-1} = \eta^*\, a(\mathcal{P}p), \qquad Pa^{c\dagger}(p)P^{-1} = \eta_c\, a^{c\dagger}(\mathcal{P}p), \tag{913}$$

$$Ca(p)C^{-1} = \xi^*\, a^c(p), \qquad Ca^{c\dagger}(p)C^{-1} = \xi_c\, a^{\dagger}(p), \tag{914}$$

$$Ta(p)T^{-1} = \zeta^*\, a(\mathcal{P}p), \qquad Ta^{c\dagger}(p)T^{-1} = \zeta_c\, a^{c\dagger}(\mathcal{P}p) . \tag{915}$$

$*$ **P, C i T transformacije skalarnog polja**

- Iz jednadžbi (913), (914) i (915) slijede P, C i T transformacije polja poništenja čestica,

$$\begin{aligned}
P\phi^+(x)P^{-1} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}}\, \eta^* a(\underbrace{\mathcal{P}p}_{p'})e^{i\overbrace{p\cdot x}^{p'\cdot\mathcal{P}x}} \\
&= \eta^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}}\, a(p)e^{ip\cdot\mathcal{P}x} \;=\; \eta^*\phi^+(\mathcal{P}x), \\
C\phi^+(x)C^{-1} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}}\, \xi^* a^c(p)e^{ip\cdot x} \\
&= \xi^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}}\, a^c(p)e^{ip\cdot x} \;=\; \xi^*\phi^{+c}(x), \\
T\phi^+(x)T^{-1} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}}\, \zeta^* a(\underbrace{\mathcal{P}p}_{p'})e^{\overbrace{-ip\cdot x}^{-ip'\cdot\mathcal{P}x}} \\
&= \zeta^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}}\, a(p)e^{-ip\cdot\mathcal{P}x} \;=\; \zeta^*\phi^+(-\mathcal{P}x), \qquad (916)
\end{aligned}$$

i (analognim postupkom) polja stvaranja antičestica ($\phi^-(x) = \phi^{+c^\dagger}(x)$),

$$\begin{aligned}
P\phi^{+c^\dagger}(x)P^{-1} &= \eta_c\phi^{+c\dagger}(\mathcal{P}x), \\
C\phi^{+c^\dagger}(x)C^{-1} &= \xi_c\phi^{+\dagger}(x), \\
T\phi^{+c^\dagger}(x)T^{-1} &= \zeta_c\phi^{+c\dagger}(-\mathcal{P}x)\ . \qquad (917)
\end{aligned}$$

∗ Relacije čestičnih i antičestičnih η, ξ i ζ faza

- P, C i T transformacije ukupnog skalarnog polja (911) stoga glase

$$\begin{aligned}
P\phi(x)P^{-1} &= \eta^*\phi^+(\mathcal{P}x) + \eta_c\phi^{+c\dagger}(\mathcal{P}x), \\
C\phi(x)C^{-1} &= \xi^*\phi^{+c}(x) + \xi_c\phi^{+\dagger}(x), \\
T\phi(x)T^{-1} &= \zeta^*\phi^+(-\mathcal{P}x) + \zeta_c\phi^{+c\dagger}(-\mathcal{P}x)\ . \qquad (918)
\end{aligned}$$

- Budući da niti jedna transformacija na koju je teorija invarijantna ne smije mijenjati relativnu fazu izmedju dijelova $\phi(x)$ polja, sljedeće jednakosti moraju biti zadovoljene,

$$\begin{aligned}
\eta^* &= \eta_c, \\
\xi^* &= \xi_c, \\
\zeta^* &= \zeta_c\ . \qquad (919)
\end{aligned}$$

- Fizikalna posljedica relacija jest da je za čestično-antičestično stanje ukupni interni paritet $\eta\eta_c = 1$ i ukupni C-paritet $\xi\xi_c = 1$.

- Uzimajući u obzir jednakosti (919) konačni izrazi za P, C i T transformacije ukupnog skalarnog polja (911) su

$$\begin{aligned}
P\phi(x)P^{-1} &= \eta^*\phi(\mathcal{P}x), \\
C\phi(x)C^{-1} &= \xi^*\phi^c(x) \;=\; \xi^*\phi^\dagger(x), \\
T\phi(x)T^{-1} &= \zeta^*\phi(-\mathcal{P}x)\ .
\end{aligned} \tag{920}$$

Uočite da je $\phi^c(x) = \phi^\dagger(x)$.

5.3 Kauzalno vektorsko polje

- Slijedeće polje po kompleksnosti je masivno vektorsko polje. Masivna vektorska polja su nadjena u prirodi ($W^{\pm}$, Z) za razliku od masivnih skalarnih polja, tako da ovo poglavlje ima i primjenu. Nadalje, fotonsko polje se ponekad tretira kao masivno vektorsko polje vrlo male mase.
- Kao i u prethodnom poglavlju razmatrat ćemo samo jedan tip čestice i pripadne antičestice, pa ćemo ispustiti indeks n. Nadalje, prvo ćemo razmatrati svojstva vektorskog polja na primjeru realnog vektorskog polja (čestice jednake antičesticama), a zatim ćemo razmatrati kompleksno skalarno polje (čestice različite od pripadnih antičestica).

• Realno vektorsko polje

∗ L. transf. vektorskog polja

- Po definiciji svako vektorsko polje je polje sa četiri indeksa ($\phi^\mu(x)$) koje se transformira na Lorentzovu transformaciju (835, 836) kao četverovektor, sa (polje se transformira sa $D(\Lambda^{-1})$)

$$D(\Lambda)^\mu{}_\nu \;=\; \Lambda^\mu{}_\nu \; . \tag{921}$$

∗ Polja poništenja i stvaranja

- Izrazi za vektorska polja poništenja i stvaranja su

$$\phi^{+\mu}(x) \;=\; \sum_\sigma (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3p \; u^\mu(\vec{p},\sigma) a(\vec{p},\sigma) e^{ip\cdot x}, \tag{922}$$

$$\phi^{-\mu}(x) \;=\; \sum_\sigma (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3p \; v^\mu(\vec{p},\sigma) a^\dagger(\vec{p},\sigma) e^{-ip\cdot x}. \tag{923}$$

∗ Koeficijentne funkcije $u(\vec{p},\sigma)$, $v(\vec{p},\sigma)$

- Koeficijentne funkcije $u(\vec{p},\sigma)$, $v(\vec{p},\sigma)$ izražene preko istih za $\vec{p}=0$ glase

$$u^\mu(\vec{p},\sigma) \;=\; \left(\frac{m}{p^0}\right)^{\frac{1}{2}} L(p)^\mu{}_\nu u^\nu(0,\sigma), \tag{924}$$

$$v^\mu(\vec{p},\sigma) \;=\; \left(\frac{m}{p^0}\right)^{\frac{1}{2}} L(p)^\mu{}_\nu v^\nu(0,\sigma) \; . \tag{925}$$

$*$ **"Rotacijski" uvjeti za $u^\nu(0,\sigma)$ i $v^\nu(0,\sigma)$**

Uvjeti koji slijede iz rotacijske invarijantnosti, (867,868), glase

$$\sum_{\overline{\sigma}} u^\mu(0,\overline{\sigma}) \vec{J}^{(j)}_{\overline{\sigma}\sigma} = \vec{\mathcal{J}}^\mu{}_\nu u^\nu(0,\sigma), \tag{926}$$

$$-\sum_{\overline{\sigma}} v^\mu(0,\overline{\sigma}) \vec{J}^{(j)*}_{\overline{\sigma}\sigma} = \vec{\mathcal{J}}^\mu{}_\nu v^\nu(0,\sigma) . \tag{927}$$

$*$ **Generatori rotacija u 4-vektorskoj reprezentaciji; moguće vrijednosti j**

- Izrazi za generatore Lorentzovih transformacija slijede iz $D(\Lambda)$ za infinitezimalnu L.T. $\Lambda = 1+\omega$, antisimetričnosti $\omega_{\alpha\beta}$ (170) i izraza za infinitezimalnu L.T. (173)

$$\begin{aligned} D(1+\omega)^\mu{}_\nu &= (1+\omega)^\mu{}_\nu \overset{(173)}{\equiv} (1+\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathcal{J}^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\mathcal{J}^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \\ \Rightarrow \quad \omega^\mu{}_\nu &= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\mathcal{J}^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \quad \overset{(170)}{\Rightarrow} \quad (\mathcal{J}^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = -i(\eta^{\alpha\mu}\eta^\beta{}_\nu - \eta^\alpha{}_\nu\eta^{\beta\mu}) . \end{aligned} \tag{928}$$

- Odatle za generatore rotacije dobijamo (točke označuju nul-vrijednosti matričnih elemenata)

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{J}} &\equiv (\mathcal{J}^{23}, \mathcal{J}^{31}, \mathcal{J}^{12}) \equiv \{\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\mathcal{J}^{jk}\} \equiv (\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3) \\ &= \left(-i\left(\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right), -i\left(\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right), -i\left(\begin{array}{ccc|c} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \right) \\ &= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} -i\{\varepsilon_{ij}\}_k & \vdots \\ \hline \cdots & \cdot \end{array} \right) \right\}, \end{aligned} \tag{929}$$

odnosno po komponentama,

$$(\mathcal{J}_k)^0{}_0 = (\mathcal{J}_k)^0{}_i = (\mathcal{J}_k)^i{}_0 = 0, \tag{930}$$

$$(\mathcal{J}_k)^i{}_j = -i\varepsilon_{ijk} . \tag{931}$$

- Iz jednadžbi (929), (930) i (931) slijedi izraz za $\{(\vec{\mathcal{J}}^2)^\mu{}_\nu\}$,

$$\vec{\mathcal{J}}^2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{array}\right), \tag{932}$$

odnosno po komponentama

$$
\begin{aligned}
(\vec{\mathcal{J}}^2)^0{}_0 &= (\vec{\mathcal{J}}^2)^0{}_j = (\vec{\mathcal{J}}^2)^i{}_0 = 0, &(933)\\
(\vec{\mathcal{J}}^2)^i{}_j &= 2\delta^i{}_j \, . &(934)
\end{aligned}
$$

- Iz (933) i (934) upotrebom (926) i (927) slijedi

$$
\begin{aligned}
\sum_{\overline{\sigma}} u^0(0,\overline{\sigma})(J^{(j)})^2_{\overline{\sigma}\sigma} &= 0, &(935)\\
\sum_{\overline{\sigma}} v^0(0,\overline{\sigma})(J^{(j)})^2_{\overline{\sigma}\sigma} &= 0, &(936)\\
\sum_{\overline{\sigma}} u^i(0,\overline{\sigma})(J^{(j)})^2_{\overline{\sigma}\sigma} &= 2u^i(0,\sigma), &(937)\\
\sum_{\overline{\sigma}} v^i(0,\overline{\sigma})(J^{(j)})^2_{\overline{\sigma}\sigma} &= 2v^i(0,\sigma) \, . &(938)
\end{aligned}
$$

što pokazuje da 0-ta i i-te komponente koeficijentnih funkcija za $\vec{p}=0$, $u^i(0,\sigma)$ i $v^i(0,\sigma)$ imaju spin $j=0$ odnosno $j=1$. Stoga vektorsko polje ima komponente spina $j=0$ i spina $j=1$.

□ Komponenta vektorskog polja spina 0

∗ Vrijednosti za koeficijentne funkcije u $\vec{p}=0$

- Iz $j=0$ slijedi da je projekcija spina $\sigma=0$, pa vrijednost σ nećemo pisati. Za $\vec{p}=0$ je prema jednadžbama (935,936) samo 0-ta komponenta pripadnih koeficijentnih funkcija $u(0)$, $v(0)$ različita od nule. Prikladnim izborom normalizacije one poprimaju konvencionalne vrijedosti,

$$
\begin{aligned}
u^0(0) &= i\Big(\frac{m}{2}\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad u^\mu(0) = i\Big(\frac{m}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}(0,0,0,1)^T \, , &(939)\\
v^0(0) &= -i\Big(\frac{m}{2}\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad v^\mu(0) = -i\Big(\frac{m}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}(0,0,0,1)^T \, . &(940)
\end{aligned}
$$

∗ Koeficijentne funkcije za opću vrijednost impulsa

Uporabom jednadžbi (871) za opće funkcije za vrijednost impulsa $\vec{p}$, L. transf. za vektorsko polje (921) i izraza za opći boost (251) nalazimo

$$
\begin{aligned}
u^\mu(p) &= ip^\mu(2p^0)^{-\frac{1}{2}}, &(941)\\
v^\mu(p) &= -ip^\mu(2p^0)^{-\frac{1}{2}} \, . &(942)
\end{aligned}
$$

D:
Djelovanje standardne L.T. (921) (koja je jednaka standardnoj L.T. za masivne čestice (251,252)) na vektor (0,0,0,1), daje

$$D(L(p))^{\mu}{}_{\nu}(0,0,0,1)^T \;=\; L(p)^{\mu}{}_{\nu}(0,0,0,1)^T \;=\; (\frac{\vec{p}}{m},\frac{p^0}{m})^T \;=\; \frac{p^{\mu}}{m}\;. \tag{943}$$

Rabeći taj rezultat i jednadžbe (871) slijedi ispravnost jednakosti (941) i (942), npr.

$$u^{\mu}(p) \;=\; \Big(\frac{m}{p^0}\Big)^{\frac{1}{2}} \times i\Big(\frac{m}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}\frac{p^{\mu}}{m} \;=\; i\frac{p^{\mu}}{(2p^0)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{Q.E.D.} \tag{944}$$

∗ Polja poništenja i stvaranja

Polja poništenja i stvaranja dobivaju se uvrštavanjem koeficijentnih funkcija (941) i (942) u opće izraze za vektorska polja stvaranja i poništenja, (922,923),

$$\phi^{+\mu} \;=\; \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}}\; ip^{\mu}a(p)e^{ip\cdot x} \;=\; \partial^{\mu}\phi^{+}, \tag{945}$$

$$\phi^{-\mu} \;=\; \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}}\; (-i)p^{\mu}a^{\dagger}(p)e^{-ip\cdot x} \;=\; \partial^{\mu}\phi^{-}\;. \tag{946}$$

Ona su jednaka 4-derivaciji skalarnih polja poništenja i stvaranja (893,894). Stoga ih dalje nije potrebno analizirati.

□ Komponente vektorskog polja spina 1

∗ Vektori koeficijentnih valnih funkcija $\{u^i(0,0)\}$ i $\{v^i(0,0)\}$ imaju samo z komponentu

- Iz jednadžbi (926) i (927) slijedi da vektori $\{u^i(0,0)\}$ i $\{v^i(0,0)\}$ imaju samo z komponentu.

D:
(926) i (927) su vektorske jednadžbe - vrijede za svaku komponentu $\vec{J}^{(1)}$ i $\vec{\mathcal{J}}$ vektora. Posebno vrijede za treću komponentu, za koju vrijedi (249) $\equiv$ $(J_3^{(1)})_{\sigma'\sigma} \;=\; \sigma\delta_{\sigma'\sigma}$

$$\sum_{\overline{\sigma}} u^i(0,\overline{\sigma})(\sigma\delta_{\overline{\sigma}\sigma}) \;=\; (\mathcal{J}_3)^i{}_{\nu}\, u^{\nu}(0,\sigma), \tag{947}$$

$$-\sum_{\overline{\sigma}} v^i(0,\overline{\sigma})(\sigma\delta_{\overline{\sigma}\sigma}) \;=\; (\mathcal{J}_3)^i{}_{\nu}\, v^{\nu}(0,\sigma)\;. \tag{948}$$

Na desnoj strani $\nu = 0$ ne doprinosi sumi pa možemo zamijeniti $\nu \to k$. $\mathcal{J}_3$ zamjenjuje prvu i drugu komponentu $u^k(0,\sigma)$, dajući drugoj suprotni predznak, treću komponentu množi s nulom. Zbog relativne promjene predznaka prve i druge komponente, koja se ne javlja na lijevoj strani jednadžbe rješenja koje sadrže prve dvije komponente $\sigma = \pm 1$ otpadaju kao rješenja jednazžbe, dok $\sigma = 0$, koja odgovara trećoj komponenti $u^k(0,\sigma)$, daje nulu i na lijevoj i na desnoj strani jednadžbe. Time je jednadžba ispunjena samo za $\sigma = 0$. Q.E.D.

- Stoga uz odgovarajuću normalizaciju 4-vektori $u^\mu(0,0)$ i $v^\mu(0,0)$ glase

$$\begin{aligned} u^\mu(0,0) &= v^\mu(0,0) = (2m)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^\mu \\ &= (2m)^{-\frac{1}{2}} \delta_3^\mu = (2m)^{-\frac{1}{2}} e_3^\mu \ . \end{aligned} \tag{949}$$

$*$ **Koeficijentne valne funkcije** $\{u^\mu(0,\pm 1)\}$ **i** $\{v^\mu(0,\pm 1)\}$

- Koeficijentne valne funkcije $\{u^\mu(0,\pm 1)\}$ i $\{v^\mu(0,\pm 1)\}$ se dobivaju upotrebom jednadžbi (947) i (948) za $1 \pm i2$ komponente operatora $\vec{J}$ i $\vec{\mathcal{J}}$.
- U desnu stranu jednadžbi možemo uvrstiti samo koeficijentne funkcije $u(0,0)$ i $v(0,0)$ jer samo njih za sada znamo. Operatore koji djeluju na njih znamo: prema (931) $(\mathcal{J}_k)^i{}_j = -i\varepsilon_{ijk}$, pa je $(\mathcal{J}_1 \pm i\mathcal{J}_2)^i{}_j = -i\varepsilon_{ij1} \pm \varepsilon_{ij2}$. Stoga desnu stranu jednadžbi možemo izračunati.
- Lijeva strana jednadžbe sadrži matrične elemente (vidi (248))

$$\begin{aligned} (J_1^{(1)} \pm iJ_2^{(1)})_{\overline{\sigma}0} &= \sqrt{2}\delta_{\overline{\sigma}0\pm 1} \qquad \text{za} \qquad u(\overline{\sigma},0), \\ (J_1^{(1)*} \pm iJ_2^{(1)*})_{\overline{\sigma}0} &= (J_1^{(1)} \mp iJ_2^{(1)})^*_{\overline{\sigma}0} = \sqrt{2}\delta_{\overline{\sigma}0\mp 1} \qquad \text{za} \qquad v(\overline{\sigma},0), \end{aligned} \tag{950}$$

što pokazuje da sadrži i koeficijentne funkcije $u(\pm 1,0)$ odnosno $v(\mp 1,0)$.
- Iz gornje rasprave i izraza (949) za $u^j(0,0) = v^j(0,0) = (2m)^{-\frac{1}{2}}\delta_3^j$ slijedi

$$\begin{aligned} \overline{\sigma} = +1 \qquad u^i(0,+1)\sqrt{2} &= (-i\varepsilon_{ij1} + \varepsilon_{ij2})(2m)^{-\frac{1}{2}}\delta_3^j \\ &= (2m)^{-\frac{1}{2}}(-i\varepsilon_{i31} + \varepsilon_{i32}), \end{aligned} \tag{951}$$

$$\begin{aligned} \overline{\sigma} = -1 \qquad u^i(0,-1)\sqrt{2} &= (-i\varepsilon_{ij1} - \varepsilon_{ij2})(2m)^{-\frac{1}{2}}\delta_3^j \\ &= (2m)^{-\frac{1}{2}}(-i\varepsilon_{i31} - \varepsilon_{i32}), \end{aligned} \tag{952}$$

$$\begin{aligned} \overline{\sigma} = +1 \qquad v^i(0,-1)(-\sqrt{2}) &= (-i\varepsilon_{ij1} + \varepsilon_{ij2})(2m)^{-\frac{1}{2}}\delta_3^j \\ &= (2m)^{-\frac{1}{2}}(-i\varepsilon_{i31} + \varepsilon_{i32}), \end{aligned} \tag{953}$$

$$\begin{aligned} \overline{\sigma} = -1 \qquad v^i(0,+1)(-\sqrt{2}) &= (-i\varepsilon_{ij1} - \varepsilon_{ij2})(2m)^{-\frac{1}{2}}\delta_3^j \\ &= (2m)^{-\frac{1}{2}}(-i\varepsilon_{i31} - \varepsilon_{i32}) \ . \end{aligned} \tag{954}$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
u(0,+1) &= -v(0,-1) \;=\; v^*(0,+1) \\
&= (2m)^{-\frac{1}{2}}\, 2^{-\frac{1}{2}}(-1,-i,0,0)^T \;\equiv\; (2m)^{-\frac{1}{2}}\{e^\mu(0,+1)\}, \qquad (955)\\
u(0,-1) &= -v(0,+1) \;=\; v^*(0,-1) \\
&= (2m)^{-\frac{1}{2}}\, 2^{-\frac{1}{2}}(1,-i,0,0)^T \;\equiv\; (2m)^{-\frac{1}{2}}\{e^\mu(0,-1)\}\;. \qquad (956)
\end{aligned}
$$

$*$ **Koeficijentne valne funkcije konačnog impulsa,** $\{u^\mu(\vec{p},\sigma)\}$ **i** $\{v^\mu(\vec{p},\sigma)\}$

- Uporabom jednadžbi (871), L. transf. za vektorsko polje (921) i koeficijentnih valnih funkcija (949,955,956) nalazimo

$$
u^\mu(p,\sigma) \;=\; v^{\mu *}(p,\sigma) \;=\; (2p^0)^{-\frac{1}{2}} e^\mu(p,\sigma), \qquad (957)
$$

gdje

$$
e^\mu(p,\sigma) \;\equiv\; L(p)^\mu{}_\nu e^\nu(0,\sigma), \qquad (958)
$$

$$
\begin{aligned}
e^\mu(0,0) &\overset{(949)}{=} (0,0,1,0)^T, \\
e^\mu(0,+1) &\overset{(955)}{=} -2^{-\frac{1}{2}}(1,i,0,0)^T, \\
e^\mu(0,-1) &\overset{(956)}{=} 2^{-\frac{1}{2}}(1,-i,0,0)^T\;. \qquad (959)
\end{aligned}
$$

- Uočiti sljedeća svojstva $e^\mu(\vec{p},\sigma)$ funkcija

$$
e^{\mu *}(0,\sigma) \overset{(959)}{=} (-1)^\sigma e^\mu(0,-\sigma), \qquad (960)
$$

$$
\begin{aligned}
e^0(0,\sigma) &\overset{(959)}{=} 0 \qquad (961)\\
\Rightarrow \quad p_\mu e^\mu(\vec{p},\sigma) &= -m e^0(0,\sigma) \overset{(961)}{=} 0\;; \qquad (962)
\end{aligned}
$$

$$
e_\mu(\vec{p},\sigma)e^{\mu *}(\vec{p},\sigma') \;=\; e_\mu(0,\sigma)e^{\mu *}(0,\sigma') \overset{(959)}{=} \delta_{\sigma\sigma'}, \qquad (963)
$$

$$
\begin{aligned}
\{\Pi^{\mu\nu}(0)\} &\equiv \Big\{\sum_\sigma e^\mu(0,\sigma)e^{\nu *}(0,\sigma)\Big\} \\
&\overset{(959)}{=} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} = \Big(\eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}\Big)\Big|_{p=(0,0,0,m)}, \qquad (964)\\
\{\Pi^{\mu\nu}(\vec{p})\} &\overset{(964)}{\equiv} \Big\{\sum_\sigma e^\mu(\vec{p},\sigma)e^{\nu *}(\vec{p},\sigma)\Big\} \overset{(964)}{=} \eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}\;. \qquad (965)
\end{aligned}
$$

- Pokažimo da je $\Pi(\vec{p})$ projektor na prostor 4-vektora ortogonalnih na p

$$
\begin{aligned}
\Pi^{\mu}{}_{\nu}(\vec{p})\, p^{\nu} &= \left(\delta^{\mu}{}_{\nu} + \frac{p^{\mu}p_{\nu}}{m^2}\right) p^{\nu} \;=\; 0, \\
\Pi^{\mu}{}_{\nu}(\vec{p}) e^{\nu}(\vec{p},\sigma) &= \sum_{\sigma'} e^{\mu}(\vec{p},\sigma')\delta_{\sigma'\sigma} \;=\; e^{\mu}(\vec{p},\sigma), \\
\Pi^{\mu}{}_{\rho}(\vec{p})\Pi^{\rho}{}_{\nu}(\vec{p}) &= \sum_{\sigma\sigma'} e^{\mu}(\vec{p},\sigma)\delta_{\sigma'\sigma} e^{\nu *}(\vec{p},\sigma') \;=\; \Pi^{\mu}{}_{\nu}(\vec{p})\ . \qquad (966)
\end{aligned}
$$

Jednadžba (966) pokazuje da $\Pi(\vec{p})$ idempotentna matrica, što je nužno svojstvo projektora. Jednadžbe (966) i (966) pokazuju da se za vektore $e(\vec{p},\sigma)$ $\Pi(\vec{p})$ ponaša kao kao jedinica i da je ortogonalan na p, što je svojstvo projektora na smjer ortogonalan na p smjer. Q.E.D.

$*$ **Polja poništenja i stvaranja**

- Uvrštavanjem koeficijentnih funkcija (957) u opće izraze za vektorska polja stvaranja i poništenja (922,923) nalazimo

$$\phi^{+\mu}(x) \;=\; \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\sigma} e^{\mu}(\vec{p},\sigma)a(\vec{p},\sigma)e^{ip\cdot x}, \qquad (967)$$

$$\phi^{-\mu}(x) \;=\; \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\sigma} e^{\mu *}(\vec{p},\sigma)a^{\dagger}(\vec{p},\sigma)e^{-ip\cdot x} \;=\; \phi^{+\mu\dagger}(x)\ . \qquad (968)$$

$*$ **Ispunjenje uvjeta Lorentzove invarijantnosti S matrice**

$\cdot$ **Prvi uvjet**

- Prvi uvjet (708,828) (vidi i (840)) je ispunjen ako za svako polje $\phi^{\pm\mu}(x)$ indeksa $^{\mu}$ postoji u $\mathcal{H}(x)$ veličina indeksa $_{\mu}$ suprotne L.T. Drugim riječima svi Lorentzovi indeksi polja moraju biti kontrahirani u $\mathcal{H}(x)$.

$\cdot$ **Drugi uvjet**

- Drugi uvjet (715,829) je ispunjen ako je $\mathcal{H}(x)$ izgradjen od polja koja za prostornolike intervale $x-y$ (anti)komutiraju.
- Bilo koje dva $\phi^{+\mu}(x)$ polja medjusobno (anti)komutiraju i bilo koja dva polja $\phi^{-\mu}(x)$ polja medjusobno (anti)komutiraju za bilo koje intervale $x-y$. Medjutim, $\phi^{+\mu}(x)$ polje ne (anti)komutira sa $\phi^{-\nu}(y)$ poljem,

$$[\phi^{+\mu}(x), \phi^{-\nu}(y)]_{\pm}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p d^3p'}{(2p^0 2p'^0)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\sigma\sigma'} e^{\mu}(\vec{p},\sigma)e^{\nu *}(\vec{p}',\sigma')e^{ip\cdot x - ip'\cdot y}[a(\vec{p},\sigma), a^{\dagger}(\vec{p}',\sigma')]_{\pm} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\, e^{ip\cdot(x-y)}\, \Pi^{\mu\nu}(\vec{p}) \; = \; \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\left(\eta^{\mu\nu} + \frac{p^{\mu}p^{\nu}}{m^2}\right) e^{ip\cdot(x-y)} \qquad (969) \\
&= \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{m^2}\right)\Delta_+(x-y), \qquad (970)
\end{aligned}
$$

gdje je $\Delta_+(x-y)$ (anti)komutator skalarnih polja (896).

- Analogno kao kod skalarnih polja, drugi Lorentzov uvjet se ostvaruje izražavajući $\mathcal{H}$ preko linearnih kombinacija polja poništenja i polja stvaranja,

$$
v^{\mu}(x) \;=\; \kappa\phi^{+\mu}(x) + \lambda\phi^{-\mu}(x), \qquad (971)
$$

i zahtjevajući da su komutatori polja za prostornolike intervale jednaki nuli. Zahvaljujući parnosti $\Delta_+(x-y)$ u $x-y$, izrazi za komutatore za prostornolike intervale su jednaki

$$
\begin{aligned}
[v^{\mu}(x), v^{\nu}(y)]_{\mp} &= \kappa\lambda(1\mp 1)\left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{m^2}\right]\Delta_+(x-y), \qquad (972) \\
[v^{\mu}(x), v^{\nu\dagger}(y)]_{\mp} &= (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2)\left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{m^2}\right]\Delta_+(x-y)\;. \qquad (973)
\end{aligned}
$$

- Samo komutator u jednadžbi (972) iščezava i samo komutator u jednadžbi (973) iščezava ako je $|\kappa| = |\lambda|$. To pokazuje da je **realno vektorsko polje bozonsko polje** čiji konstituenti zadovoljavaju Bose-Einsteinovu statistiku.

$*$ Podešavanje faza, redefinicija polja i standardni oblik vektorskog polja

- Podešavanjem faza operatora stvaranja i poništenja kao kod realnog skalarnog polja (vidi (903)) može se postići jednakost $\kappa = \lambda$. Redefinicijom polja tako da apsorbira faktor κ dobijamo standardni zapis realnog (nenabijenog) vektorskog polja,

$$
\begin{aligned}
v^{\mu}(x) &= \phi^{+\mu}(x) + \phi^{-\mu}(x) \;=\; \phi^{+\mu}(x) + \phi^{+\mu\dagger}(x) \qquad (974) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\sigma}\left[e^{\mu}(\vec{p},\sigma)a(\vec{p},\sigma)e^{ip\cdot x} + e^{\mu *}(\vec{p},\sigma)a^{\dagger}(\vec{p},\sigma)e^{-ip\cdot x}\right]\;. \qquad (975)
\end{aligned}
$$

- Napomena : I kod vektorskog polja se relativna faza ϕ^+ i ϕ^- ne smije mijenjati kada je jednom odabrana. To kao i kod skalarnog polja znači da niti jedna transformacija na koju je teorija invarijantna ne smije mijenjati spomenutu relativnu fazu.

• **Nabijeno (kompleksno) vektorsko polje**

∗ **Vektorsko polje te pripadna polja stvaranja i poništenja**

- Ako čestice koje opisuju vektorsko polje $v^\mu(x)$ imaju neki sačuvani broj tada se (isto kao kod nabijenog skalarnog polja) ne može konstruirati $\mathcal{H}(x)$ od polja (974) jer je izgradjeno od operatora različitog naboja. Kao i kod nabijenog skalarnog polja polje se dobija zamjenom operatora stvaranja u njemu sa antičestičnim operatorima stvaranja,

$$\begin{aligned} v^\mu(x) &= \phi^{+\mu}(x) + \phi^{-\mu}(x) \;=\; \phi^{+\mu}(x) + \phi^{c+\mu\dagger}(x) && (976) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}} \sum_\sigma \Big[e^\mu(\vec{p},\sigma) a(\vec{p},\sigma) e^{ip\cdot x} + e^{\mu *}(\vec{p},\sigma) a^{c\dagger}(\vec{p},\sigma) e^{-ip\cdot x} \Big], && (977) \end{aligned}$$

gdje

$$\begin{aligned} [Q, a(\vec{p},\sigma)] &= -q a(\vec{p},\sigma), \\ [Q, a^{c\dagger}(\vec{p},\sigma)] &= q_c a^{c\dagger}(\vec{p},\sigma) \;=\; -q a^{c\dagger}(\vec{p},\sigma) \; . && (978) \end{aligned}$$

Formula (977) vrijedi i za realno vektorsko polje ako se identificira $a^c(\vec{p},\sigma) = a(\vec{p},\sigma)$.

Napomena : U izrazima (976,977) je prešutno pretpostavljeno da su koeficijentne valne funkcije iste kao za realno vektorsko polje. To je posljedica činjenice da su "rotacijske" jednadžbe (867), (868) iste kao za realno vektorsko polje. Zbog toga za njih vrijede i sve relacije koje smo dokazivali za realno vektorsko polje.

∗ **Lorentz invarijantnost S matrice**

- Prvi je uvjet (skalarnost $\mathcal{H}(x)$) ispunjen pod istim uvjetima kao za realno vektorsko polje : svi Lorentzovi indeksi polja moraju biti "pokontrahirani".

- Drugi uvjet (komutativnost dva $\mathcal{H}(x)$ za prostornoliki interval $x-y$) ispunjen je samo za bozonska vektorska polja, jer od (anti)komutatora

$$\begin{aligned} [v^\mu(x), v^\nu(y)]_\mp &= 0, \\ [v^\mu(x), v^{\nu\dagger}(y)]_\mp &= [\phi^{+\mu}(x), \phi^{+\nu\dagger}(y)]_\mp + [\phi^{+c\mu\dagger}(x), \phi^{+c\nu}(y)]_\mp \\ &= \Big[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{m^2}\Big] \Delta_+(x-y) \mp \Big[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{m^2}\Big] \Delta_+(y-x) \\ &= \Big[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial_x^\mu\partial_x^\nu}{m^2}\Big] \underbrace{[\Delta_+(x-y) \mp \Delta_+(y-x)]}_{\Delta(x-y)}, && (979) \end{aligned}$$

u jednadžbi (979) samo komutator daje nulu. U trećem redu je upotrebljena parnost $\Delta_+(x-y)$ u $x-y$. Ukratko

$$[v^\mu(x), v^{\nu\dagger}(x)] \;=\; \Big[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{m^2}\Big] \Delta(x-y) \xrightarrow{(x-y)^2>0} 0 \; . \qquad (980)$$

□ Jednadžbe gibanja za vektorsko polje

- Konstruirano realno i kompleksno vektorsko polje zadovoljavaju dvije jednadžbe gibanja.
- Kao prvo, budući da je jedina x zavisnost sadržana u Fourieovim funkcijama $e^{ip\cdot x}$, polje zadovoljava Klein-Gordanovu jednadžbu,

$$(\Box - m^2)v^\mu(x) \;\; = \;\; 0 \; . \tag{981}$$

(D : $(\Box - m^2)e^{ip\cdot x} = (-p^2 - m^2)e^{ip\cdot x} = 0$.)

- Nadalje, budući da koeficijentne funkcije $e^\mu(\vec{p},\sigma)$ zadovoljavaju (962) ispunjena je još jedna jednadžba,

$$\partial_\mu v^\mu(x) \;\; = \;\; 0, \tag{982}$$

koja ujedno predstavlja uvjet da polje v nema komponentu spina 0.

□ Nemogućnost $m \to 0$ prijelaza sa teorije masivnog vektorskog polja na teoriju bezmasenog

- Za $m = 0$ jednadžbe (981) i (982) su jednadžbe za elektromagnetsko polje uz Lorentzov uvjet u kvantnoj elektrodinamici (QED).
- Ipak prijelaz za teorije masivnog vektorskog polja na teoriju bezmasenog (konkretno na kvantnu elektrodinamiku (QED)) nije moguć. Problem je u sljedećem. Gustoća Hamiltonijana medjudjelovanja čestice spina 1 i spinornog polja je $\mathcal{H} = J_\mu v^\mu$, gdje je J_μ bilo kakva 4-vektorska struja. Kvadriranjem matričnog elementa i sumiranjem po spinovima vektorske čestice dobija se brzina prijelaza proporcionalna

$$\sum_\sigma |\langle J_\mu\rangle e^\mu(\vec{p},\sigma)|^2 \;\; = \;\; \langle J_\mu\rangle\langle J_\nu\rangle^* \Pi^{\mu\nu}(\vec{p}), \tag{983}$$

gdje je $\langle J_\mu\rangle$ matrični element struje izmedju početnog i konačnog stanja svih čestica osim vektorske. Iz drugog člana u izrazu za $\Pi^{\mu\nu}(\vec{p})$,

$$(965) \;\; \equiv \;\; \{\Pi^{\mu\nu}(\vec{p})\} \;\; = \;\; \eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2},$$

vidi se da u limesu $m \to 0$ brzina prijelaza teži u beskonačnost.
- **Rješenje :** Taj se problem može riješiti jedino ako se pretpostavi $p_\mu\langle J^\mu\rangle = 0$ odnosno

$$\partial_\mu\langle J^\mu\rangle = 0 \; . \tag{984}$$

Drugim riječima struja koja se veže na bezmasenu vektorsku česticu mora biti sačuvana. Polarizacija u vremenskom "smjeru" $e^\mu(\vec{p},t) = p^\mu/m$ za bezmasene čestice ne razlikuje od polarizacije za $\sigma = 0$. Npr. za česticu koja se giba u z smjeru u limesu $m \to 0$ ($\beta \to 1$)

$$\begin{aligned} e^\mu(\vec{p},t) &= (0,0,\beta\gamma,\gamma) \to (0,0,\gamma,\gamma), \\ e^\mu(\vec{p},0) &= (0,0,\gamma,\beta\gamma) \to (0,0,\gamma,\gamma)\ . \end{aligned} \tag{985}$$

Zbog toga se uvjet (984) može shvatiti kao nemogućnost emisije bezmasene vektorske čestice heliciteta 0, odnosno kao ne postojanje heliciteta 0 za bezmasenu česticu. Na kraju to je u skladu sa prebrojavanjem stanja za masivnu i bezmasenu vektorsku česticu. Masivna čestica spina 1 ima tri stupnja slobode (spinske projekcije $+1, 0, -1$), a bezmasena samo dva (heliciteti ± 1).

• P, T i C transformacije vektorskog polja

∗ Identiteti za koeficijentne funkcije

- U izvodu za P i T transformaciju vektorskog polja trebaju nam sljedeći identiteti za koeficijentne funkcije:

$$e^\mu(\mathcal{P}p,\sigma) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu e^\nu(p,\sigma), \tag{986}$$

$$(-1)^{1+\sigma} e^{\mu *}(\mathcal{P}p,-\sigma) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu e^\nu(p,\sigma)\ . \tag{987}$$

Dokažimo ih :

$$\begin{aligned} e^\mu(\mathcal{P}p,\sigma) &\overset{(958)}{=} L(\mathcal{P}p)^\mu{}_\nu e^\nu(0,\sigma) \overset{(348)}{=} (\mathcal{P}L(p)\mathcal{P})^\mu{}_\nu e^\nu(0,\sigma) \\ &\overset{(959)}{=} (\mathcal{P}L(p))^\mu{}_\nu(-e^\nu(0,\sigma)) \overset{(958)}{=} -\mathcal{P}^\mu{}_\nu e^\nu(p,\sigma) \qquad \text{Q.E.D. (986)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)^{1+\sigma} e^{\mu *}(\mathcal{P}p,-\sigma) &\overset{(958)}{=} (-1)^{1+\sigma}(L(\mathcal{P}p)^*)^\mu{}_\nu e^{\nu *}(0,-\sigma) \\ &\overset{(348)}{=} (-1)^{1+\sigma}((\mathcal{P}L(p)\mathcal{P})^*)^\mu{}_\nu e^{\nu *}(0,-\sigma) \overset{(959)}{=} (\mathcal{P}L(p)^*)^\mu{}_\nu((-1)^\sigma e^{\nu *}(0,-\sigma)) \\ &\overset{(960)}{=} (\mathcal{P}L(p))^\mu{}_\nu e^\nu(0,\sigma) \overset{(958)}{=} \mathcal{P}^\mu{}_\nu e^\nu(p,\sigma) \qquad \text{Q.E.D. (987)} \end{aligned}$$

U prvoj jednakosti trećeg retka dokaza relacije (987) primjenjena je realnost matrica $\mathcal{P}$ i $L(p)$.

∗ P, T i C transformacije operatora stvaranja i poništenja

- Uporabom P, C i T transformacija operatora stvaranja za masivne čestice, (791), (790) i (792), dobijamo P, C i T transformacije za operatore poništenja vektorskih čestica i operatore stvaranja vektorskih antičestica koji se javljaju u izrazu za vektorsko polje (976),

$$\begin{aligned}
Pa(p,\sigma)P^{-1} &\overset{(791)}{=} \eta^* \, a(\mathcal{P}p,\sigma), \qquad & Pa^{c\dagger}(p,\sigma)P^{-1} &\overset{(791)}{=} \eta_c \, a^{c\dagger}(\mathcal{P}p,\sigma) \ ; && (988)\\
Ca(p,\sigma)C^{-1} &\overset{(790)}{=} \xi^* \, a^c(p,\sigma), \qquad & Ca^{c\dagger}(p)C^{-1} &\overset{(790)}{=} \xi_c \, a^{\dagger}(p) \ ; && (989)\\
Ta(p,\sigma)T^{-1} &\overset{(792)}{=} \zeta^*(-1)^{1-\sigma} \, a(\mathcal{P}p-\sigma), \\
Ta^{c\dagger}(p,\sigma)T^{-1} &\overset{(792)}{=} \zeta_c(-1)^{1-\sigma} \, a^{c\dagger}(\mathcal{P}p-\sigma) \ . &&&& (990)
\end{aligned}$$

$*$ P, T i C transformacije vektorskog polja

Iz transformacija (988), (990) i (989) te identiteta (986) i (987) slijede sljedeći izrazi za P, T i C transformaciju vektorskog polja,

$$Pv^\mu(x)P^{-1} = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu(\eta^*\phi^{+\nu}(\mathcal{P}x)) + \eta_c\phi^{-c\nu}(\mathcal{P}x)), \tag{991}$$

$$Tv^\mu(x)T^{-1} = \mathcal{P}^\mu{}_\nu(\zeta^*\phi^{+\nu}(-\mathcal{P}x)) + \zeta_c\phi^{-c\nu}(-\mathcal{P}x)), \tag{992}$$

$$Cv^\mu(x)C^{-1} = (\xi^*\phi^{-c\mu\dagger}(x)) + \xi_c\phi^{+\mu\dagger}(x)) \ . \tag{993}$$

D:
Dokaz eksplicite provodimo za $\phi^{+\mu}(x)$. Rezultati za $\phi^{-\mu}(x)$ slijede po analogiji.

$$\begin{aligned}
P\phi^{+\mu}(x)P^{-1} &\overset{(988)}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}} \sum_\sigma \left[e^\mu(p,\sigma)\eta^* a(\mathcal{P}p,\sigma)e^{ip\cdot x} \right] \\
&= \eta^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}} \sum_\sigma \left[e^\mu(\mathcal{P}p,\sigma)a(p,\sigma)e^{ip\cdot \mathcal{P}x} \right] \\
&\overset{(986)}{=} \eta^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}} \sum_\sigma \left[(-\mathcal{P}^\mu{}_\nu e^\nu(p,\sigma))a(p,\sigma)e^{ip\cdot \mathcal{P}x} \right] \\
&= -\eta^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu \phi^{+\nu}(\mathcal{P}x),
\end{aligned} \tag{994}$$

$$P\phi^{-c\mu}(x)P^{-1} = -\eta_c\mathcal{P}^\mu{}_\nu \phi^{-\nu}(\mathcal{P}x) \ ; \tag{995}$$

$$\begin{aligned}
T\phi^{+\mu}(x)T^{-1} &\overset{(990)}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}} \sum_\sigma \left[e^{\mu *}(p,\sigma)\zeta^*(-1)^{1-\sigma}a(\mathcal{P}p,-\sigma)e^{-ip\cdot x} \right] \\
&= \zeta^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}} \sum_\sigma \left[(-1)^{1+\sigma}e^{\mu *}(\mathcal{P}p,-\sigma)a(p,\sigma)e^{ip\cdot(-\mathcal{P}x)} \right] \\
&\overset{(987)}{=} \zeta^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}} \sum_\sigma \left[(\mathcal{P}^\mu{}_\nu e^\nu(p,\sigma))a(p,\sigma)e^{ip\cdot(-\mathcal{P}x)} \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \zeta^* \mathcal{P}^\mu{}_\nu \phi^{+\nu}(-\mathcal{P}x), \qquad (996)\\
T\phi^{-c\mu}(x)T^{-1} &= \zeta_c \mathcal{P}^\mu{}_\nu \phi^{-c\nu}(-\mathcal{P}x)\ ; \qquad (997)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C\phi^{+\mu}(x)C^{-1} &\overset{(989)}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}} \sum_\sigma \left[e^\mu(p,\sigma)\xi^* a^c(p,\sigma)e^{ip\cdot x}\right]\\
&= \xi^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2p^0)^{\frac{1}{2}}} \sum_\sigma \left[e^{\mu*}(p,\sigma)a^{c\dagger}(p,\sigma)e^{-ip\cdot x}\right]^\dagger\\
&= \xi^* \phi^{-c\mu\dagger}(x), \qquad (998)
\end{aligned}
$$

$$
C\phi^{-c\mu}(x)C^{-1} = \xi_c \phi^{+\mu\dagger}(x)\ . \qquad (999)
$$

Iz jednadžbi (994-999) slijede jednakosti (991), (992) i (993).

∗ Relacije čestičnih i antičestičnih faza

- Budući da niti jedna transformacija ne smije mijenjati relativnu fazu polja poništenja i polja stvaranja, sljedeće jednakosti moraju biti zadovoljene (iste su kao kod skalarnog polja),

$$
\begin{aligned}
\eta^* &= \eta_c,\\
\zeta^* &= \zeta_c,\\
\xi^* &= \xi_c\ . \qquad (1000)
\end{aligned}
$$

- Fizikalne posljedice su iste kao kod skalarnog polja : za čestično-antičestično stanje ukupni produkt internih pariteta jednak je $\eta\eta_c = 1$ i ukupni produkt C-pariteta jednak je $\xi\xi_c = 1$.
- Iz jednakosti (1000) slijede konačni izrazi za P, T i C transformaciju vektorskog polja,

$$
\begin{aligned}
Pv^\mu(x)P^{-1} &= -\eta^* \mathcal{P}^\mu_\nu v^\nu(\mathcal{P}x), \qquad (1001)\\
Tv^\mu(x)T^{-1} &= \zeta^* \mathcal{P}^\mu_\nu v^\nu(-\mathcal{P}x), \qquad (1002)\\
Cv^\mu(x)C^{-1} &= \xi^* v^{\mu\dagger}(x)\ . \qquad (1003)
\end{aligned}
$$

∗ Paritet vektorskog polja

- Predznak (-1) u jednadžbi (1001) znači da polje koje se transformira kao vektor, bez dodatne faze η uz matricu $\mathcal{P}^\mu{}_\nu$ ima paritet -1.

5.4 Diracov formalizam

□ **Spinorna reprezentacija Lorentzove ($SL(2,C)$ grupe) (Dirac 1928, Cartan 1913)**

- struktura i svojstva bilo kojeg kvantnog polja slijedi iz svojstava reprezentacije (HOMOGENE) Lorentzove grupe kojom se opisuje njena transformacija na Poincaréovu grupu (vidi jednadžbe (835) i (836)).
- (spin 1/2) reprezentacija $SL(2,C)$ (grupe pokrivanja Lorentzove grupe) koju su otkrili Dirac i Cartan je baza za sve reprezentacije (i spinorne i tenzorske) $SL(2,C)$ grupe odnosno Lorentzove grupe u bilo kojem broju dimenzija.

□ **Reprezentacija homogene Lorentzove grupe**

Pod reprezentacijom homogene Lorentzove grupe misli se na skup matrica $D(\Lambda)$ koje zadovoljavaju ista multiplikacijska pravila kao operatori $U(\Lambda)$,

$$D(\Lambda)D(\overline{\Lambda}) = D(\Lambda\overline{\Lambda}) \, . \tag{1004}$$

Za infinitezimalne L. transf.,

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}, \qquad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \tag{1005}$$

matrica $D(\Lambda)$,

$$D(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}, \qquad \mathcal{J}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}^{\nu\mu}, \tag{1006}$$

slijedi da matrice-generatori L.T. zadovoljavaju komutacijske relacije (vidi izvod u poglavlju §2.4., i posebno Eq. (192))

$$i[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}\mathcal{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\mathcal{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu}\mathcal{J}^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu}\mathcal{J}^{\rho\mu} \, . \tag{1007}$$

□ **Diracova (spin-$\frac{1}{2}$) reprezentacija Lorentzove grupe (algebre)**

∗ Definicija

- Spinorna reprezentacija Lorentzove grupe dobija se konstruirajući matrice γ^{μ}, koje zadovoljavaju Cliffordovu algebru,

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu}, \tag{1008}$$

i definirajući

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} \;=\; -\frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] \qquad (\mathrm{BD}:\mathcal{J}^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu])\ . \tag{1009}$$

Za matrice $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ vrijedi jednakost

$$[\mathcal{J}^{\mu\nu},\gamma^\rho] \;=\; -i\gamma^\mu\eta^{\nu\rho}+i\gamma^\nu\eta^{\mu\rho}, \tag{1010}$$

a odatle slijedi da su komutacijske relacije (1007) ispunjene.
D:
Uporabom definicije (1009), antikomutacijske relacije (1008) i identiteta (878)$\equiv [AB,C]_- = -[A,C]_+B + A[B,C]_+$ dobijamo

$$\begin{aligned}
[\mathcal{J}^{\mu\nu},\gamma^\rho] &= [-\frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu],\gamma^\rho] \\
&= -\frac{i}{4}(\gamma^\mu 2\eta^{\nu\rho}-\gamma^\nu 2\eta^{\mu\rho})(1+1) \;=\; -i\gamma^\mu\eta^{\nu\rho}+i\gamma^\nu\eta^{\mu\rho} \qquad \text{Q.E.D. (1010)}\ .
\end{aligned}$$

Odatle

$$\begin{aligned}
i[\mathcal{J}^{\mu\nu},\mathcal{J}^{\rho\sigma}] &= i\Big[\mathcal{J}^{\mu\nu},-\frac{i}{4}[\gamma^\rho,\gamma^\sigma]\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big(\underbrace{[\mathcal{J}^{\mu\nu},\gamma^\rho]\gamma^\sigma}_{a}+\underbrace{\gamma^\rho[\mathcal{J}^{\mu\nu},\gamma^\sigma]}_{b}-\underbrace{[\mathcal{J}^{\mu\nu},\gamma^\sigma]\gamma^\rho}_{b}-\underbrace{\gamma^\sigma[\mathcal{J}^{\mu\nu},\gamma^\rho]}_{a}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(\Big[\underbrace{-i\eta^{\nu\rho}(\gamma^\mu\gamma^\sigma-\gamma^\sigma\gamma^\mu)+i\eta^{\mu\rho}(\gamma^\nu\gamma^\sigma-\gamma^\sigma\gamma^\nu)}_{a}\Big]-\Big[\underbrace{(\rho\leftrightarrow\sigma)}_{b}\Big]\Big) \\
&= \eta^{\nu\rho}\mathcal{J}^{\mu\sigma}-\eta^{\mu\rho}\mathcal{J}^{\nu\sigma}-\eta^{\sigma\mu}\mathcal{J}^{\rho\nu}+\eta^{\sigma\nu}\mathcal{J}^{\rho\mu} \qquad \text{Q.E.D. (1007)}
\end{aligned}$$

∗ Pretostavka ireducibilnosti

Za γ^μ matrice se pretpostavlja da su **ireducibilne** tj. da niti jedan pravi podprostor nije invarijantan na djelovanje svih γ^μ matrica. Inače bi se mogla birati polja sa manjim brojem komponenti koje bi se transformirale sa (1006) i sa ireducibilnim γ^μ manje dimenzije.

∗ L.T. γ^μ, $\mathbb{1}$, $\mathcal{J}^{\mu\nu}$

- Iz (1006) i (1010) takodjer slijedi da se matrice γ^μ transformiraju kao vektori, što po definiciji znači da vrijedi

$$D(\Lambda)\gamma^\mu D^{-1}(\Lambda) \;=\; \Lambda_\nu{}^\mu\gamma^\nu\ . \tag{1011}$$

D:
Iz (1010) slijedi

$$[\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathcal{J}^{\alpha\beta},\gamma^\mu] \;=\; \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\eta^{\beta\mu}-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\gamma^\beta\eta^{\alpha\mu} \;=\; \omega_\alpha{}^\mu\gamma^\alpha\ . \tag{1012}$$

Iz (1006) slijedi izraz za konačnu L.T.

$$D(\Lambda) \;=\; e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}} \;. \tag{1013}$$

Odatle rabeći Hausdorfovu formulu i (1012) slijedi

$$\begin{aligned} D(\Lambda)\gamma^\mu D^{-1}(\Lambda) &= e^{\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathcal{J}^{\alpha\beta}}\gamma^\mu e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathcal{J}^{\alpha\beta}} \;=\; e^{[\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathcal{J}^{\alpha\beta},.]}\gamma^\mu \\ &= (1+\omega+\frac{\omega^2}{2}+\ldots)_\alpha^{\;\mu}\gamma^\alpha \;=\; (e^\omega)_\alpha^{\;\mu}\gamma^\alpha \;=\; \Lambda_\alpha^{\;\mu}\gamma^\alpha \;. \end{aligned} \tag{1014}$$

(Posebno,

$$D(L(p))\gamma^0 D^{-1}(L(p)) \;=\; L(p)_\nu^{\;0}\gamma^\nu \overset{(251)}{=} \frac{p^0}{m}\gamma^0 + \frac{-\vec{p}}{m}\vec{\gamma} \;=\; -\frac{1}{m}p_\mu\gamma^\mu \;. \tag{1015}$$

Ovu relaciju ćemo trebati poslije.)
- analogno se nalazi da se $\mathbb{1}$ transformira kao skalar a $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ kao (antisimetrični) tenzor,

$$D(\Lambda)\mathbb{1}D^{-1}(\Lambda) \;=\; \mathbb{1}, \tag{1016}$$
$$D(\Lambda)\mathcal{J}^{\mu\nu}D^{-1}(\Lambda) \;=\; \Lambda_\rho^{\;\mu}\Lambda_\sigma^{\;\nu}\mathcal{J}^{\rho\sigma} \;. \tag{1017}$$

∗ Baza Diracove reprezentacije

- Iz γ matrica mogu se konstruirati i drugi antisimetrični tenzori-matrice, npr.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\mu\nu\rho} &\equiv \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]} \\ &= \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu, \end{aligned} \tag{1018}$$
$$\mathcal{P}^{\mu\nu\rho\sigma} \;\equiv\; \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^{\sigma]} \;. \tag{1019}$$

gdje uglate zagrade označuju sumu svih permutacija indeksa obuhvaćenih zagradom i predznaka + (−) koji se pridjeljuje članovima sa parnom (neparnom) permutacijom indeksa (primjer koji to ilustrira je dan za $\mathcal{A}^{\mu\nu\rho}$).
- Rabeći antikomutacijsko pravilo (1008) svaki produkt γ^μ matrica može se napisati preko sume antisimetričnih produkata γ^μ matrica. Stoga one čine bazu Diracove reprezentacije.

∗ Dimenzija prostora i dimenzija baze Diracove algebre

· dimenzija prostora d odgovara broju μ indeksa, $\mu = 1, 2, \ldots, d-1, 0$
· U 4 dimenzijskom prostoru antisimetrični tenzor može imati samo 4 indeksa, tako da baza Diracove algebre sadrži samo matrice

$$\mathbb{1},\; \gamma^\mu,\; \mathcal{J}^{\mu\nu},\; \mathcal{A}^{\mu\nu\rho},\; \mathcal{D}^{\mu\nu\rho\sigma} \;. \tag{1020}$$

Ukupni broj antisimetričnih matrica je

$$\begin{aligned} d_D &= 1+4+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \\ &= \sum_{i=0}^{4}\left(\begin{array}{c} 4 \\ i \end{array}\right) \;=\; (1+1)^4 \;=\; 16, \end{aligned} \tag{1021}$$

(u sumi su redom brojevi antisimetričnih matrica sa 0, 1, 2, 3 i 4 Lorentova indeksa). Nadalje, matrice (1020) se različito transformiraju na L.T. što znači da su nezavisne (to se može provjeriti i gledajući tragove produkata parova matrica). Dakle Diracova algebra ima 16 nezavisnih matrica baze. Stoga je dimenzija γ^μ matrica jednaka $\sqrt{16}=4$.
· U prostoru sa parnim brojem dimenzija $d=2m$, $m\in\mathbb{N}$ broj antisimetričnih matrica

$$\mathbb{1},\ \gamma^\mu,\ \ldots\ ,\gamma^{[\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2m}]}, \tag{1022}$$

jednak je

$$\sum_{i=1}^{d}\left(\begin{array}{c} d \\ i \end{array}\right) \;=\; 2^d \;=\; 2^{2m}\ . \tag{1023}$$

Nadalje, matrica $\gamma^{[\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2m}]}$ nije proporcionalna jediničnoj matrici jer antikomutira sa svim γ^μ matricama,

$$\gamma^{[\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2m}]}\times\gamma^\mu \;=\; (-1)^{2m-1}\gamma^\mu\times\gamma^{[\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2m}]} \qquad \text{Q.E.D.} \tag{1024}$$

Iz toga proizlazi da sve matrice imaju različita transformacijska svojstva, tj. da su nezavisne. Dimenzija Diracove baze je stoga jednaka broju antisimetričnih matrica $d_D=2^d$, odnosno dimenzija matrica je $2^{d/2}=2^m$.
· U prostoru sa neparnim brojem dimenzija, $d=2m-1$, $m\in\mathbb{N}$, antisimetrične matrice,

$$\mathbb{1},\ \gamma^\mu,\ \ldots\ \gamma^{[\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2m-1}]}, \tag{1025}$$

nisu sve nezavisne, jer matrica $\gamma^{[\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2m-1}]}$ komutira sa svim γ^μ matricama, što znači da je proporcionalna jediničnoj matrici; iz toga nadalje slijedi da su antisimetrične matrice $\gamma^{[\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_i]}$ i $\gamma^{[\mu_{i+1}}\cdots\gamma^{\mu_{2m-1}]}$ medjusobno proporcionalne:

$$\gamma^{[\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2m-1}]}\times\gamma^\mu \;=\; (-1)^{2m-2}\gamma^\mu\times\gamma^{[\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2m-1}]} \tag{1026}$$

$$\Rightarrow\quad \gamma^{[\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2m-1}]} \;\propto\; \mathbb{1} \tag{1027}$$

$$\Rightarrow\quad \gamma^{[\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_i]} \;\propto\; \varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_{2m-1}}\gamma_{[\mu_{i+1}}\cdots\gamma_{\mu_{2m-1}]}\ . \tag{1028}$$

Dimenzija Diracove baze, odnosno broj nezavisnih antisimetričnih matrica jednak je polovici ukupnog broja antisimetričnih matrica,

$$d_D \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\left(\begin{array}{c} d \\ i \end{array}\right) \;=\; 2^{d-1} \;=\; 2^{2m-2}\ . \tag{1029}$$

Dimenzija matrica je stoga $2^{(d-1)/2} = 2^{m-1}$. Npr. u 3-dimenzijskom prostoru γ^μ matrice se mogu reprezentirati sa 2-dimenzijskim Paulijevim matricama.

$*$ **Paritet**

- Diracov formalizam prirodno uključuje paritetnu transformaciju, koja se opisuje matricom

$$\beta \;=\; i\gamma^0 \;. \tag{1030}$$

Iz (1030) i antikomutacijskih relacija (1008) slijedi ($\beta^2 = 1 \;\Rightarrow \beta^{-1} = \beta$; $\beta \mathbb{1} \beta^{-1} = 1$)

$$\beta\gamma^i\beta^{-1} \;=\; -\gamma^i, \qquad \beta\gamma^0\beta^{-1} \;=\; \gamma^0 \;. \tag{1031}$$

Paritetna transformacija svih antisimetričnih produkata γ^μ matrica slijedi iz (1031) (svaka γ^i (γ^0) matrica dobija predznak -1 ($+1$)). Posebno za genaratora L.T., $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ su

$$\beta\mathcal{J}^{ij}\beta^{-1} \;=\; \mathcal{J}^{ij}, \tag{1032}$$
$$\beta\mathcal{J}^{i0}\beta^{-1} \;=\; -\mathcal{J}^{i0} \;. \tag{1033}$$

$\square$ Eksplicitni izrazi za γ^μ matrice u 4 dimenzije

$*$ γ^μ matrice

- γ^μ matrice nisu jednoznačno zadane. Jedan od uobičajnih izbora je

$$\gamma^0 \;=\; -i\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i \;=\; -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \tag{1034}$$

Tu je $\mathbb{1}$ jedinična 2×2 matrica a σ^i su Paulijeve matrice.

$*$ γ^μ matrice u drugim reprezentacijama

- Može se pokazati da su drugi prikazi (reprezentacije) γ^μ matrica povezani sa reprezentacijom (1034) transformacijom sličnosti (Jauch & Rorlich).
- Reprezentacija (1034) je tzv. **kiralna reprezentacija**. Ona je podesna za ultrarelativističke probleme jer su sve γ^μ matrice istog off-dijagonalnog oblika i generatori L.T su blok-dijagonalni (vidi (1036). Za NR probleme podesnija je **Diracova reprezentacija** (20,22) u kojoj je γ^0 blok-dijagonalna.

$*$ Generatori L. transformacija

- Iz (1034) za generatore L. grupe (1009) se dobija ($\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1} + \varepsilon_{ijk}\sigma_k$, $\varepsilon_{123} = 1$)

$$\mathcal{J}^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k, \end{pmatrix} \tag{1035}$$

$$\mathcal{J}^{i0} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} . \tag{1036}$$

- Blok-dijagonalna forma generatora (1035,1036) daje **reducibilnost reprezentacija svojstvene ortokrone Lorentzove grupe** na direktnu sumu ireducibilnih reprezentacija koje zadovoljavaju

$$\mathcal{J}^{ij} = \mp i\varepsilon_{ijk}\mathcal{J}^{k0} . \tag{1037}$$

- Primjetimo da generatori L.T. **nisu svi hermitski** ($\mathcal{J}^{ij}$ su hermitski a $\mathcal{J}^{i0}$ su antihermitski), što znači da L.T. polja **nisu unitarne**. Na ovo pitanje ćemo se vratiti kada će se govoriti o matricama kojima su reprezentirane diskretne simetrije.

$*$ Kompaktni zapis i svojstva antisim. tenzora (1019) i (1018)

. $\mathcal{P}^{\mu\nu\rho\sigma}$

- Iz ($\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ potpuno antisim tenzor, $\varepsilon^{0123} = 1$),

$$\begin{aligned} \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 &= -\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^2 = \dots \\ \Rightarrow \quad \mathcal{P}^{\mu\nu\rho\sigma} &= 4!\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = 4!\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} i\gamma_5, \end{aligned} \tag{1038}$$

gdje

$$\gamma_5 \equiv -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \overset{(1034)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{1039}$$

- γ_5 antikomutira sa γ^μ matricama (vidi (1024))

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 . \tag{1040}$$

- Odatle slijedi da je γ_5 pseudoskalar u smislu da komutira sa generatorima L.T. i antikomutira s paritetnom matricom β,

$$[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \gamma_5] = 0, \tag{1041}$$

$$\beta\gamma_5\beta^{-1} = -\gamma_5 . \tag{1042}$$

Pseudoskalarnost slijedi i iz transformacijskih svojstava na Lorentzove transformacije,

$$\begin{aligned} D(\Lambda)\gamma_5 D^{-1}(\Lambda) &= \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}D(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma D^{-1}(\Lambda) \\ &= \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda_\alpha{}^\mu\Lambda_\beta{}^\nu\Lambda_\gamma{}^\rho\Lambda_\delta{}^\sigma\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta \\ &= \det(\Lambda^{-1}) \times \frac{i}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta = \underbrace{\det(\Lambda^{-1})}_{\pm 1}\gamma_5 \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned} \tag{1043}$$

- $\gamma_5^2 = 1$

$$\gamma_5^2 \stackrel{(1039)}{=} 1 \ . \tag{1044}$$

- Naziv γ_5 je podesan jer u antikomutacijske relacije (1008) i (1040) pokazuju da γ^0, γ^1, γ^2, γ^3 i γ_5, čine Cliffordovu algebru 5-dimenzijskom prostoru.

· $\mathcal{A}^{\mu\nu\rho}$

- Tenzor $\mathcal{A}^{\mu\nu\rho}$ kad se pomnoži sa γ^σ, $\sigma \neq \mu, \nu, \rho$ dobija se

$$\mathcal{A}^{\mu\nu\rho}\gamma^\sigma \;=\; 3!\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \;=\; 3!\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} i\gamma_5, \tag{1045}$$

odakle slijedi množenjem (1045) sa γ_σ (bez sume : $\gamma_\mu\gamma^\mu = \mathbb{1}$)

$$\mathcal{A}^{\mu\nu\rho} \;=\; 3!\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} i\gamma_5\gamma_\sigma \qquad (\text{sa sumom po } \sigma)\ . \tag{1046}$$

Iako je rezultat (1046) množenjem sa γ^σ i bez sumacije po σ, konačni rezultat se može shvatiti kao da ima sumu po σ, jer $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ograničava sumu samo na jednu vrijednost σ.
- Eksplicitni izrazi za $\gamma^\mu\gamma_5$ slijede iz (1034) i (1039),

$$\gamma^0\gamma_5 \;=\; i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i\gamma_5 \;=\; i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \tag{1047}$$

- $\gamma^\mu\gamma_5$ je pseudovektor

$$D(\Lambda)\gamma^\mu\gamma_5 D^{-1}(\Lambda) \stackrel{(1011,1043)}{=} \det(\Lambda^{-1})\Lambda_\nu{}^\mu\gamma^\nu\gamma_5\ . \tag{1048}$$

$*$ Potpun skup matrica Diracove algebre

Matrice $\mathbb{1}$, γ^μ, $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, $\gamma^\mu\gamma_5$ i γ_5 tvore potpun skup matrica Diracove algebre u 4-dim prostoru.

□ Matrice uz diskretne simetrije

- pokazat ćemo da postoje tri matrične transformacije sličnosti koje su grubo govoreći ekvivalentne hermitskoj konjugaciji, transpoziciji i kompleksnoj kojugaciji matrica Diracove algebre.

$*$ β matrica

- Iz (1031) i (1034) slijedi eksplicitan izraz za paritetnu matricu β,

$$\beta \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{1049}$$

- Analizom jednadžbi (1034) i (1031) slijedi ($\beta = \beta^{-1}$, $\gamma^{0\,\dagger} = -\gamma^0$, $\gamma^{i\,\dagger} = \gamma^i$)

$$\beta\gamma^{\mu\dagger}\beta \;=\; -\gamma^\mu \;. \tag{1050}$$

Odatle rabeći (1009)

$$\beta\mathcal{J}^{\mu\nu\dagger}\beta \;=\; \mathcal{J}^{\mu\nu} \tag{1051}$$

$$(\beta\mathcal{J}^{ij}\beta \;=\; \mathcal{J}^{ij}, \qquad \beta\mathcal{J}^{i0}\beta \;=\; -\mathcal{J}^{i0}) \;. \tag{1052}$$

Nadalje, γ_5 matrica je hermitska i antikomutira sa β, pa

$$\beta\gamma_5^\dagger\beta = -\gamma_5 \;. \tag{1053}$$

Uporabom (1053) i (1050) slijedi

$$\beta(\gamma^\mu\gamma_5)^\dagger\beta \;=\; -\gamma^\mu\gamma_5 \;. \tag{1054}$$

Relacije (1050), (1051), (1053) i (1054) pokazuju da je operacija $\beta\ldots\beta$ do na predznak ekvivalentna hermitskoj konjugaciji matrica Diracove algebre.
- Zahvaljujući relaciji (1051) inverz L. transf. (1013) se može izraziti na sljedeći način

$$D^{-1}(\Lambda) \;=\; \beta D^\dagger(\Lambda)\beta, \tag{1055}$$

tj. $D(\Lambda)$ zadovoljava uvjet pseudounitarnosti.
D:

$$\begin{aligned} \beta D^\dagger(\Lambda)\beta &\overset{(1013)}{=} \beta\Big[e^{i\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}}\Big]^\dagger\beta \;=\; e^{-i\omega_{\mu\nu}\beta\mathcal{J}^{\mu\nu\dagger}\beta} \;=\; e^{-i\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}} \\ &= D^{-1}(\Lambda) \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned} \tag{1056}$$

$*$ Matrica $\mathcal{C}$

- Iz (1034) slijedi da su γ^μ matrice za $\mu = 0, 2$ simetrične a za $\mu = 1, 3$ antisimetrične. Odatle slijedi

$$\gamma_\mu^T \;=\; -\mathcal{C}\gamma_\mu\mathcal{C}^{-1}, \tag{1057}$$

gdje T označava transponiranje i

$$\mathcal{C} \equiv \gamma_2\beta \;=\; i\gamma^2\gamma^0 \;=\; -i\begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}. \tag{1058}$$

D:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1} &= (i\gamma^2\gamma^0)\times\gamma^\mu\times(-i(\gamma^0)^{-1}(\gamma^2)^{-1}) \\ &= \begin{cases} -\gamma^{0,2} = -\gamma^{0,2T} \\ +\gamma^{1,3} = -\gamma^{1,3T} \end{cases} = -\gamma^{\mu T} \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned} \tag{1059}$$

Odatle slijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\mu\nu}^T &= -\mathcal{C}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{C}^{-1} \ , && (1060)\\
\gamma_5^T &= +\mathcal{C}\gamma_5\mathcal{C}^{-1} \ , && (1061)\\
(\gamma_\mu\gamma_5)^T &= +\mathcal{C}\gamma_\mu\gamma_5\mathcal{C}^{-1} \ . && (1062)
\end{aligned}$$

D:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{C}^{-1} &= -\frac{i}{4}\mathcal{C}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\mathcal{C}^{-1} \overset{(1009)}{=} -\frac{i}{4}[\gamma_\mu^T,\gamma_\nu^T]\\
&= +\frac{i}{4}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]^T \overset{(1009)}{=} -\mathcal{J}_{\mu\nu}^T \qquad \text{Q.E.D. (1060)}\\
\mathcal{C}\gamma_5\mathcal{C}^{-1} &\overset{(1058)}{=} +\gamma_5\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1} \overset{(1040)}{=} +\gamma_5^T \qquad \text{Q.E.D. (1061)}\\
\mathcal{C}\gamma_\mu\gamma_5\mathcal{C}^{-1} &\overset{(1057,1061)}{=} (-\gamma_\mu^T)(+\gamma_5^T) = -(\gamma_5\gamma_\mu)^T\\
&\overset{(1040)}{=} (\gamma_\mu\gamma_5)^T \qquad \text{Q.E.D. (1062)}
\end{aligned}$$

Transformacije (1057,1060),1061,1062) i pripadni predznaci bitni su za transformacijska svojstva fermionskih struja na nabojnu konjugaciju.

$*$ Matrica $\beta\mathcal{C}$

Kombinirajući rezultate za β i $\mathcal{C}$ transformaciju matrica Diracove algebre dobijamo,

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu^* &= \beta\mathcal{C}\gamma_\mu\mathcal{C}^{-1}\beta \ ,\\
\mathcal{J}_{\mu\nu}^* &= -\beta\mathcal{C}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{C}^{-1}\beta \ ,\\
\gamma_5^* &= -\beta\mathcal{C}\gamma_5\mathcal{C}^{-1}\beta \ ,\\
(\gamma_\mu\gamma_5)^* &= -\beta\mathcal{C}\gamma_\mu\gamma_5\mathcal{C}^{-1}\beta \ . && (1063)
\end{aligned}$$

Te transformacije bit će bitne kod T inverzije fermionskih struja.

Rezime:

$$\begin{aligned}
\beta(\mathbb{1},\gamma_\mu,\mathcal{J}_{\mu\nu},\gamma_5\gamma_\mu,\gamma_5)\beta &= (\mathbb{1}^\dagger,-\gamma_\mu^\dagger,\mathcal{J}_{\mu\nu}^\dagger,-(\gamma_5\gamma_\mu)^\dagger,-\gamma_5^\dagger) && (1064)\\
\mathcal{C}(\mathbb{1},\gamma_\mu,\mathcal{J}_{\mu\nu},\gamma_5\gamma_\mu,\gamma_5)\mathcal{C}^{-1} &= (\mathbb{1}^T,-\gamma_\mu^T,-\mathcal{J}_{\mu\nu}^T,(\gamma_5\gamma_\mu)^T,\gamma_5^T) && (1065)\\
\beta\mathcal{C}(\mathbb{1},\gamma_\mu,\mathcal{J}_{\mu\nu},\gamma_5\gamma_\mu,\gamma_5)(\beta\mathcal{C})^{-1} &= (\mathbb{1}^*,\gamma_\mu^*,-\mathcal{J}_{\mu\nu}^*,-(\gamma_5\gamma_\mu)^*,-\gamma_5^*) && (1066)
\end{aligned}$$

Kako se BD i W γ_μ matrice razlikuju u biti za imaginarnu jedinicu, odgovarajuće BD transformacije se malo razlikuju (BD ima $\beta = \gamma^0$, $\mathcal{C} = i\gamma^2\gamma^0$):

$$\beta(\mathbb{1}, \gamma_\mu, \mathcal{J}_{\mu\nu}, \gamma_5\gamma_\mu, \gamma_5)\beta \stackrel{BD}{=} (\mathbb{1}^\dagger, \gamma_\mu^\dagger, \mathcal{J}_{\mu\nu}^\dagger, (\gamma_5\gamma_\mu)^\dagger, -\gamma_5^\dagger) \tag{1067}$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{1}, \gamma_\mu, \mathcal{J}_{\mu\nu}, \gamma_5\gamma_\mu, \gamma_5)\mathcal{C}^{-1} \stackrel{BD}{=} (\mathbb{1}^T, -\gamma_\mu^T, -\mathcal{J}_{\mu\nu}^T, (\gamma_5\gamma_\mu)^T, \gamma_5^T) \tag{1068}$$

$$\beta\mathcal{C}(\mathbb{1}, \gamma_\mu, \mathcal{J}_{\mu\nu}, \gamma_5\gamma_\mu, \gamma_5)(\beta\mathcal{C})^{-1} \stackrel{BD}{=} (\mathbb{1}^*, -\gamma_\mu^*, -\mathcal{J}_{\mu\nu}^*, (\gamma_5\gamma_\mu)^*, -\gamma_5^*) \tag{1069}$$

5.5 Kauzalno Diracovo polje

- Diracovo polje je teže konstruirati nego skalarno i vektorsko. Ono ima veliku fizikalnu primjenu, jer su fermioni koji se javljaju u prirodi spina 1/2 (u izvodima ispod će biti pokazano da Diracovo polje ima samo spin 1/2). I u proširenjima standardnog modela Diracova polja ili njihova "realna" verzija Majorana polja imaju dominantnu ulogu. Kao i kod skalarnog polja gdje se kompleksno polje može prikazati preko dva realna, Majorana polje je "elementarnije" u smislu da se svako Diracovo polje može prikazati preko dva Majorana polja. Pored spin-1/2 polja javljaju se još samo spin-3/2 polja (Rarita-Schwingerovo polje) npr. u supergravitaciji.
- Kao i u prethodna dva poglavlja pretpostavit ćemo da imamo samo jednu vrst čestica, tako da ćemo zanemariti indeks n.

• Konstrukcija Diracovog polja

- Konstrukcija Diracovog polja ide u par koraka. Polazi se od općeg izraza za polja poništenja i polja stvaranja. Zatim se primjenjuje prvi uvjet Lorentzove invarijantnosti, preciznije "rotacijski" uvjeti da bi se odredilo koje vrijednosti j se javljaju u Diracovom polju; time se odredjuju i koeficijentne funkcije do na dvije neodredjene konstante za u i v funkcije. Zatim se rabi paritetna invarijantnost da bi se odredio omjer tih dvaju konstanti do na fazu. Preostale dvije konstante se eliminiraju redefinicijom skale polja (tj. normalizacijom). Uporabom drugog uvjeta Lorentz invarijantnosti, kod kojega se u konstrukciji polja javljaju još dvije neodredjene konstante, se te dvije neodredjene konstante eliminiraju. Diracova jednadžba se javlja kao posljedica konstrukcije polja i uvjeta Lorentz invarijantnosti.

□ Prvi uvjet Lorentzove invarijantnosti

∗ Opći izrazi za polja

- Opći izrazi za $\psi^{\pm}_\ell(x)$ polja su (858) i (859) (indeks n je zanemaren)

$$\begin{aligned}
(858) \quad &\equiv \quad \psi^{+}_\ell(x) \;=\; \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\, e^{ip\cdot x} u_\ell(\vec{p},\sigma) a(\vec{p},\sigma), \\
(859) \quad &\equiv \quad \psi^{-}_\ell(x) \;=\; \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-ip\cdot x} v_\ell(\vec{p},\sigma) a^\dagger(\vec{p},\sigma)\ .
\end{aligned}$$

∗ Prvi uvjet L. invarijantnosti : reducibilnost sv. ort. L.T.

- Prvi uvjet Lorentz invarijantnosti daje niz uvjeta, medju kojima su i "rotacijski" uvjeti na koeficijentne funkcije impulsa $\vec{p} = 0$ (867), (868). Zbog reducibilnosti generatora rotacija (Lorentzovih generatora) tj. njihove blok-dijagonalne forme (1035), "rotacijski" uvjeti za gornje dvije komponente ($u_{m+}(0,\sigma)$, $v_{m+}(0,\sigma)$) i doljnje dvije komponente ($u_{m-}(0,\sigma)$, $v_{m-}(0,\sigma)$) koeficijentnih funkcija $u(0,\sigma)$, $v(0,\sigma)$ su nezavisne

$$\sum_{\overline{\sigma}} u_{\overline{m}\pm}(0,\overline{\sigma})\vec{J}^{(j)}_{\overline{\sigma}\sigma} = \sum_{m} \frac{1}{2}\vec{\sigma}_{\overline{m}m} u_{m\pm}(0,\sigma), \tag{1070}$$

$$-\sum_{\overline{\sigma}} v_{\overline{m}\pm}(0,\overline{\sigma})\vec{J}^{(j)*}_{\overline{\sigma}\sigma} = \sum_{m} \frac{1}{2}\vec{\sigma}_{\overline{m}m} v_{m\pm}(0,\sigma)\ . \tag{1071}$$

- Shvaćajući $u_{m\pm}(0,\sigma)$ i $v_{m\pm}(0,\sigma)$a kao (m,σ) elemente matrica $U_\pm$ i $V_\pm$, jednadžbe (1070), (1071) možemo zapisati matrično,

$$U_\pm \vec{J}^{(j)} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}\, U_\pm, \tag{1072}$$

$$-V_\pm \vec{J}^{(j)*} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}\, V_\pm\ . \tag{1073}$$

- Uočimo da matrice 2×2 $\{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\}$, i $(2j+1)\times(2j+1)$ matrice $\{\vec{J}^{(j)}\}$ i $\{-\vec{J}^{(j)*}\}$ tvore tri ireducibilne reprezentacije rotacijske grupe dimenzija.

$*$ **Schurova lema**

Schurova lema
Ako postoji matrica koje povezuje ireducibilne reprezentacije, tada su te matrice ili jednake nuli ili su kvadratične i nesingularne.

$\Rightarrow$ matrice povezuju samo reprezentacije iste dimenzije, dakle **ISTE** odnosno **EKVIVALENTNE** reprezentacije.
$\Rightarrow$ Reprezentacije $\{\frac{1}{2}\sigma_i\}$, $\{\vec{J}^{(j)}_i\}$ i $\{-\vec{J}^{(j)*}_i\}$, su ekvivalentne, dakle $j = \frac{1}{2}$.
$\Rightarrow$ **Diracovo polje opisuje samo čestice spina** $j = \frac{1}{2}$. Takodjer matrice $\{\frac{1}{2}\sigma_i\}$, $\{\vec{J}^{(j)}_i\}$ i $\{-\vec{J}^{(j)*}_i\}$ moraju biti jednake $\{\frac{1}{2}\sigma_i\}$ matricama do na transformaciju sličnosti.

- U standardnoj reprezentaciji (248), (249) $\vec{J}^{(j)}$ matrica

$$\vec{J}^{(1/2)} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}, \tag{1074}$$

$$\vec{J}^{(1/2)*} = -\frac{1}{2}\sigma_2\vec{\sigma}\sigma_2\ . \tag{1075}$$

D:
Dokažimo prvo (1074):

$$(249) \equiv (J_3^{(1/2)})_{\sigma'\sigma} = \sigma\delta_{\sigma'\sigma} \qquad \sigma = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad J_3^{(1/2)} \;=\; \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}\sigma_3, \tag{1076}$$

$$(248) \quad \equiv \quad (J_1^{(1/2)} \pm iJ_2^{(1/2)})_{\sigma'\sigma} \;=\; \delta_{\sigma'\sigma\pm 1}\sqrt{\Big(\frac{3}{4} - \sigma(\sigma \pm 1)\Big)} \tag{1077}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad (J_1^{(1/2)} + iJ_2^{(1/2)}) \;&=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
(J_1^{(1/2)} - iJ_2^{(1/2)}) \;&=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1078}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad J_1^{(1/2)} \;&=\; \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}\sigma_1 \;, \\
J_2^{(1/2)} \;&=\; \begin{pmatrix} 0 & -i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}\sigma_2 \;.
\end{aligned} \tag{1079}$$

Dokažimo i (1075):

$$\sigma_2\vec{\sigma}\sigma_2 \;=\; (-\sigma_1, \sigma_2, -\sigma_3) \;=\; -\vec{\sigma}^* \tag{1080}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{J}^{(1/2)*} \overset{(1080)}{=} \frac{1}{2}\vec{\sigma}^* \;=\; -\frac{1}{2}\sigma_2\vec{\sigma}\sigma_2 \qquad \text{Q.E.D. } (1075) \tag{1081}$$

- Uvrštavanjem izraza (1074) i (1075) za $\vec{J}^{(1/2)}$ i $\vec{J}^{(1/2)*}$ u jednadžbe (1072) i (1073) pokazuje da matrice $U_\pm$ i $V_\pm\sigma_2$ komutiraju sa svim generatorima rotacija $\vec{\sigma}/2$

$$U_\pm\frac{\vec{\sigma}}{2} \;=\; \frac{\vec{\sigma}}{2}U_\pm \;, \tag{1082}$$

$$V_\pm\sigma_2\frac{\vec{\sigma}}{2} \;=\; \frac{\vec{\sigma}}{2}V_\pm\sigma_2, \tag{1083}$$

odakle slijedi da su proporcionalne jediničnoj matrici (to je takodjer Schurova lema; odabir faza je konvencija),

$$\begin{aligned}
U_\pm \;&=\; c_\pm\mathbb{1}, \\
V_\pm\sigma_2 \;&=\; -id_\pm\mathbb{1}
\end{aligned} \tag{1084}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
u_{m\pm}(0,\sigma) \;&=\; c_\pm\delta_{m\sigma}, \\
v_{m\pm}(0,\sigma) \;&=\; d_\pm(\underbrace{-i\sigma_2}_{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}})_{m\sigma}
\end{aligned} \tag{1085}$$

$$\Downarrow$$

$$u(0,\frac{1}{2}) \;=\; \begin{bmatrix} c_+ \\ 0 \\ c_- \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u(0,-\frac{1}{2}) \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ c_+ \\ 0 \\ c_- \end{bmatrix}, \tag{1086}$$

$$v(0,\frac{1}{2}) \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ d_+ \\ 0 \\ d_- \end{bmatrix} \;, \qquad v(0,-\frac{1}{2}) \;=\; \begin{bmatrix} -d_+ \\ 0 \\ -d_- \\ 0 \end{bmatrix} \;. \tag{1087}$$

$*$ **Spinori konačnog impulsa**

Iz (1087), (1087), konačnog boosta za Diracovo polje (1013), i izraza za opće koeficijentne funkcije konačnog impulsa (863) i (864) slijede izrazi za spinore konačnog impulsa (u matričnom zapisu),

$$u(p,\sigma) \;=\; \sqrt{\frac{m}{p^0}} D(L(p)) u(0,\sigma), \tag{1088}$$

$$v(p,\sigma) \;=\; \sqrt{\frac{m}{p^0}} D(L(p)) v(0,\sigma) \;. \tag{1089}$$

□ **Sačuvanje pariteta i omjeri** c_-/c_+**,** d_-/d_+

- Svim Lorentzovim transformacijama su pridružene blok-dijagonalne matrice Diracove algebre, osim paritetnoj transformaciji kojoj je pridružena matrica $\beta = i\gamma^0$ koja ima off-dijagonalne blokove. Zbog toga je paritetna transformacija jedina Lorentzova transformacija koja može nešto reći o omjerima c_-/c_+, d_-/d_+.

$*$ **Paritetna transformacija (Diracovih) polja**

- Uz pretpostavku očuvanja pariteta, paritetne transformacije operatora poništenja antičestica i operatora stvaranja čestica glase (vidi (791))

$$P a(\vec{p},\sigma) P^{-1} \;=\; \eta^* a(-\vec{p},\sigma), \tag{1090}$$

$$P a^{c\dagger}(\vec{p},\sigma) P^{-1} \;=\; \eta^c a^{c\dagger}(-\vec{p},\sigma) \;. \tag{1091}$$

Odatle (nakon zamjene $p \to \mathcal{P}p$),

$$P\psi^+_\ell(x)P^{-1} \;\stackrel{(858,1090)}{=}\; \eta^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\, u_\ell(-\vec{p},\sigma) e^{ip\cdot\mathcal{P}x} a(\vec{p},\sigma), \tag{1092}$$

$$P\psi^{-c}_\ell(x)P^{-1} \;\stackrel{(859,1091)}{=}\; \eta^c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\, v_\ell(-\vec{p},\sigma) e^{-ip\cdot\mathcal{P}x} a^{c\dagger}(\vec{p},\sigma) \;. \tag{1093}$$

$*$ **Veza koeficijentnih funkcija impulsa** p **i impulsa** $\mathcal{P}p$

- Zbog relacije (1052) vrijedi ($\beta^2 = \mathbb{1}$)

$$\beta D(L(p))\beta = D(L(\mathcal{P}p)) \ . \tag{1094}$$

Stoga

$$u(-\vec{p},\sigma) \ = \ \sqrt{\frac{m}{p^0}} D(L(-\vec{p}))u(0,\sigma) \ = \ \sqrt{\frac{m}{p^0}} \beta D(L(\vec{p}))\beta u(0,\sigma), \tag{1095}$$

$$v(-\vec{p},\sigma) \ = \ \sqrt{\frac{m}{p^0}} D(L(-\vec{p}))v(0,\sigma) \ = \ \sqrt{\frac{m}{p^0}} \beta D(L(\vec{p}))\beta v(0,\sigma) \ . \tag{1096}$$

- Da bi P-transformirana polja (1092), (1093) bila proporcionalna početnim poljima, izmedju $D(L(\vec{p}))$ i koeficijentnih funkcija $u(0,\sigma)$ ne smije biti β. To je moguće samo ako su $\beta u(0,\sigma)$ i $\beta v(0,\sigma)$ proporcionalni $u(0,\sigma)$ odnosno $v(0,\sigma)$,

$$\beta u(0,\sigma) \ = \ b_u u(0,\sigma), \qquad \beta v(0,\sigma) \ = \ b_v v(0,\sigma); \tag{1097}$$

$$b_u^2 \ = \ b_v^2 \ = \ \mathbb{1} \qquad (\text{zbog } \beta^2 = 1) \ . \tag{1098}$$

- Jednadžbe (1092) i (1093) time postaju

$$P\psi^+(x)P^{-1} \ = \ b_u \eta^* \beta \psi^+(\mathcal{P}x), \tag{1099}$$

$$P\psi^-(x)P^{-1} \ = \ b_v \eta^c \beta \psi^-(\mathcal{P}x) \ . \tag{1100}$$

- Takodjer, iz relacija (1097) slijedi

$$\frac{c_+}{c_-} = b_u, \qquad \frac{d_+}{d_-} = b_v \tag{1101}$$

Time su koeficijenti c_- i d_- eliminirani na račun c_+, d_+ b_u i b_v.

$*$ **Podešavanje skale polja**

- Podešavanjem skale polja mogu se izabrati normalizirane koeficijentne funkcije (time se eliminiraju konstante c_+ i d_+),

$$u(0,\frac{1}{2}) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_u \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u(0,-\frac{1}{2}) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_u \end{bmatrix}, \tag{1102}$$

$$v(0,\frac{1}{2}) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_v \end{bmatrix}, \qquad v(0,-\frac{1}{2}) \ = \ \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_v \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{1103}$$

□ **Drugi uvjet Lorentzove invarijantnosti**

∗ **Diracovo polje i uvjet Lorentzove invarijantnosti**

- Komutativnost gustoća Hamiltonijana za prostornolike intervale se postiže izgradnjom gustoće Hamiltonijana od linearnih kombinacija polja poništenja i polja stvaranja,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \kappa\psi^{+}(x) + \lambda\psi^{c-}(x) && (1104)\\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\sigma} [\kappa u(\vec{p},\sigma)e^{ip\cdot x}a(\vec{p},\sigma) + \lambda v(\vec{p},\sigma)e^{-ip\cdot x}a^{c\dagger}(\vec{p},\sigma)], && (1105)\end{aligned}$$

koji (anti)komutiraju za prostornolike intervale.
- Direktni račun daje

$$\begin{aligned} [\psi_{\ell}(x),\psi^{\dagger}_{\overline{\ell}}(y)]_{\mp} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}[|\kappa|^2 N_{\ell\overline{\ell}}(\vec{p})e^{ip\cdot(x-y)} \mp |\lambda|^2 M_{\ell\overline{\ell}}(\vec{p})e^{-ip\cdot(x-y)}], && (1106)\\ N_{\ell\overline{\ell}}(\vec{p}) &\equiv \sum_{\sigma} u_{\ell}(\vec{p},\sigma)u^{*}_{\overline{\ell}}(\vec{p},\sigma), && (1107)\\ M_{\ell\overline{\ell}}(\vec{p}) &\equiv \sum_{\sigma} v_{\ell}(\vec{p},\sigma)v^{*}_{\overline{\ell}}(\vec{p},\sigma)\ . && (1108)\end{aligned}$$

∗ **Eksplicitni izrazi za matrice $N(\vec{p})$ i $M(\vec{p})$**

- Iz (1102), (1103) je lako izračunati $N(0)$ i $M(0)$,

$$\begin{aligned} N(0) &= \sum_{\sigma} u(0,\sigma)\otimes u^{\dagger}(0,\sigma) = \frac{\mathbb{1}+b_u\beta}{2}\ , && (1109)\\ M(0) &= \sum_{\sigma} v(0,\sigma)\otimes v^{\dagger}(0,\sigma) = \frac{\mathbb{1}+b_v\beta}{2}\ . && (1110)\end{aligned}$$

D:
Dovoljno je provjeriti (1109) jer je postupak za (1110) identičan:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} u(0,\sigma)\otimes u^{\dagger}(0,\sigma) &= \frac{1}{2}\Big[\begin{pmatrix}1\\0\\b_u\\0\end{pmatrix}\otimes(1\,0\,b_u\,0) + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\b_u\end{pmatrix}\otimes(0\,1\,0\,b_u)\Big]\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&b_u&0\\0&1&0&b_u\\b_u&0&1&0\\0&b_u&0&1\end{pmatrix} \overset{(1049)}{=} \frac{1}{2}(\mathbb{1}+b_u\beta) \qquad \text{Q.E.D. } (1109)\ .\end{aligned}$$

- Uporabom (1088) i (1089), za koeficijentne funkcije konačnog impulsa slijede izrazi

$$
\begin{aligned}
N(\vec{p}) &= \frac{m}{p^0}\,\frac{1}{2}D(L(p))[1+b_u\beta]D^\dagger(L(p)), &(1111)\\
M(\vec{p}) &= \frac{m}{p^0}\,\frac{1}{2}D(L(p))[1+b_v\beta]D^\dagger(L(p)), &(1112)
\end{aligned}
$$

koji se mogu napisati preko γ^μ matrica rabeći relaciju pseudounitarnosti (1055)$\equiv D^{-1}(\Lambda) = \beta D^\dagger(\Lambda)\beta$,

$$
\begin{aligned}
D(L(p))\beta D^\dagger(L(p)) &\overset{(1055)}{=} \beta, &(1113)\\
D(L(p))D^\dagger(L(p)) &\overset{(1055)}{=} D(L(p))\beta D^{-1}(L(p))\beta \\
&\overset{(1030)}{=} D(L(p))\, i\gamma^0 D^{-1}(L(p))\beta \overset{(1015)}{=} -i\,\frac{p_\mu\gamma^\mu}{m}\beta\ . &(1114)
\end{aligned}
$$

Konkretno,

$$
\begin{aligned}
N(\vec{p}) &= \frac{1}{2p^0}[-ip_\mu\gamma^\mu + b_u m]\beta, &(1115)\\
M(\vec{p}) &= \frac{1}{2p^0}[-ip_\mu\gamma^\mu + b_v m]\beta\ . &(1116)
\end{aligned}
$$

(Koeficijentne funkcije u i v se često normaliziraju tako da se u nazivnicima izraza za $N(\vec{p})$ i $M(\vec{p})$ javlja m umjesto p^0, npr. u BD. Normalizacijska konvencija koju rabi Weinberg može se primjeniti i za bezmasene čestice, dok za njih BD rabi drugu normalizacijsku konvenciju, sa nazivnikom jednakim jedinici.).

$*$ Ispunjavanje drugog Lorentzovog uvjeta

- Uvrštavanjem (1115) i (1116) u (1106) dobijamo,

$$
\begin{aligned}
[\psi_\ell(x), \psi^\dagger_{\bar\ell}(y)]_\mp &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}[|\kappa|^2(-ip_\mu\gamma^\mu + b_u m)\beta\, e^{ip\cdot(x-y)} \\
&\qquad \mp|\lambda|^2(-ip_\mu\gamma^\mu + b_v m)\beta\, e^{ip\cdot(y-x)}]_{\ell\bar\ell} &(1117)\\
&= \Big[|\kappa|^2(-\partial^{x-y}_\mu\gamma^\mu + b_u m)\beta \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\, e^{ip\cdot(x-y)}}_{\Delta_+(x-y)} \\
&\mp\ |\lambda|^2(-\partial^{y-x}_\mu\gamma^\mu + b_v m)\beta \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\, e^{ip\cdot(y-x)}}_{\Delta_+(y-x)}\Big]_{\ell\bar\ell} &(1118)\\
&\to \Big[(-|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2)\, \partial^{x-y}_\mu\gamma^\mu\, \beta\, \Delta_+(x-y) \\
&+\ (|\kappa|^2 b_u \mp |\lambda|^2 b_v)\, m\, \beta\, \Delta_+(x-y)\Big]_{\ell\bar\ell}\ . &(1119)
\end{aligned}
$$

- U jednadžbi (1118) smo zamijenili 4-impulse sa odgovarajućom derivacijom koja djeluje na eksponencijalnu funkciju i izvadili ih izvan integrala. Takodjer smo identificirali integrale sa skalarnim integralom (896,897). Jednadžba vrijedi za svaku vrijednost $(x-y)^2$
- U jednadžbi (1119) razmatramo komutator za prostornolike intervale i rabimo parnost funkcije $\Delta_+(x)$ u argumentu x (koja vrijedi za prostornolike intervale), odnosno neparnost $\partial_\mu \Delta_+(x)$ u x.
- Drugi Lorentzov uvjet zahtjeva jednakost (anti)komutatora polja nuli za prostornolike intervale. Stoga iz prvog člana slijedi da samo antikomutator polja dolazi u obzir i vrijedi

$$|\kappa|^2 \;=\; |\lambda|^2. \tag{1120}$$

Drugim riječima, **Diracove čestice zadovoljavaju Fermi-Diracovu statistiku, tj. oni su fermioni**.
Uzimajući taj rezultat u obzir drugi član daje jednakost

$$b_u = -b_v \; . \tag{1121}$$

$*$ Podešavanje faza, redefinicija skale, množenje sa γ_5 i standardni oblik Diracovog polja

- Budući da je $|\kappa| = |\lambda|$, podešavanjem faza jednočestičnih fermionskih stanja može se ostvariti jednakost

$$\kappa \;=\; \lambda \; . \tag{1122}$$

- Redefinicijom skale Diracovog polja, može se apsorbirati faktor κ, tj. efektivno postići

$$\kappa \;=\; 1 \; . \tag{1123}$$

- Na kraju polje ψ se uvijek može zamjeniti poljem $\gamma_5\psi$, čime se mijenja predznak b_u i b_v (to slijedi iz antikomutativnosti γ_5 sa β). Time se može podesiti

$$b_u \;\overset{(1121)}{=}\; -b_v \;=\; 1 \; . \tag{1124}$$

- Provodeći proceduru opisanu jednadžbama (1122), (1123) i (1124) za Diracovo polje (1105) dobijamo

$$\psi_\ell(x) \;=\; \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_\sigma \left[u_\ell(\vec{p},\sigma)e^{ip\cdot x}a(\vec{p},\sigma) + v_\ell(\vec{p},\sigma)e^{-ip\cdot x}a^{c\dagger}(\vec{p},\sigma)\right] . \tag{1125}$$

gdje su koeficijentne funkcije $u(\vec{p},s)$ i $v(\vec{p},s)$ ((1088) i (1089) izražene preko (vidi (1102) i (1103); upotrijebi (1124)))

$$u(0,\frac{1}{2}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \;, \qquad u(0,-\frac{1}{2}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} \;, \tag{1126}$$

$$v(0,\frac{1}{2}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} , \qquad v(0,-\frac{1}{2}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{1127}$$

- Nadalje, spinske sume postaju jednake,

$$N(\vec{p}) \;=\; \frac{1}{2p^0}[-ip_\mu\gamma^\mu + m]\beta, \tag{1128}$$

$$M(\vec{p}) \;=\; \frac{1}{2p^0}[-ip_\mu\gamma^\mu - m]\beta \; . \tag{1129}$$

- Time antikomutator polja (1118) postaje jednak (rabimo $\partial_\mu^{y-x} = -\partial_\mu^{x-y}$)

$$\begin{aligned}[][\psi_\ell(x), \psi_{\bar{\ell}}^\dagger(y)]_+ &= [(-\partial_\mu\gamma^\mu + m)\beta]_{\ell\bar{\ell}} \,(\Delta_+(x-y) - \Delta_+(y-x)) \\ &\equiv [(-\partial_\mu\gamma^\mu + m)\beta]_{\ell\bar{\ell}} \,\Delta(x-y) \end{aligned} \tag{1130}$$

(relacija vrijedi za svaki $(x-y)^2$).

$*$ **Diracova jednadžba kao posljedica L. inv. konstrukcije i zahtjeva jednostavne P-transf. $\psi^\pm(x)$**

- Paritetni uvjeti na $u(0,\sigma)$ i $v(0,\sigma)$ (1097) glase

$$\beta u(0,\sigma) \;=\; u(0,\sigma) \;, \qquad \beta v(0,\sigma) \;=\; -v(0,\sigma) \; . \tag{1131}$$

- Boostiranjem tih uvjeta i primjenom izraza za β matricu (1030) i L. transf. γ^0 matrice (1015) dobijamo Diracove jednadžbe u impulsnom prostoru,

$$(ip_\mu\gamma^\mu + m)u(\vec{p},\sigma) \;=\; 0 \;, \tag{1132}$$

$$(-ip_\mu\gamma^\mu + m)v(\vec{p},\sigma) \;=\; 0 \; . \tag{1133}$$

- Iz izraza za Diracovo polje (1125) i jednadžbi (1132) i (1133) slijedi

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) \;=\; 0 \; . \tag{1134}$$

- (1132) i (1133) su Diracove jednadžbe (za Diracove koeficijentne funkcije) u impulsnom prostoru, a (1134) je Diracova jednadžba (za Diracovo polje) u x-prostoru.
- Odatle slijedi da je (su) Diracova jednadžba(e) posljedica Lorentz-invarijantne konstrukcije Diracovog polja i zahtjeva jednostavne transformacije Diracovih polja $\psi^+(x)$ i $\psi^-(x)$ na paritetnu transformaciju.

$\bullet$ **Diskretne transformacije Diracovog polja**

$\square$ P **transformacija**

- Evo još nekoliko stvari vezane uz paritetnu transformaciju.

$*$ **Veza pariteta čestice i antičestice**

- Drugi uvjet Lorentzove invarijantnosti zahtjeva antikomutativnost polja (1125) za prostornovremenske intervale,

$$\{\psi_\ell(x), \psi^\dagger_{\ell'}(x)\} \;=\; 0, \qquad (x-x')^2 \;>\; 0\;. \tag{1135}$$

- Taj uvjet mora biti očuvan pri svakoj transformaciji na koju je teorija invarijantna, uključivši P. Zbog toga se relativna faza $\psi^+(x)$ i $\psi^-(x)$ polja ne smije mijenjati pri paritetnoj transformaciji $\psi(x)$, odnosno paritetne faze $\psi^+(x)$ i $\psi^-(x)$ polja (vidi (1099), (1100) i (1124)) moraju biti iste,

$$\eta^* \;=\; -\eta^c, \tag{1136}$$
$$\Downarrow$$
$$P\psi(x)P^{-1} \;=\; \eta^*\beta\psi(\mathcal{P}x). \tag{1137}$$

- Iz (1136) slijedi da je intristični paritet stanja koji sadrži česticu spina 1/2 i pripadnu antičesticu $\eta\eta^c = -1$ (tj. neparan). Zbog toga se mezoni negativnog pariteta (ρ^0, J/ψ,...) mogu interpretirati kao $\ell = 0$ (s-valna) vezana stanja kvarka i antikvarka.

$\square$ C **i** T **transformacija**

$*$ **Relacije koeficijentnih funkcija potrebne za** C **i** T **transformaciju**

- Da bismo ustanovili kakve nam relacije trebaju za koeficijentne funkcije, promotrimo C i T transformirano Diracovo polje. C i T transformacije operatora stvaranja i poništenja dane su sa

$$\begin{aligned}
Ca(p,\sigma)C^{-1} &\overset{(790)}{=} \xi^* a^c(p,\sigma),\\
Ca^{c\dagger}(p,\sigma)C^{-1} &\overset{(790)}{=} \xi^c a^\dagger(p,\sigma),
\end{aligned} \tag{1138}$$

$$\begin{aligned}
Ta(p,\sigma)T^{-1} &\overset{(792)}{=} \zeta^*(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} a(\mathcal{P}p,-\sigma),\\
Ta^{c\dagger}(p,\sigma)T^{-1} &\overset{(792)}{=} \zeta^c(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} a^{c\dagger}(\mathcal{P}p,-\sigma)\;.
\end{aligned} \tag{1139}$$

Odatle

$$C\psi(x)C^{-1} \overset{(1125)}{=} \int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sum_\sigma\Big[u_\ell(p,\sigma)e^{ip\cdot x}\xi^* a^c(p,\sigma) + v_\ell(p,\sigma)e^{-ip\cdot x}\xi^c a^\dagger(p,\sigma)\Big]$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\sigma \Big[v_\ell^*(p,\sigma) e^{ip\cdot x} \xi^{c*} a(p,\sigma) + u_\ell^*(p,\sigma) e^{-ip\cdot x} \xi a^{c\dagger}(p,\sigma) \Big]^\dagger, \quad (1140) \\
T\psi(x)T^{-1} &\stackrel{(1125)}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\sigma \Big[u_\ell^*(p,\sigma) e^{-ip\cdot x} \zeta^* (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} a(\mathcal{P}p,-\sigma) \\
&\qquad + v_\ell^*(p,\sigma) e^{ip\cdot x} \zeta^c (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma} a^{c\dagger}(\mathcal{P}p,-\sigma) \Big] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\sigma \Big[(-1)^{\frac{1}{2}+\sigma} u_\ell^*(\mathcal{P}p,-\sigma) e^{-ip\cdot \mathcal{P}x} \zeta^* a(p,\sigma) \\
&\qquad + (-1)^{\frac{1}{2}+\sigma} v_\ell^*(\mathcal{P}p,-\sigma) e^{ip\cdot \mathcal{P}x} \zeta^c a^{c\dagger}(p,\sigma) \Big] . \quad (1141)
\end{aligned}
$$

- U prvom od dva izraza u jednadžbama (1140) i (1141) izvršena je C odnosno T transformacija polja (792), a u drugom su članovi dotičnih izraza presloženi tako da se u njima javljaju operatori $a(p,\sigma)$ i $a^{c\dagger}(p,\sigma)$ koji se javljaju u polja (792). Da bi se transformirano polje moglo izraziti preko početnog (drugi uvjet L. inv.) izrazi uz operatore $a(p,\sigma)$ i $a^{c\dagger}(p,\sigma)$ morali bi biti proporcionalni (faktor proporcionalnosti je općenito konstantna matrica) koeficijentnim funkcijama $u(p,\sigma)$ i $v(p,\sigma)$,

$$
\begin{aligned}
v_\ell^*(p,\sigma) &\propto u_\ell(p,\sigma), \\
u_\ell^*(p,\sigma) &\propto v_\ell(p,\sigma), \quad (1142) \\
(-1)^{\frac{1}{2}+\sigma} u_\ell^*(\mathcal{P}p,-\sigma) &\propto u_\ell(p,\sigma), \\
(-1)^{\frac{1}{2}+\sigma} v_\ell^*(\mathcal{P}p,-\sigma) &\propto v_\ell(p,\sigma) , \quad (1143)
\end{aligned}
$$

i čestične i antičestične faze moraju biti jednake,

$$
\begin{aligned}
\xi^* &= \xi^c, \quad (1144) \\
\zeta^* &= \zeta^c . \quad (1145)
\end{aligned}
$$

$*$ Dokaz relacija (1142)

- Izrazimo koeficijentne funkcije preko koeficijentnih funkcija impulsa nula i uvedimo za faktor proporcionalnosti matricu M,

$$
\begin{aligned}
D^*(L(p)) v^*(0,\sigma) &= M D(L(p)) u(0,\sigma) \\
&= M D(L(p)) M^{-1} M u(0,\sigma) . \quad (1146)
\end{aligned}
$$

- Stoga treba naći matricu M koja zadovoljava

$$
\begin{aligned}
D^*(L(p)) &= M D(L(p)) M^{-1}, \quad (1147) \\
v^*(0,\sigma) &= M u(0,\sigma) . \quad (1148)
\end{aligned}
$$

Pokažimo da matrica $-\beta\mathcal{C}$ zadovoljava te uvjete (vidi (1058)).
D:
Rabeći (1063) i (1013) dobijamo

$$
\begin{aligned}
(-\beta\mathcal{C})D(L(p))(-\mathcal{C}^{-1}\beta) &\overset{(1013)}{=} e^{i\omega_{j0}\beta\mathcal{C}\mathcal{J}^{j0}\mathcal{C}^{-1}\beta} \\
&\overset{(1063)}{=} e^{i\omega_{j0}(-\mathcal{J}^{j0*})} = D^*(L(p)), \qquad \text{Q.E.D. (1147)} \qquad (1149)
\end{aligned}
$$

Nadalje, uz definiciju za spinor χ_σ, i relaciju za $i\sigma_2\chi_\sigma$

$$
\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (1150)
$$

$$
-i\sigma_2\chi_\sigma = (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}\chi_{-\sigma} , \qquad (1151)
$$

rabeći (1049), (1058), (1126) i (1127) dobijamo

$$
\begin{aligned}
-\beta\mathcal{C} &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-\beta\mathcal{C})^{-1} = -\mathcal{C}^{-1}\beta, \qquad (1152) \\
u(0,\sigma) &= u^*(0,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \chi_\sigma \\ \chi_\sigma \end{pmatrix}, \\
v(0,\sigma) &= v^*(0,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}\chi_{-\sigma} \\ -(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}\chi_{-\sigma} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i\sigma_2\chi_\sigma \\ i\sigma_2\chi_\sigma \end{pmatrix} = -\beta\mathcal{C}u(0,\sigma) \qquad \text{Q.E.D. (1148)} \qquad (1153)
\end{aligned}
$$

- Rezimirajmo

$$
\begin{aligned}
v^*(0,\sigma) &= -\beta\mathcal{C}u(0,\sigma), \qquad u^*(0,\sigma) = -\beta\mathcal{C}v(0,\sigma), \qquad (1154) \\
D^*(L(p)) &= \beta\mathcal{C}D(L(p))\mathcal{C}^{-1}\beta, \qquad (1155) \\
v^*(p,\sigma) &= -\beta\mathcal{C}u(p,\sigma), \qquad u^*(p,\sigma) = -\beta\mathcal{C}v(p,\sigma) . \qquad (1156)
\end{aligned}
$$

Jednadžba (1156) dokazuje proporcionalnosti (1142). Q.E.D.
Takodjer, uz pretpostavku jednakosti faza (1144), iz (1156) i iz izraza za C transformirano Diracovo polje (1140) te iz jednakosti $\beta = \beta^\dagger$, $\mathcal{C} = -\mathcal{C}^\dagger$, $\beta\mathcal{C} = -\mathcal{C}\beta$ slijedi

$$
C\psi(x)C^{-1} = (-\beta\mathcal{C})^\dagger\xi^*\psi^\dagger(x) = -\xi^*\beta\mathcal{C}\psi^*(x) . \qquad (1157)
$$

U zadnjem izrazu u (1157) hermitski konjugirano polje $\psi^\dagger(x)$ je označeno sa $\psi^*(x)$ da bi se istaklo da se radi o jednostupčanoj matrici-operatoru.

$*$ Dokaz relacija (1143)

- Uvodeći kao faktor proporcionalnosti konstantnu matricu M, prva od jednadžbi (1143) glasi,

$$(-1)^{\frac{1}{2}+\sigma}D^*(L(\mathcal{P}p))u^*(0,-\sigma) \;=\; MD(L(p))u(0,\sigma)\ . \tag{1158}$$

Stoga matrica M mora zadovoljavati relacije

$$\begin{aligned} MD(L(p))M^{-1} &= D^*(L(\mathcal{P}p)), & (1159)\\ Mu(0,\sigma) &= (-1)^{\frac{1}{2}+\sigma}u^*(0,-\sigma)\ . & (1160)\end{aligned}$$

- Rabeći (1155) te antikomutativnost i komutativnost generatora boosta $\mathcal{J}^{i0}$ sa matricom β (1052) odnosno matricom γ_5 nalazimo da bi M mogao biti proporcionalan

$$M \;\sim\; \gamma_5\beta\times\beta\mathcal{C} \;=\; \gamma_5\mathcal{C}\ . \tag{1161}$$

Provjerimo da stvarno i je.
D:
- Rabimo $\beta^2=\gamma_5^2 \;=\; \mathbb{1}$.
- Provjerimo prvo (1159).

$$\begin{aligned}\gamma_5\mathcal{C}D(L(p))\mathcal{C}^{-1}\gamma_5 &= \gamma_5\beta D^*(L(p))\beta\gamma_5\\ &= \gamma_5 D^*(L(\mathcal{P}p))\gamma_5 \;=\; D^*(L(\mathcal{P}p)) \qquad \text{Q.E.D. (1159)}\ . & (1162)\end{aligned}$$

- Provjerimo zatim (1160). Rabeći izraze za $u(0,\sigma)$ $v(0,\sigma)$ (1153) i γ_5 (1039) nalazimo (pri primjeni jednadžbi pazi da li je σ ili $-\sigma$)

$$\begin{aligned}\gamma_5 u(0,\sigma) &= \gamma_5\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\chi_\sigma\\ \chi_\sigma\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\chi_\sigma\\ -\chi_\sigma\end{pmatrix} \overset{(1148)}{=} (-1)^{\frac{1}{2}+\sigma}v(0,-\sigma) & (1163)\\ \Rightarrow \gamma_5 v(0,\sigma) &= (-1)^{-\frac{1}{2}+\sigma}u(0,-\sigma) = (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}u(0,-\sigma)\ . & (1164)\end{aligned}$$

Odatle rabeći (1097) i (1124) te (1154) slijedi

$$\begin{aligned}\gamma_5\mathcal{C}u(0,\sigma) &\overset{(1154)}{=} -\gamma_5\beta v^*(0,\sigma) \overset{(1124)}{=} \gamma_5 v^*(0,\sigma)\\ &= (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}u^*(0,-\sigma), & (1165)\\ \gamma_5\mathcal{C}v(0,\sigma) &\overset{(1154)}{=} -\gamma_5\beta u^*(0,\sigma) \overset{(1124)}{=} -\gamma_5 u^*(0,\sigma)\\ &= (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}v^*(0,-\sigma)\ . & (1166)\end{aligned}$$

- Rezimirajmo,

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{1}{2}+\sigma}u^*(0,-\sigma) &= -\gamma_5\mathcal{C}u(0,\sigma), \qquad (-1)^{\frac{1}{2}+\sigma}v^*(0,-\sigma) \;=\; -\gamma_5\mathcal{C}v(0,\sigma), & (1167)\\ \gamma_5\mathcal{C}D(L(p))\mathcal{C}^{-1}\gamma_5 &= D^*(L(\mathcal{P}p)), & (1168)\\ (-1)^{\frac{1}{2}+\sigma}u^*(\mathcal{P}p,-\sigma) &= -\gamma_5\mathcal{C}u(p,\sigma), \qquad (-1)^{\frac{1}{2}+\sigma}v^*(\mathcal{P}p,-\sigma) \;=\; -\gamma_5\mathcal{C}v(p,\sigma)\ . & (1169)\end{aligned}$$

- Iz (1169) slijedi proporcionalnost (1143). Q.E.D.
Takodjer, pretpostavljajući jednakost faza (1145) iz (1141) i iz (1143) slijedi,

$$T\psi(x)T^{-1} \;=\; -\zeta^{*}\gamma_5\mathcal{C}\psi(-\mathcal{P}x)\;. \tag{1170}$$

$*$ Fizikalne posljedice jednakosti faza nabojne konjugacije (??), (1144)

- Jednakost faza nabojne konjugacije ne vodi na iste C kvantne brojeve kod bozonskog i kod fermionskog čestično-antičestičnog stanja zbog razlika u statistikama.
- Opće čestično-antičestičnog stanje glasi

$$\Phi \;\equiv\; \sum_{\sigma\sigma'}\int d^3p\int d^3p'\chi(\vec{p},\sigma;\vec{p}',\sigma')a^{\dagger}(\vec{p},\sigma)a^{c\dagger}(\vec{p}',\sigma')\Phi_0, \tag{1171}$$

gdje je Φ_0 vakuumsko stanje.
- Nabojna konjugacija transformira to stanje u

$$C\Phi \;\equiv\; \xi\xi^{c}\sum_{\sigma\sigma'}\int d^3p\int d^3p'\;\chi(\vec{p},\sigma;\vec{p}',\sigma')a^{c\dagger}(\vec{p},\sigma)a^{\dagger}(\vec{p}',\sigma')\Phi_0 \tag{1172}$$

$$\;\equiv\; \pm\xi\xi^{c}\sum_{\sigma\sigma'}\int d^3p\int d^3p'\;\chi(\vec{p}',\sigma';\vec{p},\sigma)a^{\dagger}(\vec{p},\sigma)a^{c\dagger}(\vec{p}',\sigma')\Phi_0, \tag{1173}$$

gdje je gornji (doljnji) predznak za bozonsko (fermionsko) čestično-antičestičnog stanje. U drugom retku smo zamijenili nijeme varijable $\vec{p}\leftrightarrow\vec{p}'$, $\sigma\leftrightarrow\sigma'$.
- Ukupni C-paritet stanja Φ jednaka je produktu

$$\xi_\Phi \;=\; \pm\underbrace{\xi\xi^{c}}_{=1}F_\chi \;=\; \pm F_\chi, \tag{1174}$$

gdje je F predznak koji se dobija istovremenom zamjenom $\vec{p}\leftrightarrow\vec{p}'$, $\sigma\leftrightarrow\sigma'$ u funkciji $\chi(p,\sigma;p',\sigma)$. Od sada nadalje diskutirat ćemo samo fermionski slučaj - razlika je samo u jednom predznaku.
- Amon : uglavnom se valna funkcija $\chi(p,\sigma;p',\sigma)$ može tretirati kao produktna funkcija spinske i prostorne valne funkcije. Tada

$$\xi_\Phi \;=\; -\underbrace{(-1)^{\ell_\chi}(-1)^{1-s_\chi}}_{F_\chi}, \tag{1175}$$

gdje je ℓ_χ relativna kutna količia gibanja konstituentnih čestica Φ stanja, a s_χ pripadni spin ($\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\;=\;0\oplus 1$).
- Primjeri:

1. Osnovno stanje pozitronija ($\ell = 0$) može biti u $s = 0$ (parapozitronij) i $s = 1$ (ortopozitronij stanju),

$$\xi_{para} \;=\; +1, \qquad \xi_{orto} \;=\; -1\ . \tag{1176}$$

Kako je C-paritet fotona jednak -1, parapozitronij se može raspadati samo u dva (paran broj) a ortopozitronij samo u tri (neparan broj) fotona.
2. Neutralni vektorski mezoni ρ^0, ω i Φ nastaju kao rezonance u e^+e^- anihilaciji kroz jedno-fotonsko stanje. Stoga se mogu interpretirati kao $\ell = 0$ kvark-antikvarkovska stanja spina $s = 1$.

• **Poincaréove transformacije fermionskih struja**

□ **Diracov konjugat; Lorentzove i paritetne transformacije struja**

∗ **Diracov konjugat**

- Diracova reprezentacija nije unitarna (vidi (1056)). Zbog toga se $\psi^\dagger(x)\psi(x)$ ne transformaira kao Lorentzov skalar. Problem se rješava uvodjenjem Diracovog konugata Diracovog polja,

$$\overline{\psi}(x) \;=\; \psi^\dagger(x)\beta, \tag{1177}$$

sa Lorentzovom transformacijom

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda)\overline{\psi}(x)U_0^{-1}(\Lambda) &= (U_0(\Lambda)\psi(x)U_0^{-1}(\Lambda))^\dagger\beta \\ &= \psi^\dagger(\Lambda x)D^\dagger(\Lambda)\beta \overset{(1055)}{=} \overline{\psi}(\Lambda x)D^{-1}(\Lambda), \end{aligned} \tag{1178}$$

suprotnom transformaciji polja $\psi(x)$.

∗ **L. transformacija fermionskih struja**

- Upotrebljavajući rezultat (1178) nalazimo da bilinearne kombinacije ferminskih polja konstruirane od ψ i $\overline{\psi}$ imaju transformacijska svojstva ($M = 1, \gamma^\mu, \mathcal{J}^{\mu\nu}, \gamma^\mu\gamma_5, \gamma_5$)

$$U_0(\Lambda)[\overline{\psi}(x)M\psi(x)]U_0^{-1}(\Lambda) \;=\; \overline{\psi}(\Lambda x)D^{-1}(\Lambda)MD(\Lambda)\psi(\Lambda x), \tag{1179}$$

koja su zadana sa Lorentz transformacijskim svojstvima matrica M,

$$D^{-1}(\Lambda)\mathbb{1}D(\Lambda) \overset{(1016)}{=} \mathbb{1}, \tag{1180}$$

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) \overset{(1011)}{=} \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \tag{1181}$$

$$D^{-1}(\Lambda)\mathcal{J}^{\mu\nu}D(\Lambda) \overset{(1017)}{=} \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\mathcal{J}^{\rho\sigma}, \tag{1182}$$

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma_5 D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma_5, \tag{1183}$$

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma_5 D(\Lambda) = \gamma_5 \tag{1184}$$

(u zadnje dvije relacije upotrebljena je komutativnost γ_5 matrice i L. genaratora $\mathcal{J}^{\mu\nu}$).

∗ **Paritetna transformacija fermionskih struja**

- Paritetna transformacija $\overline{\psi}(x)$ je

$$P\overline{\psi}(x)P^{-1} \;=\; (P\psi(x)P^{-1})^\dagger\beta \;=\; (\eta^*\beta\psi(\mathcal{P}x))^\dagger\beta \;=\; \eta\overline{\psi}(\mathcal{P}x)\beta\;. \tag{1185}$$

- Stoga je pariteta transformacija bilinearnih kombinacija $\overline{\psi}(x)M\psi(x)$,

$$P[\overline{\psi}(x)M\psi(x)]P^{-1} = \overline{\psi}(\mathcal{P}x)\beta M\beta\psi(\mathcal{P}x), \tag{1186}$$

odredjena paritetnom transformacijom matrica M,

$$\begin{aligned}
\beta\mathbb{1}\beta &= \mathbb{1}, &(1187)\\
\beta\gamma^\mu\beta &= -\gamma^{\mu\dagger} = \mathcal{P}^\mu{}_\nu\gamma^\nu, &(1188)\\
\beta\mathcal{J}^{\mu\nu}\beta &= \mathcal{P}^\mu{}_\rho\mathcal{P}^\nu{}_\sigma\mathcal{J}^{\rho\sigma}, &(1189)\\
\beta\gamma^\mu\gamma_5\beta &= -\mathcal{P}^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma_5, &(1190)\\
\beta\gamma_5\beta &= -\gamma_5\ . &(1191)
\end{aligned}$$

- Naziv fermionskih stuja $\overline{\psi}(x)M\psi(x)$ odredjuje se iz njenih Lorentz transformacijskih svojstava (1180-1184) i transformacija na paritetnu transformaciju (1187-1191), po kojima su struje sa $M = \mathbb{1}, \gamma^\mu, \mathcal{J}^{\mu\nu}, \gamma^\mu\gamma_5, \gamma_5$ (po definiciji) skalarna, vektorska, tenzorska, pseudovektorska i pseudoskalarna struja.

(1192)

$*$ Fermijeva teorija i njena generalizacija

- Originalna gustoća Hamiltonijana medjudjelovanja za beta raspad je proporcionalna

$$\overline{\psi}_p\gamma_\mu\psi_n\overline{\psi}_e\gamma^\mu\psi_\nu\ . \tag{1193}$$

Ona nije omogućavala narušenje pariteta (nije sadržavala pseudoskalarni član).
- Nakon što su Lee i Yang pokrenuli pitanje narušenja pariteta oni su proširili listu nederivativnih medjudjelovanja na

$$\overline{\psi}_pM\psi_n\overline{\psi}_eM\psi_\nu \qquad \text{i} \qquad \overline{\psi}_pM\psi_n\overline{\psi}_eM\gamma_5\psi_\nu, \tag{1194}$$

$M = \mathbb{1}, \gamma^\mu, \mathcal{J}^{\mu\nu}, \gamma^\mu\gamma_5, \gamma_5$ od kojih drugi skup članova krši paritet.

$\square$ C-paritetna transformcija fermionskih struja

- C-transformacija $\overline{\psi}(x)$ slijedi iz (1157),

$$C\overline{\psi}(x)C^{-1} = (C\psi(x)C^{-1})^\dagger\beta = (-\xi^*\beta\mathcal{C}\psi^*(x))^\dagger\beta = \xi\psi^T(x)\mathcal{C}\ . \tag{1195}$$

- Odatle za C-transformaciju struja dobijamo (rabimo $\mathcal{C} = -\mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}^T$, $\beta\mathcal{C} = -\mathcal{C}\beta$, $\beta = \beta^T$, Fermi-Diracovu statistiku),

$$\begin{aligned}
C\overline{\psi}(x)M\psi(x)C^{-1} &= \psi^T(x)\mathcal{C}M(-\beta\mathcal{C}\psi^*(x))\\
&= -\psi^T(x)\mathcal{C}M\mathcal{C}^{-1}\overline{\psi}^T(x) = \overline{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1}M^T\mathcal{C}\psi(x)\ . &(1196)
\end{aligned}$$

Rabeći izraze za $\mathcal{C}$ transformirane matrice Diracove algebre, (1057), (1060), (1061), (1062), nalazimo

$$C\overline{\psi}(x)(\mathbb{1},\gamma^{\mu},\mathcal{J}^{\mu\nu},\gamma^{\mu}\gamma_5,\gamma_5)\psi(x)C^{-1} \;=\; \overline{\psi}(x)(\mathbb{1},-\gamma^{\mu},-\mathcal{J}^{\mu\nu},\gamma^{\mu}\gamma_5,\gamma_5)\psi(x)\ . \tag{1197}$$

Posebno, uočimo da vektorska struja, pseudoskalarna struja i aksijalno-vektorska imaju C-paritete -1, $+1$ odnosno $+1$.
- Kako je gustoća elektromagnetskog medjudjelovanja proporcionalna produktu vektorske fermionske struje i elektromagnetskog polja C-invarijantnost i negativan C-paritet vektorske struje implicira negativan C-paritet elektomagnetskog polja A_μ,

$$CA_\mu(x)C^{-1} \;=\; -A_\mu(x)\ . \tag{1198}$$

- Pionsko polje se identificira sa aksijano vektorskom kvarkovskom strujom, pa se analognim postupkom dobija da pion ima pozitivan C-paritet,

$$C\pi(x)C^{-1} \;=\; +\pi(x) \tag{1199}$$

(to je u skladu sa eksperimentom : $\pi^0 \to 2\gamma$).

5.6 CPT Teorem

- Do sada je pokazano da za svaku česticu postoji antičestica. Postoji precizna veza izmedju svojstava čestica i antičestica opisana sljedećim teoremom.

• **CPT teorem** (Luders 1954, Pauli 1957)
Uz prikladan izbor faza, produkt C, P i T transformacije, CPT je očuvan.

Dokaz ide u par koraka.

1. Transformacije polja na CPT transformaciju
Prema jednadzbama za P, C i T transformaciju skalarnog polja ((918), (918), (918 vektorskog polja ((1001), (1003), (1002)) i Diracovog polja ((1137), (1157), (1170)), dobivaju njihove pripadne CPT transformacije,

$$CPT\phi(x)[CPT]^{-1} = \zeta^*\xi^*\eta^*\phi^\dagger(-x), \tag{1200}$$

$$CPT\phi_\mu(x)[CPT]^{-1} = -\zeta^*\xi^*\eta^*\phi_\mu^\dagger(-x), \tag{1201}$$

$$CPT\psi(x)[CPT]^{-1} = -\zeta^*\xi^*\eta^*\gamma_5\psi^\dagger(-x)\ . \tag{1202}$$

D:

$$\begin{aligned}
(918) &\equiv P\phi(x)P^{-1} = \eta^*\phi(\mathcal{P}x),\\
(918) &\equiv C\phi(x)C^{-1} = \xi^*\phi^\dagger(x),\\
(918) &\equiv T\phi(x)T^{-1} = \zeta^*\phi(-\mathcal{P}x),\\
(1001) &\equiv P\phi^\mu(x)P^{-1} = -\eta^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu\phi^\nu(\mathcal{P}x),\\
(1003) &\equiv C\phi^\mu(x)C^{-1} = \xi^*\phi^{\mu\dagger}(x),\\
(1002) &\equiv T\phi^\mu(x)T^{-1} = \zeta^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu\phi^\nu(-\mathcal{P}x),\\
(1137) &\equiv P\psi(x)P^{-1} = \eta^*\beta\psi(\mathcal{P}x),\\
(1157) &\equiv C\psi(x)C^{-1} = -\xi^*\beta\mathcal{C}\psi^*(x),\\
(1170) &\equiv T\psi(x)T^{-1} = -\zeta^*\gamma_5\mathcal{C}\psi(-\mathcal{P}x)\ .\\
&\Downarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CPT\phi(x)[CPT]^{-1} &= CPT\phi(x)T^{-1}P^{-1}C^{-1}\\
&= CP[\zeta^*\phi(-\mathcal{P}x)]P^{-1}C^{-1} = C[\zeta^*\eta^*\phi(-\mathcal{P}\mathcal{P}x)]C^{-1}\\
&= \zeta^*\eta^*\xi^*\phi^\dagger(-x) \qquad \text{Q.E.D. (1200)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CPT\phi^\mu(x)[CPT]^{-1} &= CP[\zeta^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu\phi^\nu(-\mathcal{P}x)]P^{-1}C^{-1}\\
&= C[-\zeta^*\eta^*\phi^\mu(-x)]C^{-1} = -\zeta^*\eta^*\xi^*\phi^{\mu\dagger}(-x) \qquad \text{Q.E.D. (1201)},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
CPT\psi(x)[CPT]^{-1} &= CP[-\zeta^*\gamma_5\mathcal{C}\psi(-\mathcal{P}x)]P^{-1}C^{-1} \\
= \; & C[-\zeta^*\eta^*\gamma_5\mathcal{C}\beta\psi(-x)]C^{-1} = \zeta^*\eta^*\xi^*\gamma_5\mathcal{C}\beta\beta\mathcal{C}\psi^\dagger(-x) \\
= \; & -\zeta^*\eta^*\xi^*\gamma_5\psi^\dagger(-x) \qquad \text{Q.E.D. (1202).}
\end{aligned}
$$

U dokazu (1202) rabili smo $\mathcal{C}\mathcal{C} = -1$ i zamijenili $\psi^* \to \psi^\dagger$ (Weinberg je uveo ψ^* u (1157) samo da istakne da je riječ o matrici stupcu – operatori stvaranja i poništenja se hermitski konjugiraju).

2. Odabir faza
Izabrat ćemo faze za svaku česticu tako da je $\zeta\eta\xi = 1$. Odatle slijedi

$$
\begin{aligned}
CPT\phi(x)[CPT]^{-1} &= \phi^\dagger(-x), & (1203)\\
CPT\phi_\mu(x)[CPT]^{-1} &= -\phi_\mu^\dagger(-x), & (1204)\\
CPT\psi(x)[CPT]^{-1} &= -\gamma_5\psi^\dagger(-x)\ . & (1205)
\end{aligned}
$$

Rabeći te relacije ćemo odrediti CPT transformaciju bilo kojeg tenzora izgradjenog od skalarnih vektorskih ili Diracovih polja.

3. Transformacija tenzora izgradjenih od skalara, vektora i njihovih derivacija
CPT transformacija bilo kojeg tenzora ranga n izgradjen od skalarnih ili vektorskih polja i njihovih derivacija glasi

$$
CPT\phi_{\mu_1\ldots\mu_n}(x)[CPT]^{-1} = (-1)^n\phi^\dagger_{\mu_1\ldots\mu_n}(-x)\ . \qquad (1206)
$$

D:
- Indeksi $\mu_1\ldots\mu_n$ su ili vektorski indeksi ili dolaze od derivacija slalarnog ili vektorskog polja.
- Skalarno polje, prema (1203), ne donosi predznak -1
- Vektorsko, prema (1204), se javlja uz jedan takav predznak
- Svaka derivacija polja donosi dodatan (-1) predznak. Npr.

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu\phi(x) &= \lim_{\Delta x_\mu\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x_\mu)-\phi(x)}{\Delta x_\mu} \\
&\overset{CPT}{\rightarrow} \lim_{\Delta x_\mu\to 0}\frac{\phi^\dagger(-x-\Delta x_\mu)-\phi^\dagger(-x)}{\Delta x_\mu} \\
&= -\lim_{\Delta_\mu x\to 0}\frac{\phi^\dagger(-x+\Delta x_\mu)-\phi^\dagger(-x)}{\Delta x_\mu} = -\partial_\mu\phi^\dagger(-x)\ . \qquad (1207)
\end{aligned}
$$

Time je relacija (1206) dokazana.

4. Transformacije tenzora izgradjenih od bilinearnih kombinacija Diracovih polja
- Pri izgradnji tenzora od fermionskih polja spinorni indeksi moraju biti pokontrahirani.

Oni se mogu javiti samo u parovima $\overline{\psi}\ldots\psi$, tj. kroz struje Diracovih polja, pa je dovoljno promotriti CPT transformaciju fermionskih struja, koja glasi

$$CPT[\overline{\psi}_1(x)M\psi_2(x)][CPT]^{-1} \;=\; [\overline{\psi}_1(-x)\gamma_5 M\gamma_5\psi_2(-x)]^\dagger, \qquad (1208)$$

gdje je $M = \mathbb{1}, \gamma^\nu, \mathcal{J}^{\mu\nu}, \gamma^\mu\gamma_5, \gamma_5$.
D:

$$\begin{aligned} CPT[\overline{\psi}_1(x)M\psi_2(x)][CPT]^{-1} &= [-\gamma_5\psi_1^*(-x)]^\dagger\beta M^*[-\gamma_5\psi_2^*(-x)] \\ = \;\; \psi_2^\dagger(-x)\gamma_5 M^\dagger\gamma_5 \underbrace{[\psi_1^\dagger(-x)\beta]^\dagger}_{\overline{\psi}_1^\dagger(-x)} &= [\overline{\psi}_1(-x)\gamma_5 M\gamma_5\psi_2(-x)]^\dagger \qquad \text{Q.E.D. (1208)} \end{aligned}$$

- Kako je $\gamma_5 M\gamma_5 = (-1)^n M$, gdje je n broj Lorentzovih indeksa matrice M, $\overline{\psi}_1(x)M\psi_2(x)$ se ponaša kao tenzor izgradjen od skalarnih i vektorskih polja sa n Lorentovih indeksa.
- Sveukupno svaki tenzor sa n Lorentzovih indeksa izgradjen od skalarnih, vektorskih i Diracovih polja se transformira prema (1206).

5. Transformacija $\mathcal{H}(x)$ na CPT transformaciju.
- Gustoća Hamiltonijana $\mathcal{H}(x)$ nema niti jedan Lorentzov indeks. Prema tome

$$CPT\mathcal{H}(x)[CPT]^{-1} \;=\; \mathcal{H}^\dagger(-x) \;=\; \mathcal{H}(-x)\;. \qquad (1209)$$

Zadnja jednakost u (1209) posljedica je hermitičnosti gustoće Hamiltonijana.

6. Transformacija Hamiltonijana na CPT
- Iz (1209) slijedi da Hamiltonijan medjudjelovanja $V = \int d^3x\mathcal{H}(\vec{x},0)$ komutira sa CPT transformacijom,

$$\begin{aligned} CPT\,V[CPT]^{-1} &= \int d^3x \underbrace{CPT\mathcal{H}(\vec{x},0)[CPT]^{-1}}_{\mathcal{H}(-\vec{x},0)} \;=\; \int d^3x\mathcal{H}(\vec{x},0) \;=\; V \\ &\Downarrow \\ [CPT,V] &= 0\;. \end{aligned} \qquad (1210)$$

Time je CPT teorem dokazan.

□ **Podsjetnik : Fizikalne posljedice CPT teorema**.

Prisjetimo se fizikalnih posljedica CPT teorema:
- Jednakost amplituda

$$(744) \;=\; S_{\beta\alpha} \;=\; S_{\mathcal{CPT}\alpha\,\mathcal{CPT}\beta}\;. \qquad (1211)$$

Iz nje slijedi jednakost 4 impulsa, dakle i masa

$$m_n = m_{n^c}, \tag{1212}$$

te jednakost $M_{\beta\alpha}$ amplituda iz kojih kroz optički teorem proizlazi jednakost totalnih brzina procesa za "in" stanja α i $CPT\alpha$,

$$(752) = \Gamma_{p_1\sigma_1 n_1;\ldots} = \Gamma_{p_1 -\sigma_1 n_1^c;\ldots} . \tag{1213}$$

Posebno za jednočestična stanja

$$(754) = \Gamma_{p\sigma n} = \Gamma_{p\sigma n^c} . \tag{1214}$$

5.7 Polja bezmasenih čestica

- Do sada razmatrali samo polja masivnih čestica.
- Kod vektorskih polja smo primjetili da nema kontinuiranog prijelaza sa polja masivnivnih čestica na polja bezmasenih čestica koji dolaze zbog toga što barem jedna od polarizacija teži u beskonačnost kada masa teži k nuli. [Kod polja spina 1/2 (Diracovih polja) nema takvih problema.]
- U ovom poglavlju Weinberg pokazuje da **za bezmasene čestice spina $j \geq 1$ nije moguće rabiti ireducibilna polja** ((A, B) polja u poglavljima §2.6. i §2.7). Mi ćemo razmatrati samo Weinbergov dokaz za polja bezmasenih vektorskih čestica (tj. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ čestica u (A, B) notaciji). To ograničenje vodi prirodno na uvodjenje **baždarne invarijantnosti**.

• Pretpostavka izgleda polja i osnovne jednadžbe za koeficijente $u_\ell(p, \sigma)$ i $v_\ell(p, \sigma)$

$*$ Pretpostavka izgleda bezmasenog polja

- Pretpostavlja se da je polje za bezmasene čestice linearna kombinacija operatora poništenja $a(\vec{p}, \sigma)$ čestica impulsa $\vec{p}$ i spina σ i pripadnih operatora stvaranja $a^{c\dagger}(\vec{p}, \sigma)$ antičestica,

$$\phi_\ell(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\sigma [\kappa a(\vec{p}, \sigma) u_\ell(\vec{p}, \sigma) e^{ip\cdot x} + \lambda a^{c\dagger}(\vec{p}, \sigma) v_\ell(\vec{p}, \sigma) e^{-ip\cdot x}], \quad (1215)$$

gdje je $p^0 = |\vec{p}|$.

$*$ Transformacija polja i transformacija $u_\ell(p, \sigma)$ i $v_\ell(p, \sigma)$

- Transformacija operatora stvaranja i poništenja definirana je transformacijom stanja bezmasene čestice (299),

$$U(\Lambda) a^\dagger(\vec{p}, \sigma) U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma\theta(p, \Lambda)) a^\dagger(\vec{p}_\Lambda, \sigma)$$

$$\Downarrow \quad (1216)$$

$$U(\Lambda) a^{c\dagger}(\vec{p}, \sigma) U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma\theta(p, \Lambda)) a^{c\dagger}(\vec{p}_\Lambda, \sigma), \quad (1217)$$

$$U(\Lambda) a(\vec{p}, \sigma) U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(-i\sigma\theta(p, \Lambda)) a(\vec{p}_\Lambda, \sigma), \quad (1218)$$

gdje je $p_\Lambda = \Lambda p$, a θ kut definiran jednadžbom (300),

$$
\begin{aligned}
(300) \quad &= \quad W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \\
&\overset{(275)}{\equiv} \quad S(\alpha(\Lambda, p), \beta(\Lambda, p))R(\theta(\Lambda, p)) \ .
\end{aligned} \tag{1219}
$$

Uočimo da prema (299)

$$
exp(i\sigma\theta(\Lambda, p))\delta_{\sigma'\sigma} = D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)), \tag{1220}
$$

$$
exp(-i\sigma\theta(p, \Lambda))\delta_{\sigma'\sigma} = D^*_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)), \tag{1221}
$$

odgovaraju medjusobno kompleksno konjugiranim čestičnim reprezentacijama.
- Kao i za masivne čestice, pretpostavlja se da se polje (1215) transformira prema nekoj reprezenaciji homogene Lorentzeve grupe, $D(\Lambda)$,

$$
U(\Lambda)\psi_\ell(x)U^{-1}(\Lambda) = \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(\Lambda^{-1})\psi_\ell(\Lambda x) \ . \tag{1222}
$$

- Iz (1218), (1217) i (1222) slijedi da koeficijentne funkcije $u_\ell(p, \sigma)$ i $v_\ell(p, \sigma)$ zadovoljavaju jednadžbe

$$
u_{\bar{\ell}}(\vec{p}_\Lambda, \sigma)\exp(i\sigma\theta(p, \Lambda)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_\ell D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda)u_\ell(\vec{p}, \sigma), \tag{1223}
$$

$$
v_{\bar{\ell}}(\vec{p}_\Lambda, \sigma)\exp(-i\sigma\theta(p, \Lambda)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_\ell D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda)v_\ell(\vec{p}, \sigma) \tag{1224}
$$

(umjesto jednadžbi za opću Lorentzovu transformaciju koeficijentnih funkcija za $m_\ell > 0$, (860) i (861)).
D:
Usporedba raspisa lijeve strane jednadžbe (1222)

$$
\begin{aligned}
(1222)_L \equiv \ & U(\Lambda)\psi_\ell(x)U^{-1}(\Lambda) \\
= \ & \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\sigma \\
& \left[\kappa u_\ell(\vec{p}, \sigma)e^{ip\cdot x} \times \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(-i\sigma\theta(p, \Lambda))a(\vec{p}_\Lambda, \sigma) \right. \\
& \left. +\lambda v_\ell(\vec{p}, \sigma)e^{-ip\cdot x} \times \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \exp(i\sigma\theta(p, \Lambda))a^{c\dagger}(\vec{p}_\Lambda, \sigma) \right],
\end{aligned} \tag{1225}
$$

i desne strane jednadžbe (1222) u kojoj identificiramo $p = \Lambda p' = p'_\Lambda$ ($d^3p = d^3p'(\Lambda p')^0/p'^0$)

$$
(1222)_R = \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(\Lambda^{-1})\psi_\ell(\Lambda x)
$$

$$
\begin{aligned}
= & \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{(\Lambda p')^0}{p'^0} \sum_\sigma \\
& \Big[\kappa \sum_{\overline{\ell}} D_{\ell\overline{\ell}}(\Lambda^{-1}) u_{\overline{\ell}}(\vec{p}'_\Lambda, \sigma) \times e^{ip'\cdot x} a(\vec{p}'_\Lambda, \sigma) \\
& +\lambda \sum_{\overline{\ell}} D_{\ell\overline{\ell}}(\Lambda^{-1}) v_{\overline{\ell}}(\vec{p}'_\Lambda, \sigma) \times e^{-ip'\cdot x} a^{c\dagger}(\vec{p}'_\Lambda, \sigma)\Big], \qquad (1226)
\end{aligned}
$$

vodi na jednakosti (1223) i (1224). Q.E.D.

• **Jednadžbe za $u_\ell(k,\sigma)$ i $v_\ell(k,\sigma)$ - uvjeti koji definiraju $u_\ell(k,\sigma)$ i $v_\ell(k,\sigma)$**

∗ **Veza $u_\ell(p,\sigma)$, $v_\ell(p,\sigma)$ sa $u_\ell(k,\sigma)$, $v_\ell(k,\sigma)$**

- Uvjeti (1223) i (1224) vrijede za opću Lorenzovu transformaciju.
- Analizirajmo te jednadžbe za specijalan slučaj koji odgovara slučaju boostirane bezmasnene čestice: Uzmimo da je $p = k$ (k je standardnom impulsu bezmasene čestice), $\Lambda = \mathcal{L}(p)$ ($\mathcal{L}(p)$ je standardna Lorenzova transformacija za bezmasene čestice koja transformira k u impuls p). Tada opća Wignerova rotacija postaje jednaka jedinici ($\mathcal{L}(p) \to \mathcal{L}(k) = 1$, $\Lambda \to \mathcal{L}(p)$, $\mathcal{L}(\Lambda p) \to \mathcal{L}(p)$, $p^0 \to k^0$, $(\Lambda p)^0 \to p^0$),

$$
W(\theta(p,\Lambda)) = \mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p) \to \mathcal{L}^{-1}(p)\mathcal{L}(p)1 = 1, \qquad (1227)
$$

a jednadžbe (1223) i (1224) postaju jednake

$$
\begin{aligned}
u_{\overline{\ell}}(\vec{p},\sigma) &= \sqrt{\frac{k^0}{p^0}} \sum_{\overline{\ell}} D_{\ell\overline{\ell}}(\mathcal{L}(p)) u_\ell(\vec{k},\sigma), \qquad (1228) \\
v_{\overline{\ell}}(\vec{p},\sigma) &= \sqrt{\frac{k^0}{p^0}} \sum_{\overline{\ell}} D_{\ell\overline{\ell}}(\mathcal{L}(p)) v_\ell(\vec{k},\sigma) \ . \qquad (1229)
\end{aligned}
$$

∗ **Jednadžbe za $u_\ell(k,\sigma)$ i $v_\ell(k,\sigma)$**

- Izražavajući $u_\ell(\vec{p},\sigma)$ i $v_\ell(\vec{p},\sigma)$ preko $u_\ell(\vec{k},\sigma)$ i $v_\ell(\vec{k},\sigma)$ uporabom (1228) i (1229) u jednadžbama (1223) i (1224) dobijamo jednadžbe koje su pandan rotacijskih uvjeta (865) i (865) za masivne čestice,

$$
\begin{aligned}
u_{\overline{\ell}}(\vec{k},\sigma)\exp(i\sigma\theta(k,W)) &= \sum_\ell D_{\overline{\ell}\ell}(W) u_\ell(\vec{k},\sigma), \qquad (1230) \\
v_{\overline{\ell}}(\vec{k},\sigma)\exp(-i\sigma\theta(k,W)) &= \sum_\ell D_{\overline{\ell}\ell}(W) v_\ell(\vec{k},\sigma) \ . \qquad (1231)
\end{aligned}
$$

D:
Kako je postupak ekvivalentan za $u_\ell(\vec{k},\sigma)$ i $v_\ell(\vec{k},\sigma)$, dokaz dajem samo za $u_\ell(\vec{k},\sigma)$. Iz (1223) i (1228) slijedi

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell_1} \sqrt{\frac{k^0}{(\Lambda p)^0}} D_{\bar{\ell}\ell_1}(\mathcal{L}(\Lambda p))\, u_{\ell_1}(\vec{k},\sigma) \exp(i\sigma\theta(p,\Lambda)) \\
&= \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda) \sum_{\ell_1} \sqrt{\frac{k^0}{p^0}} D_{\ell\ell_1}(\mathcal{L}(p))\, u_{\ell_1}(\vec{k},\sigma)\ .
\end{aligned}
$$

$D(\Lambda)$ matrice tvore reprezentaciju Lorentzove grupe (vidi 838), pa rabeći (1230) dobijamo

$$
u_\ell(\vec{k},\sigma) \exp(i\sigma\theta(p,\Lambda)) = \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(W(\Lambda,p)) u_{\bar{\ell}}(\vec{k},\sigma)\ . \qquad \text{Q.E.D. (1230)}
$$

- Prema (1219) Wignerova rotacija W je funkcija triju parametara α, β i θ i može se uvijek prikazati kao produkt rotacije oko z osi $R(\theta(\Lambda,p))$ i transformacije $S(\alpha(\Lambda,p),\beta(\Lambda,p))$ (generatori $A = J_2 + K_1$ i $B = -J_1 + K_2$: kombinirana rotacija i boost u $x-y$ ravnini). Kako je faza lijevih strana jednadžbi (1230) i (1231) ovisna samo o θ ona dolazi od djelovanja rotacije,

$$
u_\ell(\vec{k},\sigma) \exp(i\sigma\theta) = \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(R(\theta)) u_{\bar{\ell}}(\vec{k},\sigma), \tag{1232}
$$

$$
v_\ell(\vec{k},\sigma) \exp(-i\sigma\theta) = \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(R(\theta)) v_{\bar{\ell}}(\vec{k},\sigma), \tag{1233}
$$

dok $S(\alpha,\beta)$ ne djeluje na koeficijentne funkcije,

$$
u_\ell(\vec{k},\sigma) = \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(S(\alpha,\beta)) u_{\bar{\ell}}(\vec{k},\sigma), \tag{1234}
$$

$$
v_\ell(\vec{k},\sigma) = \sum_{\bar{\ell}} D_{\ell\bar{\ell}}(S(\alpha,\beta)) v_{\bar{\ell}}(\vec{k},\sigma)\ . \tag{1235}
$$

- Jednadžbe (1232)-(1235) su uvjeti koje definiraju koeficijentne valne funkcije za standardni impuls k.
- Primjetimo da kao što generatori male grupe A i B ne djeluju na stanja Ψ_α opisanog kvantnim brojevima $p\sigma n$ tako ne djeluju ni na polja tj. na indekse polja ℓ (u reprezentaciji polja označit ćemo te operatore sa $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$). S druge strane generator male grupe J_3 ($\mathcal{J}$ u rep. polja) mijenja i stanja tj. indekse $p\sigma n$ i polja tj. indekse ℓ.
- Po definiciji $v_\ell(\vec{k},\sigma)$ odgovaraju antičestičnoj reprezentaciji koja je kompleksno konjugirana čestičnoj reprezentaciji $u_\ell(\vec{k},\sigma)$. Rabeći jednakost $(J_3^*)_{\sigma\sigma} = -(J_3)_{-\sigma-\sigma}$ dobijamo identifikaciju

$$
v_\ell(\vec{k},\sigma), = u_\ell^*(\vec{k},\sigma), = u_\ell(\vec{k},-\sigma)\ . \tag{1236}
$$

D:

$$\begin{aligned} u_\ell(\vec{k},\sigma)(\sigma) &\overset{(1232)}{=} u_\ell(\vec{k},\sigma)((J_3)_{\sigma\sigma}) \;=\; \mathcal{J}_{\ell\bar{\ell}} u_{\bar{\ell}}(\vec{k},\sigma), & (1237)\\ v_\ell(\vec{k},\sigma)(-\sigma) &\overset{(1233)}{=} v_\ell(\vec{k},\sigma)(-(J_3^*)_{\sigma\sigma}) \\ &= v_\ell(\vec{k},\sigma)((J_3)_{-\sigma-\sigma}) \;=\; \mathcal{J}_{\ell\bar{\ell}} v_{\bar{\ell}}(\vec{k},\sigma) & (1238)\\ &\Downarrow \\ v_\ell(\vec{k},\sigma) &= u_\ell(\vec{k},-\sigma)\ . & (1239)\end{aligned}$$

Stoga se nadalje možemo koncentrirati samo na $u_\ell(\vec{k},\sigma)$ funkciju.

• Ilustracija problema nemogućnosti izgradnje polja od besmasenih čestica ireducibilnih Lorentzovih transformacija na primjeru vektorskog polja

- Uvjet (1234) je problematičan, jer se ne može ispuniti za opću reprezentaciju homogene Lorentzove grupe.

$*$ **Bezmaseno vektorsko polje**

- Problem ćemo ilustrirati pokušavajući konstruirati 4-vektorsko $[(\frac{1}{2},\frac{1}{2})]$ polje za bezmasenu česticu heliciteta ± 1.
- Homogena Lorentzova transformacija ($D_{\ell\bar{\ell}}(\Lambda)$) vektorskog polja (indeksi su $\mu = 1,2,3,0$) glasi

$$D^\mu{}_\nu(\Lambda) \;=\; \Lambda^\mu{}_\nu\ . \tag{1240}$$

- Koeficijentna funkcija ($u_\ell(\vec{p},\sigma)$) $u_\mu(\vec{p},\sigma)$ se standardno zapisuje preko polarizacijskih vektora e_μ

$$u_\mu(\vec{p},\sigma) \;=\; (2p^0)^{-1/2} e_\mu(\vec{p},\sigma), \tag{1241}$$

pa iz (1228) slijedi

$$e^\mu(\vec{p},\sigma) \;=\; \mathcal{L}^\mu{}_\nu(p) e^\nu(\vec{k},\sigma)\ . \tag{1242}$$

D:
Uvrštavajući (1240) (1241) i (1242) u (1228) dobijamo

$$\frac{1}{\sqrt{2p^0}} e^\mu(\vec{p},\sigma) \;=\; \sqrt{\frac{k^0}{p^0}} \mathcal{L}^\mu{}_\nu(p) \frac{1}{\sqrt{2k^0}} e^\nu(\vec{k},\sigma),$$

odakle slijedi (1242).

$*$ **Uvjeti za i rješenja za $\epsilon^\mu(k,\sigma)$; Wignerova rotacija $\epsilon^\mu(k,\sigma)$**

- Uvjeti za $u^\mu(\vec{k},\sigma)$ (1230), (1232) i (1234) glase

$$
\begin{aligned}
e^\mu(\vec{k},\sigma)\exp(i\sigma\theta) &= D^\mu{}_\nu(W(\theta,\alpha,\beta))e^\nu(\vec{k},\sigma), &(1243)\\
e^\mu(\vec{k},\sigma)\exp(i\sigma\theta) &= R^\mu{}_\nu(\theta)e^\nu(\vec{k},\sigma), &(1244)\\
e^\mu(\vec{k},\sigma) &= S^\mu{}_\nu(\alpha,\beta)e^\nu(\vec{k},\sigma), &(1245)
\end{aligned}
$$

gdje su dijelovi Wignerove rotacije $R^\mu{}_\nu(\theta)$ i $S^\mu{}_\nu(\alpha,\beta)$

$$
(269) = S^\mu{}_\nu(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1-\zeta & \zeta \\ \alpha & \beta & -\zeta & 1+\zeta \end{pmatrix}, \tag{1246}
$$

$$
(274) = R^\mu{}_\nu(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1247}
$$

- Iz (1244) i (1247) slijedi da je $e^\mu(\vec{k},\pm 1)$ do na konstantu jednak

$$
e^\mu(\vec{k},\pm 1) \equiv (1,\pm i,0,0)^T/\sqrt{2}\,. \tag{1248}
$$

- Medjutim, sa tim $e^\mu(\vec{k},\pm 1)$ ne može biti ispunjena druga jednadžba.
D:
(1244), (1247) $\Rightarrow$

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^1(c_\theta+i\sigma s_\theta) \\ e^2(c_\theta+i\sigma s_\theta) \\ e^3(c_\theta+i\sigma s_\theta) \\ e^0(c_\theta+i\sigma s_\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} c_\theta e^1 + s_\theta e^2 \\ -s_\theta e^1 + c_\theta e^2 \\ e^3 \\ e^0 \end{pmatrix} \tag{1249}
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
e^2 = i\sigma e^1, \qquad e^3 = e^0 = 0 \qquad \text{Q.E.D. (1248)} \tag{1250}
$$

($c_\theta = \cos\theta$, $s_\theta = \sin\theta$),

(1245), (1247), (1248) $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ \alpha \pm i\beta \\ \alpha \pm i\beta \end{pmatrix} \\
\equiv e^\mu(\vec{k},\pm 1) &= e^\mu(\vec{k},\pm 1) + \frac{\alpha \pm i\beta}{\sqrt{2}|\vec{k}|}k^\mu\,. &(1251)
\end{aligned}
$$

- Ta jednakost ne može biti ispunjena za bilo koju Wignerovu rotaciju (konkretno, ispunjena je samo ako vrijedi $\alpha \pm i\beta = 0$). Drugim riječima bazični uvjet (1245) odnosno (1243) ne može biti ispunjen; umjesto (1243) imamo (Wignerova rotacija $e^\mu(\vec{k},\sigma)$)

$$\begin{aligned} D^\mu{}_\nu(W(\theta,\alpha,\beta))e^\nu(\vec{k},\sigma) &= S^\mu{}_\lambda(\alpha,\beta)R^\lambda{}_\nu(\theta)e^\nu(\vec{k},\sigma) \\ &= e^{i\sigma\theta}\left(e^\mu(\vec{k},\sigma) + \frac{\alpha + i\sigma\beta}{\sqrt{2}|\vec{k}|}k^\mu\right) . \end{aligned} \tag{1252}$$

Iz toga slijedi da se od operatora stvaranja i poništenja bezmasenih polja ne može izgraditi polje koje se transformira kao 4-vektor.

$*$ a^μ, svojstva a^μ, Coulombovo baždarenje

- Zanemarimo taj problem za sada. Izgradimo polje od dijelova koji se jednako transformiraju na sve transformacije a sadrže i čestični i antičestični dio (Weinberg je u svojoj knjizi definirao a_μ polje sa $\kappa = \lambda = 1$, iako nije još nije pokazao $|\kappa| = |\lambda|$ slijedi iz komutacijskih relacija – vidi poslije),

$$\begin{aligned} a_\mu(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2p^0)^{1/2}} \sum_{\sigma=\pm1} \\ &\quad \left[\kappa e_\mu(\vec{p},\sigma)e^{ip\cdot x}a(\vec{p},\sigma) + \lambda e^*_\mu(\vec{p},-\sigma)e^{-ip\cdot x}a^{c\dagger}(\vec{p},-\sigma)\right] . \end{aligned} \tag{1253}$$

$a(\vec{p},\sigma)$ i $a^{c\dagger}(\vec{p},-\sigma)$ se jednako transformiraju na Lorentzove transformacije prema (1217) i (1218). Istovjetnost $e_\mu(\vec{p},\sigma)$ i $e^*_\mu(\vec{p},-\sigma)$ slijedi iz (1242), izraza za standardnu Lorentzovu transformaciju bezmasenih čestica $\mathcal{L}(p)$ (301), invarijantnosti $e_\mu(\vec{k},\sigma)$ (1248) na boost u z smjeru $\mathcal{B}(|\vec{p}|/|\vec{k}|)$ (302), realnosti matrice rotacije iz z smjera u $\hat{p}$ smjer, $R(\hat{p})$ i jednakosti $e^\mu(\vec{k},\sigma) = e^{\mu *}(\vec{k},-\sigma)$ (vidi (1248)),

$$\begin{aligned} e^\mu(\vec{p},\sigma) &= \mathcal{L}^\mu{}_\nu(p)e^\nu(\vec{k},\sigma) \;=\; R^\mu{}_\lambda(\hat{p})\mathcal{B}^\lambda_\nu(|\vec{p}|/|\vec{k}|)e^\nu(\vec{k},\sigma) \\ &= R^\mu{}_\nu(\hat{p})e^\nu(\vec{k},\sigma) \\ &= (R^\mu{}_\nu(\hat{p})e^\nu(\vec{k},-\sigma))^* \;=\; e^{\mu *}(\vec{p},-\sigma) . \end{aligned} \tag{1254}$$

- Polje $a^\mu(x)$ zadovoljava bezmasenu Klein Gordonovu jednadžbu,

$$\Box a^\mu(x) = 0 . \tag{1255}$$

- Nadalje, budući da $e^0(\vec{k},\pm1) = 0$ i $\vec{k}\cdot\vec{e}(\vec{k},\pm1) = 0$, jednadžba (1254) (posebno drugi red te jednadžbe) vodi na

$$e^0(\vec{p},\pm1) = 0, \tag{1256}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{e}(\vec{p},\pm1) = 0, \tag{1257}$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} a^0(x) &= 0, & (1258)\\ \nabla\vec{a}(x) &= 0\ . & (1259)\end{aligned}$$

(1258) i (1259) su uvjeti koje EM vektorski potencijal zadovoljava u Coulombovom baždarenju.

$*$ **Baždarna transformacija** $\epsilon^\mu(p,\sigma)$ **i** a_μ

- To da je $a^0(x)=0$ u svakom inercijanom sustavu jasno pokazuje da $a^\mu(x)$ ne može biti 4-vektor.
- Umjesto toga $a^\mu(x)$ se pri općoj LT baždarno transformira. Evo kako se to dobija. Iz izraza za Wignerovu rotaciju (1227), $W=\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p)$, Lorentzove transformacije koeficijentnih funkcija (1242) i jednadžbe (1252) slijedi

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{L}(p))^\mu{}_\nu e^\nu(\vec{k},\sigma) &= e^{\pm i\theta}\left(e^\mu(\vec{k},\sigma)+\frac{\alpha\pm i\beta}{\sqrt{2}|\vec{k}|}k^\mu\right)\\ &\Downarrow\\ e^\mu(\vec{p},\sigma) &= \frac{\alpha\pm i\beta}{\sqrt{2}|\vec{k}|}p^\mu e^{\pm i\theta}+e^{\pm i\theta}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu e^\nu(\vec{p}_\Lambda,\sigma)\ . \qquad (1260)\end{aligned}$$

Rabeći taj rezultat homogena Lorentzova transformacija polja $a^\mu(x)$ dobija oblik

$$U(\Lambda)a_\mu(x)U^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu a_\nu(\Lambda x)+\partial_\mu\Omega(x,\Lambda)\ . \qquad (1261)$$

D:

$$\begin{aligned} & U(\Lambda)a_\mu(x)U^{-1}(\Lambda)\\ &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2p^0)^{1/2}}\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}e^{-i\sigma\theta}\sum_\sigma\\ &\quad\left[\kappa e^{ip\cdot x}e_\mu(\vec{p},\sigma)a(\Lambda p,\sigma)+\lambda e^{-ip\cdot x}e^*_\mu(\vec{p},-\sigma)a^{c\dagger}(\Lambda p,-\sigma)\right]\\ &\overset{(1260)}{=} \int\frac{d^3p_\Lambda}{(2\pi)^{3/2}(2p^0_\Lambda)^{1/2}}e^{-i\sigma\theta}\sum_\sigma\\ &\quad\Big[\kappa e^{ip_\Lambda\Lambda x}e^{i\sigma\theta}\Big((\Lambda^{-1}e(p_\Lambda,\sigma))_\mu+\frac{\alpha+i\sigma\beta}{\sqrt{2}|\vec{k}|}(\Lambda^{-1}p_\Lambda)_\mu\Big)a(p_\Lambda,\sigma)\\ &\quad+\lambda e^{-ip_\Lambda\Lambda x}e^{i\sigma\theta}\Big((\Lambda^{-1}e(p_\Lambda,-\sigma))_\mu+\frac{\alpha-i\sigma\beta}{\sqrt{2}|\vec{k}|}(\Lambda^{-1}p_\Lambda)_\mu\Big)^*a^{c\dagger}(p_\Lambda,-\sigma)\Big]\\ &\overset{p_\Lambda\to p}{=} (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2p^0)^{1/2}}\sum_\sigma\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& [\kappa e^{ip\Lambda x} e(p,\sigma)_\nu a(p,\sigma) + \lambda e^{-ip\Lambda x} e(p,-\sigma)^*_\nu a^{c\dagger}(p,\sigma)] \\
+ \quad & \partial_\mu \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2p^0)^{1/2}} \sum_\sigma \frac{\alpha - i\sigma\beta}{\sqrt{2}|\vec{k}|} \\
& \Big[-i\kappa e^{i\Lambda^{-1}p\cdot x} a(\vec{p},\sigma) + i\lambda e^{-i\Lambda^{-1}p\cdot x} a^{c\dagger}(\vec{p},\sigma) \Big] \\
\Downarrow &
\end{aligned} \tag{1262}
$$

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda) a_\mu(x) U^{-1}(\Lambda) &= \Lambda^\nu{}_\mu a_\nu(x) + \partial_\mu \Omega(x,\Lambda) \\
\Omega(x,\Lambda) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2p^0)^{1/2}} \sum_\sigma \frac{\alpha + i\sigma\beta}{\sqrt{2}|\vec{k}|} \\
& \Big[-i e^{i\Lambda^{-1}p\cdot x} a(\vec{p},\sigma) + i e^{-i\Lambda^{-1}p\cdot x} a^{c\dagger}(\vec{p},\sigma) \Big] \,.
\end{aligned} \tag{1263}
$$

Time smo dokazali (1261).
- Kod teorija sa bezmasenim vektorskim poljem se zahtjeva ne samo da je teorija formalno Lorentz invarijantna (do na baždarnu transf. bezmasenog vektorskog polja), već i invarijantnost na baždarnu transformaciju $a_\mu \to a_\mu + \partial_\mu \Omega$. To se ostvaruje vezanjem a_μ polja na sačuvanu 4-vektorsku struju ($\partial_\mu j^\mu = 0$) oblika $a_\mu j^\mu$.

• Tenzor elektromagnetskog polja

$*$ Baždarna invarijantnost $f_{\mu\nu}$

- Iako nema vektorskog polja za bezmasene čestice heliciteta ± 1, nema problema sa konstrukcijom antisimetričnog tezorskog polja za takve čestice.
- Iz invarijantnosti k^μ na malu grupu LT i (1252) slijedi

$$
\begin{aligned}
& D^\mu{}_\rho(W(\theta,\alpha,\beta)) D^\nu{}_\sigma(W(\theta,\alpha,\beta)) \Big(k^\rho e^\sigma(\vec{k},\pm 1) - k^\sigma e^\rho(\vec{k},\pm 1) \Big) \\
= \; & k^\mu e^{\pm i\theta} \Big(e^\nu(\vec{k},\pm 1) - \frac{\alpha \pm i\beta}{\sqrt{2}|\vec{k}|} k^\nu \Big) - k^\nu e^{\pm i\theta} \Big(e^\mu(\vec{k},\pm 1) - \frac{\alpha \pm i\beta}{\sqrt{2}|\vec{k}|} k^\mu \Big) \\
= \; & e^{\pm i\theta} \Big(k^\mu e^\nu(\vec{k},\pm 1) - k^\nu e^\mu(\vec{k},\pm 1) \Big) \,.
\end{aligned} \tag{1264}
$$

To pokazuje da

$$
u^{\mu\nu}(\vec{p},\pm 1) \;=\; i(2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-1/2} \Big(p^\mu e^\nu(\vec{p},\pm 1) - p^\nu e^\mu(\vec{p},\pm 1) \Big) \tag{1265}
$$

zadovoljava jednadžbu (1223) za antisimetričnu reprezentaciju homogene Lorentzove grupe ($e^\mu(\vec{p},\sigma)$ je definiran drugim retkom jednadžbe (1254)).
D:
Rabeći izraz za Wignerovu rotaciju (1227) i (1254) dobijamo

$$
\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma (p^\rho e^\sigma(\vec{p},\pm 1) - p^\sigma e^\rho(\vec{p},\pm 1)) \;=\; e^{\pm i\theta} (p^\mu_\Lambda e^\nu(\vec{p}_\Lambda,\pm 1) - p^\nu_\Lambda e^\mu(\vec{p}_\Lambda,\pm 1)), \tag{1266}
$$

odakle uporabom (1265) slijedi

$$\sqrt{\frac{p^0}{p^0_\Lambda}}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma u^{\rho\sigma}(\vec{p},\pm 1) \;=\; u^{\mu\nu}(\vec{p}_\Lambda,\pm 1)e^{\pm i\theta} \qquad \text{Q.E.D.} \tag{1267}$$

- Rabeći (1265) i (1253) dobija se antisimetrično tenzorsko polje bezmasenih čestica heliciteta ± 1 oblika

$$f_{\mu\nu}(x) \;=\; \partial_\mu a_\nu(x) - \partial_\nu a_\mu(x)\ . \tag{1268}$$

Ono se transformira kao tenzor iako se a_μ ne transformira kao vektor.
D:
Zapravo za dokaz mi i ne treba (1267):

$$\begin{aligned} U(\Lambda)f_{\mu\nu}(x)U^{-1}(\Lambda) &\overset{(1261)}{=} \partial^x_\mu(\Lambda^\sigma{}_\nu a_\sigma(\Lambda x) + \partial^x_\nu\Omega(x,\Lambda)) - \partial^x_\nu(\Lambda^\rho{}_\mu a_\rho(\Lambda x) + \partial^x_\mu\Omega(x,\Lambda)) \\ &= (\Lambda^\rho{}_\mu\partial^{\Lambda x}_\rho)(\Lambda^\sigma{}_\nu a_\sigma(\Lambda x)) - (\Lambda^\sigma{}_\nu\partial^{\Lambda x}_\sigma)(\Lambda^\rho{}_\mu a_\rho(\Lambda x)) \\ &\overset{(1268)}{=} \Lambda^\rho{}_\mu\Lambda^\sigma{}_\nu f_{\rho\sigma}(\Lambda x) \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned} \tag{1269}$$

$*$ Makswellove jednadžbe

- $f_{\mu\nu}$ zadovoljava slobodne Maxwellove jednadžbe,

$$\partial_\mu f^{\mu\nu}(x) \;=\; 0, \tag{1270}$$

$$\varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\partial_\sigma f_{\mu\nu}(x) \;=\; 0\ . \tag{1271}$$

D:

$$\partial_\mu f^{\mu\nu}(x) \;=\; \underbrace{\Box a^\nu(x)}_{=0} - \partial^\nu(\underbrace{\nabla\vec{a}(x)}_{=0} + \partial_0\underbrace{a^0(x)}_{=0}) \;=\; 0, \tag{1272}$$

$$\varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\partial_\sigma f_{\mu\nu}(x) \;=\; \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\mu a_\nu(x) - \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\nu a_\mu(x) \;=\; 0\ . \tag{1273}$$

$*$ Komutacijske relacije : $|\kappa| = |\lambda|$

- Za nalaženje komutacijskih relacija potrebna nam je suma $\sum_\sigma e^\mu e^{\nu *}$ za bilo koju vrijednost impulsa. Iz (1248) i izraza za standardni impuls slijedi

$$\sum_{\sigma=\pm 1} e^i(\vec{k},\sigma)e^j(\vec{k},\sigma)^* \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \;=\; \delta_{ij} - \frac{k^i k^j}{|\vec{k}|^2}, \tag{1274}$$

a odatle rabeći (1254)

$$\sum_{\sigma=\pm 1} e^i(\vec{p},\sigma)e^j(\vec{p},\sigma)^* = \delta_{ij} - \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2} . \tag{1275}$$

- Odatle nakon malo dužeg računa slijedi

$$\begin{aligned} [f_{\mu\nu}(x), f^\dagger_{\rho\sigma}(y)]_\pm &= (-\eta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\sigma + \eta_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\sigma + \eta_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\rho - \eta_{\nu\sigma}\partial_\mu\partial_\rho) \\ &\quad \times \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3(2p^0)}[|\kappa|^2 e^{ip\cdot(x-y)} \pm |\lambda|^2 e^{-ip\cdot(x-y)}] . \end{aligned} \tag{1276}$$

D:
- Rabeći

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu}(x) &= \int d^3p \sum_\sigma [\kappa u_{\mu\nu}(\vec{p},\sigma)e^{ip\cdot x}a(\vec{p},\sigma) + \lambda u^*_{\mu\nu}(\vec{p},\sigma)e^{ip\cdot x}a^{c\dagger}(\vec{p},\sigma)] \\ &= f^{(+)}_{\mu\nu}(x) + f^{(-)}_{\mu\nu}(x), \end{aligned} \tag{1277}$$

dobijamo

$$\begin{aligned} &[f_{\mu\nu}(x), f^\dagger_{\rho\sigma}(y)]_\pm \\ &\quad = \int d^3p \sum_\sigma \Big(|\kappa|^2 u_{\mu\nu}(\vec{p},\sigma)u^*_{\rho\sigma}(\vec{p},\sigma)e^{ip\cdot(x-y)} \\ &\qquad\qquad \pm|\lambda|^2 u^*_{\mu\nu}(\vec{p},\sigma)u_{\rho\sigma}(\vec{p},\sigma)e^{-ip\cdot(x-y)}\Big) . \end{aligned} \tag{1278}$$

- Primjetimo da su do na $|\kappa|^2$ i $|\lambda|^2$ pribrojnici unutar zagrade medjusobno kompleksno konjugirani.
- Za daljnji račun treba nam eksplicitni izraz za sumu

$$\begin{aligned} &(2\pi)^{3/2}(2p^0)\sum_\sigma u_{\mu\nu}(\vec{p},\sigma)u^*_{\rho\sigma}(\vec{p},\sigma) \\ &= \sum_\sigma (p_\mu e_\nu(\vec{p},\sigma) - p_\nu e_\mu(\vec{p},\sigma))(p_\rho e^*_\sigma(\vec{p},\sigma) - p_\sigma e^*_\rho(\vec{p},\sigma)) . \end{aligned} \tag{1279}$$

Ako izrazimo bilineranu sumu (1274) preko metričkog tenzora i dva "četverovektora" $t^\mu = (0,0,0,1)$ i $\tilde{p}^\mu \equiv p^\mu/|\vec{p}| = (\hat{p},1)$ (npr. $(\hat{p},0) = \tilde{p}^\mu - t^\mu$, $\eta_{\mu\nu} + t_\mu t_\nu = diag(\delta_{ii},0)$),

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=\pm1} e_\mu(\vec{p},\sigma)e_\nu(\vec{p},\sigma) &= \eta_{\mu\nu} + t_\mu t_\nu - (\tilde{p}_\mu - t_\mu)(\tilde{p}_\nu - t_\nu) \\ &= \eta_{\mu\nu} - \tilde{p}_\mu\tilde{p}_\nu + \tilde{p}_\mu t_\nu + t_\mu\tilde{p}_\nu, \end{aligned} \tag{1280}$$

za sumu (1279) dobijamo

$$
\begin{aligned}
& (2\pi)^{3/2}(2p^0)\sum_\sigma u_{\mu\nu}(\vec{p},\sigma)u^*_{\rho\sigma}(\vec{p},\sigma) \\
= \;& p_\mu p_\rho(\eta_{\nu\sigma} - \tilde{p}_\nu\tilde{p}_\sigma + \tilde{p}_\nu t_\sigma + t_\nu\tilde{p}_\sigma) \\
- \;& p_\mu p_\sigma(\eta_{\nu\rho} - \tilde{p}_\nu\tilde{p}_\rho + \tilde{p}_\nu t_\rho + t_\nu\tilde{p}_\rho) \\
- \;& p_\nu p_\rho(\eta_{\mu\sigma} - \tilde{p}_\mu\tilde{p}_\sigma + \tilde{p}_\mu t_\sigma + t_\mu\tilde{p}_\sigma) \\
+ \;& p_\nu p_\sigma(\eta_{\mu\rho} - \tilde{p}_\mu\tilde{p}_\rho + \tilde{p}_\mu t_\rho + t_\mu\tilde{p}_\rho) \\
= \;& p_\mu p_\rho\eta_{\nu\sigma} - p_\mu p_\sigma\eta_{\nu\rho} - p_\nu p_\rho\eta_{\mu\sigma} + p_\nu p_\sigma\eta_{\mu\rho} \qquad (1281) \\
= \;& (2\pi)^{3/2}(2p^0)\sum_\sigma u^*_{\mu\nu}(\vec{p},\sigma)u_{\rho\sigma}(\vec{p},\sigma)\ . \qquad (1282)
\end{aligned}
$$

(1282) slijedi iz realnosti (1281). Uvrštavanjem (1281) i (1282) u (1278) direktno slijedi (1276). Q.E.D.

$*$ $|\kappa| = |\lambda|$

- Zbog parnog broja derivacija u (1276) i zbog parnosti funkcije

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} e^{ip\cdot(x-y)}\ , \qquad (1283)$$

za prostornolike intervale $x - y$ slijedi da je izraz (1276) jednak nuli samo za komutator i ako je ispunjeno

$$|\kappa| = |\lambda|\ . \qquad (1284)$$

Dakle i bezmasena vektorska polja zadovoljavaju Bose-Einsteinovu statistiku, tj. izgradjena su od operatora poništenja i stvaranja bozona. Podešavanjem faza i redefinicijom polja u (1253) se može izabrati $\kappa = \lambda = 1$.

$*$ **Zašto se rabi** a_μ

- Prirodno je pitanje zašto se koriste polja kao a_μ u konstrukciji teorija bezmasenih čestica spina 1, a ne polja $f_{\mu\nu}$. Prisutnost derivacija u $f_{\mu\nu}$ vodi na gustoće Hamiltonijana koje brže padaju sa udaljenošću nego ako se rabe vektorska polja a_μ. Dok teorije sa a_μ poljima ostvaruju $1/r$ ponašanje sa udaljenošću, koje se opaža u praksi, sa $f_{\mu\nu}$ poljima to nije moguće. Nadalje, teorije sa a_μ poljima su općenitije.

6 Feynmanova pravila

- Formalizam teorija polja i gustoća Hamiltonijana konstruirana da bi S matrica zadovoljavala Lorentz invarijantnost i princip dekompozicije nakupina ovdje se primjenjuje za izračunavanje S matričnih elemenata.
- Iako je sa tako priredjenim formalizmom svejedno da li se rabi stara pertubacijska teorija 1930-tih godina ili kovarijantna pertubacijska teorija (Tomanaga, Schwinger, Feynnman kasnih 1940-tih) rabimo ovu drugu, u kojoj su Lorentzova invarijantnost i princip dekompozicije nakupina transparentna u svakom koraku računa.
- Uvodimo i Feynmanove dijagrame do kojih je došlo kroz razvoj Feynmanovih integrala po putevima.
- Rabimo Dysonov pristup računu S matričnih elemenata (Dyson 1949).

Teme :

- Izvod Feynmanovih pravila
- Račun propagatora
- Feynmanova pravila u impulsnom prostoru

6.1 Izvod Feynmanovih pravila

• Resume važnijih formula i notacije

- S matrični element : Dysonov red za S-matricu (704) i stanja izražena preko jednočestičnih stanja (764),

$$\begin{aligned}
& S_{\vec{p}_1'\sigma_1'n_1';\vec{p}_2'\sigma_2'n_2';\ldots\ ,\vec{p}_1\sigma_1n_1;\vec{p}_2\sigma_2n_2;\ldots} \\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-i)^N}{N!}\int d^4x_1\ldots d^4x_N\Big(\Phi_0,\ldots a(\vec{p}_2'\sigma_2'n_2')a(\vec{p}_1'\sigma_1'n_1') \\
&\times T\Big\{\mathcal{H}(x_1)\ldots\mathcal{H}(x_N)\Big\}a^\dagger(\vec{p}_1\sigma_1n_1)a^\dagger(\vec{p}_2\sigma_2n_2)\ldots\Phi_0\Big). \qquad (1285)
\end{aligned}$$

- $\vec{p},\sigma,n$: čestični impuls, spin, tip.
- Φ_0 : vakuumsko stanje.
- T : vremensko uredjenje (vidi (703)).
- $\mathcal{H}(x)$ gustoća Hamiltonijana medjudjelovanja — uzima se da je **polinom u poljima i njihovim hermitskim konjugatima**,

$$\mathcal{H}(x) = \sum_i g_i\mathcal{H}_i(x), \qquad (1286)$$

gdje je $\mathcal{H}_i$ član polinoma $\mathcal{H}$ sa fiksnim brojem polja i pripadnih hermitskih konjugata.
- Polje čestice tipa n koje se transformira po odredjenoj reprezentaciji Lorentzove grupe glasi (vidi (873), (858) i (859) — dokaz da se može staviti $\kappa_\ell = \lambda_\ell = 1$ za opće polje napravljen je u poglavlju §5.7 kojeg nismo radili; medjutim to je pokazano eksplicite za skalarno, Diracovo i vektorsko polje)

$$\begin{aligned}
\psi_\ell(x) &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sum_\sigma \\
&\Big[u_\ell(\vec{p},\sigma,n)a(\vec{p},\sigma,n)e^{ip\cdot x}+v_\ell(\vec{p},\sigma,n)a^\dagger(\vec{p},\sigma,n^c)e^{-ip\cdot x}\Big] \\
&= \psi_\ell^+(x)+\psi_\ell^-(x)\ . \qquad (1287)
\end{aligned}$$

- n^c označuje antičesticu čestice tipa n.
- u $e^{\pm ip\cdot x}$ je $p^0=\sqrt{\vec{p}^2+m_n^2}$.
- u_ℓ i v_ℓ su koeficijentne funkcije odredjenih transf. svojstava na LT: ($(2E)^{-1/2}$ za skalarno polje, (1088) i (1089), (1126) i (1127) za Diracovo, (957), (958) i (959) za vektorsko).
- Indeks ℓ nosi informaciju i o tipu čestice i o reprezentaciji Lorentzove grupe po kojoj se polje transformira.
- Derivacije polja tretiraju se kao nova polja.
- Naziv **polje** se pripisuje operatoru polja koji poništava čestice i stvara antičestice.

• **Sparivanja operatora stvaranja i poništenja**

∗ **(Anti)komutacijske relacije i poništenje vakuuma**

Rabeći (anti)komutacijske relacije (774) (+(−) je za bozone (fermione))

$$\begin{aligned}(771) &\equiv a(q')a^\dagger(q) &=& \pm a^\dagger(q)a(q') + \delta(q-q'),\\ (772) &\equiv a^\dagger(q')a^\dagger(q) &=& \pm a^\dagger(q)a^\dagger(q'),\\ (773) &\equiv a(q)a(q') &=& \pm a(q')a(q),\end{aligned} \tag{1288}$$

operatori poništenja (stvaranja) pomiču se na desno (lijevo) dok ne dosegnu vakuumsko stanje, kada pripadni doprinos iščezava, budući da ti operatori poništavaju vakuumsko stanje,

$$a(\vec{p},\sigma,n)\Phi_0 = 0, \tag{1289}$$

$$\Phi_0^\dagger a^\dagger(\vec{p},\sigma,n) = 0\ . \tag{1290}$$

∗ **Sparivanja, dio Feynmanovih pravila**

- Sparivanja vode na sljedeće izraze tj. faktore u S-matričnom elementu (1285) (za svaki od faktora na slici 6.1. nacrtan je pripadni element koji se javlja u pripadnom(im) Feynmanovom(im) dijagramu(ima)):

(a) čestica konačnog stanja $a(\vec{p}',\sigma',n')$ – hermitski konjugat polja $\psi_\ell^\dagger(x)$ u $\mathcal{H}_i(x)$

$$[a(\vec{p}',\sigma',n'),\psi_\ell^\dagger(x)]_\mp = (2\pi)^{-3/2}e^{-ip'\cdot x}u_\ell^*(\vec{p}',\sigma',n'), \tag{1291}$$

(b) antičestica konačnog stanja $a(\vec{p}',\sigma',n'^c)$ – polje $\psi_\ell(x)$ u $\mathcal{H}_i(x)$

$$[a(\vec{p}',\sigma',n'^c),\psi_\ell(x)]_\mp = (2\pi)^{-3/2}e^{-ip'\cdot x}v_\ell(\vec{p}',\sigma',n'), \tag{1292}$$

(c) čestica početnog stanja $a^\dagger(\vec{p},\sigma,n)$ – polje $\psi_\ell(x)$ u $\mathcal{H}_i(x)$

$$[\psi_\ell(x),a^\dagger(\vec{p},\sigma,n)]_\mp = (2\pi)^{-3/2}e^{ip\cdot x}u_\ell(\vec{p},\sigma,n), \tag{1293}$$

(d) antičestica početnog stanja $a^\dagger(\vec{p},\sigma,n^c)$

$$[\psi_\ell^\dagger(x),a^\dagger(\vec{p},\sigma,n^c)]_\mp = (2\pi)^{-3/2}e^{ip\cdot x}v_\ell^*(\vec{p},\sigma,n), \tag{1294}$$

(e) čestica (antičestica) konačnog stanja – čestica (antičestica) početnog stanja

$$[a(\vec{p}',\sigma',n'),a^\dagger(\vec{p},\sigma,n)]_\mp = \delta^3(\vec{p}'-\vec{p})\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'n}\ , \tag{1295}$$

$$[a(\vec{p}',\sigma',n'^c),a^\dagger(\vec{p},\sigma,n^c)]_\mp = \delta^3(\vec{p}'-\vec{p})\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'^c n^c}\ , \tag{1296}$$

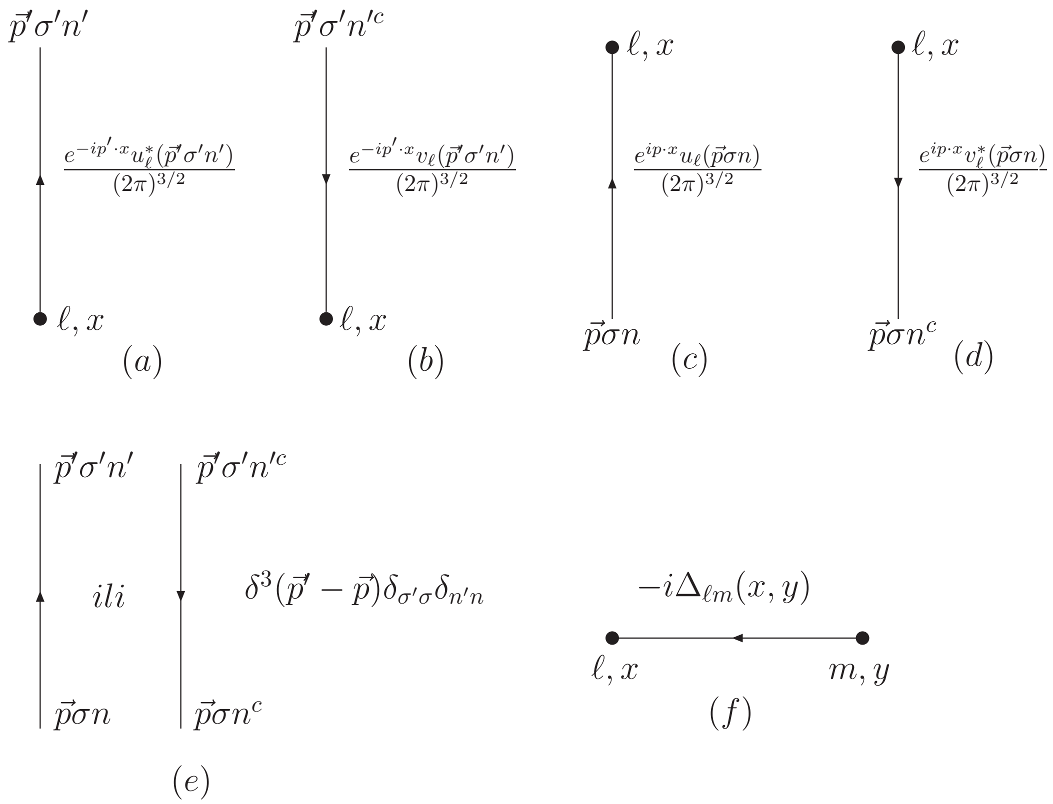


Figure 9: 6.1 Feynmanova paravila u x-prostoru

(f) vremenski uredjeno sparivanje : polje $\psi_\ell(x)$ iz $\mathcal{H}_i(x)$ – hermitski konjugirano polje iz $\mathcal{H}_j(y)$

$$\begin{aligned} &\theta(x^0 - y^0)[\psi^+_\ell(x), \psi^{+\dagger}_m(y)]_\mp \pm \theta(y^0 - x^0)[\psi^{-\dagger}_m(y), \psi^-_\ell(x)]_\mp \\ \equiv\ & -i\Delta_{\ell m}(x, y)\ . \end{aligned} \tag{1297}$$

Veličina (1297) se zove propagator. Njega ćemo izračunati u poglavlju §6.2.

- Na slici 6.1 prikazani su linijski dijelovi Feynmanovih dijagrama koji nastaju gore navedenim sparivanjima.
- Za polja izgradjena od čestica s barem jednim nabojem različitim od nule linije imaju strelice. Za čestice strelica ide od operatora stvaranja ka operatoru poništenja a za antičestice od operatora poništenja ka operatoru stvaranja, pa stoga daju smjer širenja naboja (preciznije naboja čestice). Tako za slučajeve (a) i (c) i prvi od (e) dijagrama strelica ide na gore (pozitivno u vremenu tj. u smjeru u kojem se čestica giba), za slučajeve (b) i (d) i drugi od (e) dijagrama na dolje (negativno u vremenu odnosno suprotno smjeru u kojem se čestica giba), a kod propagatora (dijagram (f)) strelica ide od hermitski konjugiranog polja ka pripadnom polju.

$*$ **Postupak izračunavanja S matrice**

$*$ **Postupak ukratko**

- S matrica se dobija multiplikacijom članova (a)-(f) za dano sparivanje čestica poč. i kon. stanja i polja gustoća Hamiltonijana i dani red medjudjelovanja N i dodatnih faktora (predznaka i kombinatoričkih faktora) o kojima će biti riječi poslije. Zatim integracijom po $x_1 \dots x_N$, pa sumiranjem po svim sparivanjima i napokon sumacijom po redu medjudjelovanja N.

□ **Postupak po koracima**

$*$ **Crtanje dijagrama i pridjeljivanje faktora odnosno operacija pojedinim djelovima dijagrama**

- S-matrični element za dani proces (proces definira početno α i konačno stanje β) koji je reda N_i za svaki od članova medjudjelovanja $\mathcal{H}_i$ se izračunava u sljedećih nekoliko koraka:

(i) Nacrtaju se svi mogući Feynmanovi dijagrami za dano "in" i "out" stanje i dani red N_i za svako od medjudjelovanja $\mathcal{H}_i$. Pojedinačni dijagram se crta na sljedeći način. Nacrtaju se ulazne linije stanja α (dolaze iz $t = -\infty$) i izlazne linije (odlaze u $t = +\infty$) te po N_i vrhova za medjudjelovanja $\mathcal{H}_i$ svaki sa onoliko linija koliko $\mathcal{H}_i$ ima polja. Linije se spoje tako da se dobije željeni dijagram (povezanog ili nepovezanog) procesa. Linijama se pridjele strelice u smjeru gibanja čestičnog naboja. Vrhovi se označe pripadnom x^μ koordinatom i tipom medjudjelovanja i, unutarnje linije sa ℓ, a vanjske linije sa $\vec{p}, \sigma, n$.

(ii) Svakom vrhu tipa i pridjeli se faktor $-i$ (iz faktora $(-i)^N$ u izrazu za S matricu (1285)) i faktor g_i (konstanta veze koja množi produkt polja u $\mathcal{H}_i$). Prema tipu linije pridjeljuje joj se jedan od faktora (a)-(f). Svi faktori za dani Feynmanov dijagram se pomnože.

(iii) Integrira se po koordinatama vrhova $x_1, x_2, \dots$. Tako se dobija doprinos S matričnom elementu koji odgovara svakom pojedinačnom Feynmanovom dijagramu.

(iv) Zbrajaju se doprinosi svakog Feynamnovog dijagrama. [Napomena: Time je opisan proces za dani red medjudjelovanja. Medjutim za dani proces (dani α i β) u principu treba sumirati i po svim redovima medjudjelovanja – barem po svim koje možemo fizički izračunati.]

$*$ **Kombinatorički faktori**

- Primjetimo da nije uključen faktor $N!$ iz S matrice (1285)). Razlog tome jest da je T-uredjeni produkt suma $N!$ doprinosa koji se razlikuju samo po permutaciji x_μ koordinata. Stoga su (u gotovo svim slučajevima; diskusija iznimaka tog pravila slijedi) pripadni doprinosi amplitudi jednaki, pa se $1/N!$ pokrati. Feynmanov dijagram sa N vrhova je samo jedan od $N!$ dijagrama koji se razlikuju u permutaciji x_μ koodrinata.

(v) **Identična polja, uvodjenje faktora $1/M!$, kombinatorički faktori**

- Ako medjudjelovanje $\mathcal{H}_i$ ima M puta isto polje onda se tih M polja sa M različitih vrhova za jednim takovim poljem može vezati na $M!$ načina (prvo od polja ima M izbora, drugo $M-1$, ...). U svrhu kompenzacije faktora $M!$ uobičajeno je definirati konstantu g_i tako da se u $\mathcal{H}_i$ javlja eksplicitni faktor $1/M!$ (npr. za medjudjelovanje M-tog reda u skalarnom polju u $\mathcal{H}_i$ se javlja faktor $g_i\phi^M/M!$; isti faktor se javlja ako $\mathcal{H}_i$ sadrži M faktora istog multipleta neke simetrije).
- Poništenje faktora $1/M!$ nije uvijek kompletno. Npr. za Feynmanov dijagram sa dva vrha sa M polja simetričnih na permutaciju $\mathcal{H}_i$ i $\mathcal{H}_j$, ako se $M-1$ od tih polja sparuje onda se to može napraviti na $M(M-1)\ldots 2 = M!$ načina. Zbog toga jedan od dva $1/M!$ ostaje neponišten u takvom dijagramu (vidi Sl. 6.2).

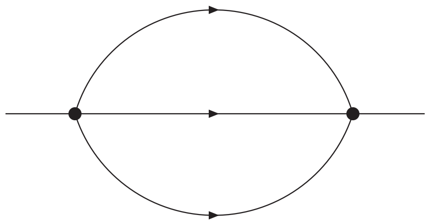


Figure 10: 6.2 Identična polja i neponištenje kombinatoričkih faktora

(vi) **Kombinatorički faktori koji se javljaju ako permutacija vrhova nema utjecaja na dijagram**
- Do nepotpunog poništavanja $1/N!$ faktora dolazi ako dio $1/N!$ permutacija ne mijenja dijagram u smislu da je on identičan polaznom nakon permutacije. Takovi potpuno identični doprinosi ne doprinose amplitudi. Tipično se takvi faktori javljaju kod računa vakuum-vakuum S matričnih elemenata u teorijama sa kvadratičnim medjudjelovanjem $\mathcal{H} = \psi_\ell^\dagger M_{\ell\ell'}\psi_{\ell'}$ gdje M može ovisiti o vanjskim poljima (ne-kvantizirana polja). Feynmanov dijagram Ntog reda dan je na slici 6.3. Budući da permutacija duž prstena $(i \to i+1, i = 1, \ldots, N-1;\ N \to 1)$ daje isti dijagram, ima samo $(N-1)!$ doprinosa, pa je ukupan kombinatorički faktor jednak

$$\frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}\,. \tag{1298}$$

□ Relativni predznaci zbog zamjene fermionskih operatora

∗ Predznaci u drvastim dijagramima

- Ukupna faza nije bitna. Bitni su relativni predznaci doprinosa amplitudi odredjenog procesa.
- Pojavu tih predznaka objasnit ćemo na primjeru teorije sa samo jednim medjudjelovan-

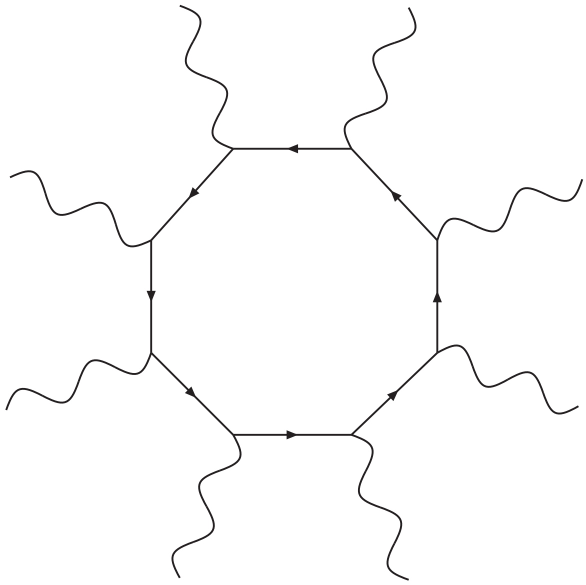


Figure 11: 6.3 Permutacijska invarijantnost i neponištenje kombinatoričkih faktora

jem oblika

$$\mathcal{H}(x) \;=\; \sum_{\ell mk} g_{\ell mk}\psi^\dagger_\ell(x)\psi_m(x)\phi_k(x), \tag{1299}$$

gdje su $g_{\ell mk}$ neke opće konstante, $\psi_\ell(x)$ su kompleksna fermionska polja, a $\phi_m(x)$ su opća realna bozonska polja (ne nužno skalarna). (I kvantna elektrodinamika i cijeli standardni model slabih, elektromagnetskih i jakih medjudjelovanja sadrži fermionska medjudjelovanja koja se mogu napisati u tom obliku. [Do na kvartične članove])

· **Raspršenje 2 fermiona u drugom redu računa smetnje**

- Operatori koji se javljaju amplitudi raspršenja 2 fermiona $12 \to 1'2'$ u drugom redu računa smetnje u $\mathcal{H}(x)$ su

$$a(2')a(1')\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi^\dagger(y)\psi(y)a^\dagger(1)a^\dagger(2)\ , \tag{1300}$$

(skraćenice: npr. $1 = \vec{p}_1, \sigma_1, n_1$).
- Dva dijagrama doprinose amplitudi, koji odgovaraju sparivanjima (vidi Sl. 6.4)

$$[a(2')\psi^\dagger(x)][a(1')\psi^\dagger(y)][\psi(y)a^\dagger(1)][\psi(x)a^\dagger(2)], \tag{1301}$$
$$[a(1')\psi^\dagger(x)][a(2')\psi^\dagger(y)][\psi(y)a^\dagger(1)][\psi(x)a^\dagger(2)]\ . \tag{1302}$$

- Da bi se dobio poredak operatora (1301) potrebno je napraviti paran broj zamjena fermionskih operatora, dok je za poredak (1302) neparan. Stoga ta dva doprinosa imaju suprotni predznak. On odgovara zamjeni operatora konačnog stanja $a(1')$ i $a(2')$ (isto se

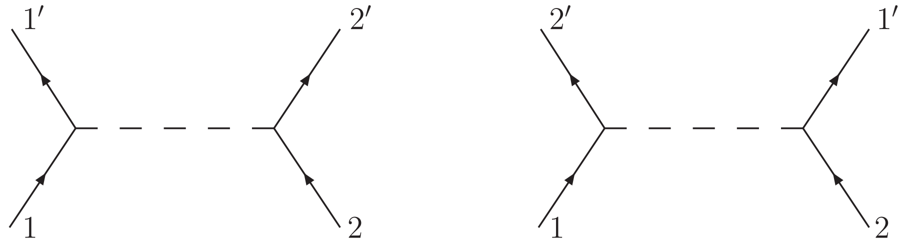


Figure 12: 6.4 Fermion-fermionsko raspršenje

dobija zamjenom operatora početnog stanja) i posljedica je Fermi-Diracove statistike.

· **Fermion-antifermionsko raspršenje u drugom redu računa smetnje**

- Ovisnost o zamjeni ne ograničava se na zamjenu fermiona početnog (konačnog) stanja. Ilustrirajmo to na primjeru fermion-antifermionskog raspršenja $12^c \to 1'2'^c$ u drugom redu računa smetnje. Fermionski operatori koji se javljaju u drugom redu računa smetnje su

$$a(2'^c)a(1')\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi^\dagger(y)\psi(y)a^\dagger(1)a^\dagger(2^c)\ . \tag{1303}$$

- Opet se javljaju dva Feynmanova dijagrama koja odgovaraju sparivanjima

$$[a(2'^c)\psi(x)][a(1')\psi^\dagger(x)][\psi(y)a^\dagger(1)][\psi^\dagger(y)a^\dagger(2^c)]\ . \tag{1304}$$
$$[a(2'^c)\psi(x)][a(1')\psi^\dagger(y)][\psi(y)a^\dagger(1)][\psi^\dagger(x)a^\dagger(2^c)], \tag{1305}$$

- Da bi se dobilo sparivanje (1304) iz (1303) treba napraviti paran broj permutacija fermionskih operatora, dok je za (1305) potreban neparan broj permutacija. Primjetimo da se efektivno zamjenjuju čestica iz početnog i čestica iz konačnog stanja:

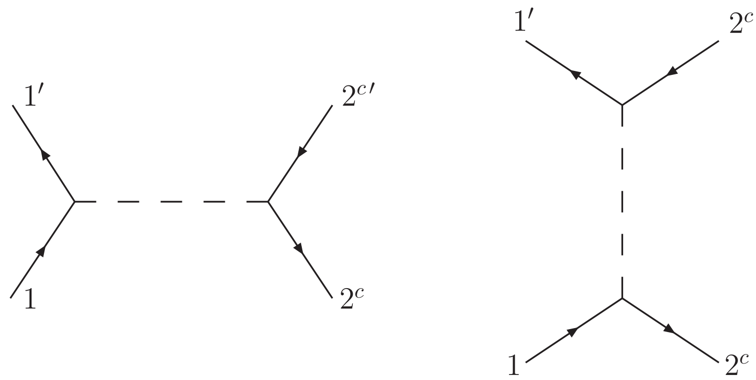


Figure 13: 6.5 Fermion-antifermionsko raspršenje

∗ **Negativni predznak fermionskih petlji**

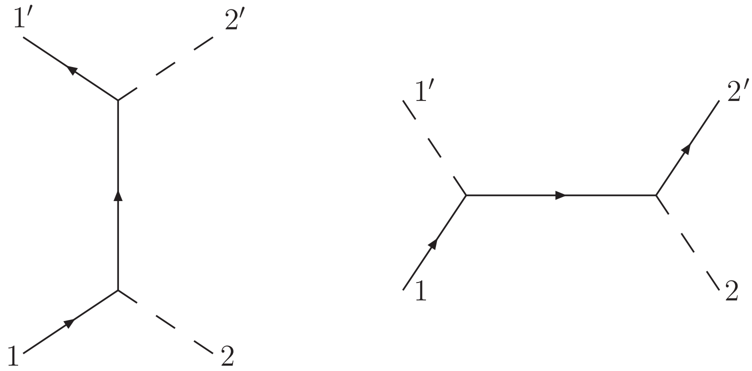


Figure 14: 6.6 Fermionska linija prolazi kroz dijagram (ujedno dijagrami za fermion-bozonsko raspršenje)

- Fermionske linije u teorijama s interakcijama tipa (1299) ili prolaze kroz dijagram (Sl. 6.6) ili čine petlje (Sl. 6.7).
- U višim redovima računa smetnje javljaju se amplitude sa fermionskom petljama, u kojima se fermionska polja medjudjelovanja (1299) vežu (sparuju) samo medjusobno i sukcesivno (amplituda ima cikličnu simetriju),

$$[\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)][\psi(x_2)\overline{\psi}(x_3)]\ldots[\psi(x_N)\overline{\psi}(x_1)] \ . \tag{1306}$$

Prema strukturi medjudjelovanja (1299) polazni skup operatora mora biti

$$[\overline{\psi}(x_1)\psi(x_1)][\overline{\psi}(x_2)\psi(x_2)]\ldots[\overline{\psi}(x_N)\psi(x_N)] \ . \tag{1307}$$

Iz (1299) se do (1306) dolazi sa $2N-1$ zamjena polja. Stoga svaka fermionska petlja ima dodatni negativni predznak.

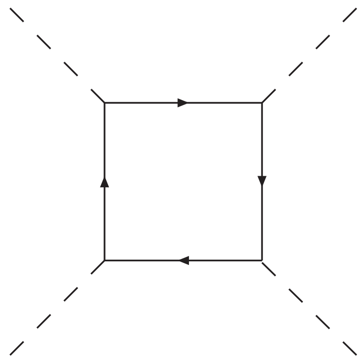


Figure 15: 6.7 Fermionska linija tvori petlju - dodatni negativni predznak

$*$ **Feynmanova pravila**

- Gore naveden skup pravila (i)-(vi) i pravila o predznacima čini skup Feynmanovih pravila po kojima se izračunavanju amplitude S matrice. Njemu treba još dodati i napomenu da udaljene (tj. nemedjudjelujuće) nakupine čestica računaju nezavisno.
- Za dodatnu ilustraciju Feynmanovih pravila dani su računi elestičnog raspršenja u dvije teorije.

□ Prva teorija

- Razmotrimo prvo teoriju s trilinearnim medjudjelovanjem (1299), u kojem se polja ne javljaju simetrično. U drugom redu računa smetnje možemo razmatrati dva različita procesa: raspršenje fermiona i bozona i fermion-fermionsko raspršenje.

∗ Fermion-bozonsko raspršenje

- Dva su povezana Feynmanova dijagrama dana na Sl. 6.6. Prema Feynmanovim pravilima (a)-(f), (i)-(vi) pripadna amplituda glasi

$$
\begin{aligned}
& S^{(2)}_{\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1';\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2';\ldots\ ,\vec{p}_1\sigma_1n_1;\vec{p}_2\sigma_2n_2;\ldots} \\
= & \ (2\pi)^{-6}\sum_{k'\ell'm'}\sum_{k\ell m}(-i)^2 g_{\ell'm'k'}g_{m\ell k}u^\dagger_{\ell'}(\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1')u_\ell(\vec{p}_1\sigma_1n_1) \\
\times & \int d^4x d^4y(-i\Delta_{m'm}(y-x))e^{-ip_1'\cdot y}e^{ip_1\cdot x} \\
\times & \Big[e^{-ip_2'\cdot y}u^*_{k'}(\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2')e^{ip_2\cdot x}u_k(\vec{p}_2\sigma_2n_2) \\
+ & \ e^{-ip_2'\cdot x}u^*_{k}(\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2')e^{ip_2\cdot y}u_{k'}(\vec{p}_2\sigma_2n_2)\Big]\ .
\end{aligned}
\tag{1308}
$$

(Indeksi 1 i 2 označuju fermione odnosno bozone)
(Napomena: Gornja formula malo previše slobodno tretira spinorne indekse – spinorni indeksi $\psi_{\ell'}$—$\Delta_{m'm}$—u_ℓ su vezani matričnim množenjem.)
D:

$$
\begin{aligned}
& S^{(2)}_{\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1';\,\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2',\,\vec{p}_1\sigma_1n_1;\,\vec{p}_2\sigma_2n_2} \\
= & \ \frac{(-i)^2}{2!}\int d^4x_1d^4x_2\Big(\Phi_0,\ a(\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2')a(\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1') \\
& \times T\Big\{\sum_{\ell_1m_1k_1}g_{\ell_1m_1k_1}\psi^\dagger_{\ell_1}(x_1)\psi_{m_1}(x_1)\phi_{k_1}(x_1)\sum_{\ell_2m_2k_2}g_{\ell_2m_2k_2}\psi^\dagger_{\ell_2}(x_2)\psi_{m_2}(x_2)\phi_{k_2}(x_2)\Big\} \\
& a^\dagger(\vec{p}_1\sigma_1n_1)a^\dagger(\vec{p}_2\sigma_2n_2)\Phi_0\Big) \\
= & \ (2\pi)^{-6}\sum_{\ell_1m_1k_1}\sum_{\ell_2m_2k_2}(-i)^2g_{\ell_1m_1k_1}g_{\ell_2m_2k_2}\int d^4x_1d^4x_2(-i\Delta_{m_1\ell_2}(x_1-x_2)) \\
\times & \Big[e^{-ip_1'\cdot x_1}u^\dagger_{\ell_1}(\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1')e^{-ip_2'\cdot x_1}u^*_{k_1}(\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2')e^{ip_1\cdot x_2}u_{m_2}(\vec{p}_1\sigma_1n_1)e^{ip_2\cdot x_2}u_{k_2}(\vec{p}_2\sigma_2n_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad e^{-ip_1'\cdot x_1}u^\dagger_{\ell_1}(\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1')e^{ip_2\cdot x_1}u_{k_1}(\vec{p}_2\sigma_2 n_2)e^{ip_1\cdot x_2}u_{m_2}(\vec{p}_1\sigma_1 n_1)e^{-ip_2'\cdot x_2}u^*_{k_2}(\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2')\Big] \\
&= \quad (2\pi)^{-6}\sum_{\ell_1 m_1 k_1}\sum_{\ell_2 m_2 k_2}(-i)^2 g_{\ell_1 m_1 k_1}g_{\ell_2 m_2 k_2}u^\dagger_{\ell_1}(\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1')u_{m_2}(\vec{p}_1\sigma_1 n_1) \\
&\times \quad \int d^4x_1 d^4x_2(-i\Delta_{m_1\ell_2}(x_1-x_2))e^{-ip_1'\cdot x_1}e^{ip_1\cdot x_2} \\
&\times \quad \Big[e^{-ip_2'\cdot x_1}u^*_{k_1}(\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2')e^{ip_2\cdot x_2}u_{k_2}(\vec{p}_2\sigma_2 n_2) \\
&+ \quad e^{ip_2\cdot x_1}u_{k_1}(\vec{p}_2\sigma_2 n_2)e^{-ip_2'\cdot x_2}u^*_{k_2}(\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2')\Big]\ . \qquad (1309)
\end{aligned}
$$

∗ **Fermion-fermionsko raspršenje**

- Proces opet opisuju dva dijagrama (vidi Sl. 6.4). Po Feynmanovim pravilima oni odgovaraju sljedećem matričnom elementu (opet slobodno tretiranje spinornih indeksa koji vežu $u^\dagger_{m'}$—u_m i $u^\dagger_{\ell'}$—u_ℓ)

$$
\begin{aligned}
S^{(2)}_{\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1';\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2';\dots\ ,\vec{p}_1\sigma_1 n_1;\vec{p}_2\sigma_2 n_2;\dots} &= (2\pi)^{-6}\sum_{k'\ell'm'k\ell m}(-i)^2 g_{m'mk'}g_{\ell'\ell k} \\
\times \quad & u^\dagger_{m'}(\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2')u^\dagger_{\ell'}(\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1')u_m(\vec{p}_2\sigma_2 n_2)u_\ell(\vec{p}_1\sigma_1 n_1) \\
\times \quad & \int d^4x d^4y e^{-ip_2'\cdot x}e^{-ip_1'\cdot y}e^{ip_2\cdot x}e^{ip_1\cdot y}(-i\Delta_{k'k}(x-y)) \\
- \quad & [1'\leftrightarrow 2']\ . \qquad (1310)
\end{aligned}
$$

(Sada su i 1 i 2 fermioni.)
D:
Uporabom matričnog elementa u prethodnom dokazu, ali podrazumjevajući da je sada i 2 fermion dobijamo

$$
\begin{aligned}
S^{(2)}_{\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1';\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2';\dots\ ,\vec{p}_1\sigma_1 n_1;\vec{p}_2\sigma_2 n_2;\dots} &= (2\pi)^{-6}\sum_{\ell_1 m_1 k_1}\sum_{\ell_2 m_2 k_2}(-i)^2 g_{\ell_1 m_1 k_1}g_{\ell_2 m_2 k_2} \\
= \quad & u^\dagger_{\ell_1}(\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2')u^\dagger_{\ell_2}(\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1')u_{m_1}(\vec{p}_2\sigma_2 n_2)u_{m_2}(\vec{p}_1\sigma_1 n_1) \\
\times \quad & \int d^4x_1\int d^4x_2 e^{-ip_2'\cdot x_1}e^{-ip_1'\cdot x_2}e^{ip_2\cdot x_1}e^{ip_1\cdot x_2}(-i)\Delta_{k_1k_2}(x_1-x_2) \\
- \quad & [1'\leftrightarrow 2']\ . \qquad (1311)
\end{aligned}
$$

∗ **Napomena: Skalar-skalarno raspršenje**

Za dano medjudjelovanje skalar-skalarno medjudjelovanje se javlja tek u 4-tom redu računa smetnje – vidi Sl. 6.7.

□ **Druga teorija**

$*$ **Opći slučaj simetričnog trilinearnog bozonskog medjudjelovanja**

- Sada ćemo razmotriti raspršenje u najnižem redu teorije sa trilinearnim medjudjelovanjem i realnih bozonskih polja simetričnih na zamjenu polja,

$$\mathcal{H}(x) \;=\; \frac{1}{3!}\sum_{\ell mn} g_{\ell mn}\phi_\ell(x)\phi_m(x)\phi_n(x) \tag{1312}$$

($g_{\ell mn}$ su simetrični na zamjenu indeksa).
- Proces je $12 \to 1'2'$ u drugom redu računa smetnje. S matrični element tog procesa glasi (vidi (1285))

$$\begin{aligned} S^{(2)}_{\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1';\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2';\ldots\;,\vec{p}_1\sigma_1n_1;\vec{p}_2\sigma_2n_2;\ldots} \;&=\; \frac{(-i)^2}{2!}\int d^4x_1 d^4x_2 (\Phi_0, a(\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2')a(\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1') \\ &\times T\Big\{\frac{1}{3!}\sum_{\ell_1m_1n_1} g_{\ell_1m_1n_1}\phi_{\ell_1}(x_1)\phi_{m_1}(x_1)\phi_{n_1}(x_1)\frac{1}{3!}\sum_{\ell_1m_1n_1} g_{\ell_2m_2n_2}\phi_{\ell_2}(x_2)\phi_{m_2}(x_2)\phi_{n_2}(x_2)\Big\} \\ &\times a(\vec{p}_1\sigma_1n_1)a(\vec{p}_2\sigma_2n_2)\Phi_0)\;. \end{aligned} \tag{1313}$$

- Prema prije navedenim Feynmanovim pravilima kombinatorički faktor bi trebao biti 1. Provjerimo to razmatrajući operatore koji se javljaju u amplitudi (zanemarit ćemo indekse skalarnih polja zbog simetrije na zamjenu indeksa),

$$\frac{1}{2}a_{2'}a_{1'}(\phi\phi\phi)(x)(\phi\phi\phi)(y)a_1^\dagger a_2^\dagger\;. \tag{1314}$$

Mogućnosti sparivanja su :
1. oba a operatora se vežu na $(\phi\phi\phi)(x) \Rightarrow$ oba $a^\dagger$ operatora na $(\phi\phi\phi)(y)$
2. oba $a^\dagger$ operatora na $(\phi\phi\phi)(x) \Rightarrow$ oba a operatora se vežu na $(\phi\phi\phi)(x)$
3. $a_{1'}$–$(\phi\phi\phi)(x)$, $a_{2'}$–$(\phi\phi\phi)(y)$, $a_2^\dagger$–$(\phi\phi\phi)(x)$, $a_1^\dagger$–$(\phi\phi\phi)(y)$
4. $a_{2'}$–$(\phi\phi\phi)(x)$, $a_{1'}$–$(\phi\phi\phi)(y)$, $a_1^\dagger$–$(\phi\phi\phi)(x)$, $a_2^\dagger$–$(\phi\phi\phi)(y)$
5. $a_{1'}$–$(\phi\phi\phi)(x)$, $a_{2'}$–$(\phi\phi\phi)(y)$, $a_1^\dagger$–$(\phi\phi\phi)(x)$, $a_2^\dagger$–$(\phi\phi\phi)(y)$
6. $a_{2'}$–$(\phi\phi\phi)(x)$, $a_{1'}$–$(\phi\phi\phi)(y)$, $a_2^\dagger$–$(\phi\phi\phi)(x)$, $a_1^\dagger$–$(\phi\phi\phi)(y)$

- Zbog nijemosti integracijskih varijabli x i y slučajevi 1. i 2.; 3. i 4; te 5. i 6. daju jednak doprinos amplitudi, pa je dovoljno razmatrati slučajeve 1.; 3. i 5. i zaboraviti faktor 1/2.
- Nadalje, kombinatorički faktori prilikom vezanja operatora stvaranja na simetrični trilinearni produkt skalarnih polja su:

1. $\underbrace{(3)_{1'}\times(2)_{2'}}_{xx} \times \underbrace{(3)_1\times(2)_2}_{yy} \;=\; 36 = 3!^2,$

3. $\underbrace{(3)_{1'}\times(2)_{1}}_{xx} \times \underbrace{(3)_{2'}\times(2)_2}_{yy} \;=\; 36 = 3!^2,$

5. $\underbrace{(3)_{1'}\times(2)_{2}}_{xx} \times \underbrace{(3)_{2'}\times(2)_1}_{yy} \;=\; 36 = 3!^2\;.$

Dakle stvarno se gubi faktor $2\times 3!^2$, kao što je bilo rečeno.
- Nadalje slučajevi 1.; 3. i 5. odgovaraju dijagramima na Sl. 6.8 koje smo mogli (i po

pravilima trebali) odmah nacrtati.
- Prema Feynmanovim pravilima (a)-(f), (i)-(vi) pripadna amplituda glasi

$$
\begin{aligned}
&S^{(2)}_{\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1';\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2';\ldots\ ,\vec{p}_1\sigma_1n_1;\vec{p}_2\sigma_2n_2;\ldots} \\
&= (-i)^2(2\pi)^{-6}\sum_{\ell_1m_1n_1}\sum_{\ell_2m_2n_2} g_{\ell_1m_1n_1}g_{\ell_2m_2n_2} \\
&\quad \int d^4x_1d^4x_2(-i\Delta_{n_1n_2}(x_1,x_2)) \\
&\quad \times[u^*_{\ell_1}(\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1')e^{-ip_1'\cdot x_1}u^*_{\ell_2}(\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2')e^{-ip_2'\cdot x_1} \\
&\quad\quad \times u_{m_1}(\vec{p}_1\sigma_1n_1)e^{ip_1\cdot x_2}u_{m_2}(\vec{p}_2\sigma_2n_2)e^{ip_2\cdot x_2} \\
&\quad +u^*_{\ell_1}(\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1')e^{-ip_1'\cdot x_1}u^*_{\ell_2}(\vec{p}_1\sigma_1n_1)e^{ip_1\cdot x_1} \\
&\quad\quad \times u_{m_1}(\vec{p}_2{}'\sigma_1'n_2')e^{-ip_2'\cdot x_2}u_{m_2}(\vec{p}_2\sigma_2n_2)e^{ip_2\cdot x_2} \\
&\quad +u^*_{\ell_1}(\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1')e^{-ip_1'\cdot x_1}u^*_{\ell_2}(\vec{p}_2\sigma_2n_2)e^{ip_2\cdot x_1} \\
&\quad\quad \times u_{m_1}(\vec{p}_2{}'\sigma_1'n_2')e^{-ip_2'\cdot x_2}u_{m_2}(\vec{p}_1\sigma_1n_1)e^{ip_1\cdot x_2}]\ .
\end{aligned}
\tag{1315}
$$

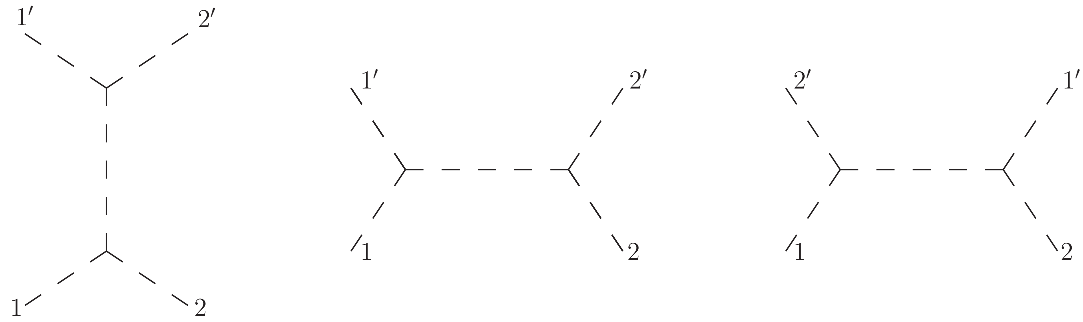


Figure 16: 6.8 Trilinearno bozonsko medjudjelovanje - raspršenje

∗ Slučaj kubičnog skalarnog medjudjelovanja

Ako su sva polja u medjudjelovanju jednaka skalarnom, dobija se medjudjelovanje

$$
\mathcal{H} = g\phi^3/3!\ , \tag{1316}
$$

i matrični element (1315) glasi

$$
\begin{aligned}
&S^{(2)}_{\vec{p}_1{}';\vec{p}_2{}',\vec{p}_1;\vec{p}_2} \\
&= \frac{ig^2}{(2\pi)^6\sqrt{16E_1'E_2'E_1E_2}}\int d^4x_1d^4x_2\Delta_F(x_1-x_2) \\
&\quad \times[e^{-i(p_1'+p_2')\cdot x_1}e^{i(p_1+p_2)\cdot x_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+e^{-i(p'_1-p_1)\cdot x_1}e^{i(p_2-p'_2)\cdot x_2} \\
&+e^{-i(p'_1-p_2)\cdot x_1}e^{i(p_1-p'_1)\cdot x_2}],
\end{aligned}
\tag{1317}
$$

u kojem je $\Delta_F(x_1 - x_2)$ koje će biti izračunato u poglavlju §6.2.
- Napomena: Za skalar-skalar raspršenje i za medjudjelovanje (1316) nema doprinosa neparnog reda (broj nogu je 4, ukupni broj polja je $3n$, $3n-4$ je neparno, pa nije moguće ostvariti propagatorske kontrakcije, nužne za "preživljavanje" amplitude.)

6.2 Račun Propagatora

$*$ **Opći izraz za propagator**

- Propagator općeg polja $\Delta_{\ell m}(x,y)$ zadan je jednadžbom (1297). Upotrebom (anti)komutacijskih relacija za operatore stvaranja i poništenja dobija se (vidi (1297) te (1287) za definiciju $\psi_\ell^\pm$ polja)

$$
\begin{aligned}
-i\Delta_{\ell m}(x,y) &= \theta(x^0-y^0)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_\sigma e^{ip\cdot(x-y)}u_\ell(p,\sigma,n)u_m^*(p,\sigma,n) \\
&\pm \theta(y^0-x^0)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_\sigma e^{ip\cdot(y-x)}v_\ell(p,\sigma,n)v_m^*(p,\sigma,n)\ . \qquad (1318)
\end{aligned}
$$

- U Weinbergu u poglavlju §5.7 pokazano je da vrijedi

$$
\begin{aligned}
\sum_\sigma u_\ell(\vec{p}\sigma n)u_m^*(\vec{p}\sigma n) &= (2\sqrt{\vec{p}^2+m_n^2})^{-1}P_{\ell m}(\vec{p},\sqrt{\vec{p}^2+m_n^2})\ , \qquad (1319)\\
\sum_\sigma v_\ell(\vec{p}\sigma n)v_m^*(\vec{p}\sigma n) &= \pm(2\sqrt{\vec{p}^2+m_n^2})^{-1}P_{\ell m}(-\vec{p},-\sqrt{\vec{p}^2+m_n^2}) \qquad (1320)
\end{aligned}
$$

(gornji (doljnji) predznak odgovara bozonima (fermonima)) gdje je $P_{\ell m}(\vec{p},p^0)$ polinom u $\vec{p}$ i p^0 paran (neparan) na zamjenu $\vec{p}\to-\vec{p}$ i $p^0\to-p^0$ za bozone (fermione).

$*$ **Primjeri suma (1319) i (1320)**

- za skalarno polje (vidi (896))

$$P(p) = 1\ . \qquad (1321)$$

- za Diracovo polja $\psi_\ell(x)$ i $\psi_m(y)$ (vidi (1128) i (1129) te (1107) i (1108))

$$P_{\ell m}(p) = [(-i\gamma_\mu p^\mu+m)\beta]_{\ell m}\ , \qquad (1322)$$

gdje su ℓ i m Diracovi indeksi. (Matrica β se javlja jer sparujemo polja $\psi_\ell(x)$ i $\psi_m^\dagger(y)$. Nje nema ako se sparuju $\psi_\ell(x)$ i $\overline{\psi}(y)$.)

- za vektorska polja $V_\mu(x)$ i $V_\nu(y)$ spina 1 (vidi (965) i (969))

$$P_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\ . \qquad (1323)$$

- za polja $\psi_{ab}(x)$ i $\psi_{\tilde{a}\tilde{b}}(x)$ za česticu spina j u ireducibilnim reprezentacijama (A, B) i $(\tilde{A}, \tilde{B})$ homogene Lorentzove grupe (dokaz je u Weinbergovom poglavlju §5.7)

$$\begin{aligned} P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(p) &= \sum_{a'b'} \sum_{\tilde{a}'\tilde{b}'} \sum_{\sigma} C_{AB}(j\sigma, a'b') C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma, \tilde{a}'\tilde{b}') \\ &\times \Big[exp(-\theta\hat{p}\cdot\vec{J}^{(A)})\Big]_{aa'} \Big[exp(-\theta\hat{p}\cdot\vec{J}^{(B)})\Big]_{bb'} \\ &\times \Big[exp(-\theta\hat{p}\cdot\vec{J}^{(\tilde{A})})\Big]_{\tilde{a}\tilde{a}'} \Big[exp(-\theta\hat{p}\cdot\vec{J}^{(\tilde{B})})\Big]_{\tilde{b}\tilde{b}'}, \end{aligned} \tag{1324}$$

gdje je $\sinh\theta = |\vec{p}|/m$ dok indeksi a, b, $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$, u jediničnim koracima idu od $-A$ do $+A$, $-B$ do $+B$, $-\tilde{A}$ do $+\tilde{A}$ odnosno $-\tilde{B}$ do $+\tilde{B}$ (analogno vrijedi za vrijednosti indeksa a', b', $\tilde{a}'$ i $\tilde{b}'$.

$*$ **Propagator kao funkcional polinoma P**

- Uvrštavajući izraze za sume (1319) i (1320) u izraz za propagator (1318) dobijamo

$$\begin{aligned} -i\Delta_{\ell m}(x,y) &= \theta(x^0-y^0) P_{\ell m}\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Delta_+(x-y) \\ &+ \theta(y^0-x^0) P_{\ell m}\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Delta_+(y-x), \end{aligned} \tag{1325}$$

gdje je $\partial/\partial x$ skraćenica za $\partial/\partial x_\mu$ (kao što je p skraćenica za p^μ), a $\Delta_+(x)$ je funkcija definirana u (896,897),

$$\Delta_+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} e^{ip\cdot x}, \tag{1326}$$

u kojoj je uzeto $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

$*$ **Definicija polinoma P za impulse koji nisu na ljusci mase**

- Jednadžbe za (1319) i (1320) definiraju polinom $P(p)$ samo za 4-impulse na ljusci mase, tj. za $p^0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Prijelaz na 4-impulse koji nisu na ljusci mase nije jednoznačan. Weinberg slijedi sljedeći pristup:
- Budući da za svaku potenciju ν vrijedi

$$\begin{aligned} (p^0)^{2\nu} &= (\vec{p}^2 + m^2)^\nu, \\ (p^0)^{2\nu+1} &= (\vec{p}^2 + m^2)^\nu p^0, \end{aligned} \tag{1327}$$

svaki polinom $P(p)$ se može prikazati kao linearna funkcija u p^0. Stoga možemo definirati polinom $P^{(L)}(q)$ uvjetima

$$\begin{aligned} P^{(L)}(p) &= P(p) \qquad (\text{za } p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}), \\ P^{(L)}(q) &= P^{(0)}(\vec{q}) + q^0 P^{(1)}(\vec{q}) \qquad (\text{za opći } q^\mu), \end{aligned} \tag{1328}$$

gdje su $P^{(0,1)}$ polinomi koji ovise samo o $\vec{q}$. Uvrštavajući $P^{(L)}(p)$ na mjesto $P(p)$ u izrazu za propagator (1325) i rabeći identitet

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\theta(x^0 - y^0) \;=\; -\frac{\partial}{\partial x^0}\theta(y^0 - x^0) \;=\; \delta(x^0 - y^0), \tag{1329}$$

da bi derivaciju prebacili preko θ-funkcija, dobijamo

$$\begin{aligned}\Delta_{\ell m}(x,y) &= P^{(L)}_{\ell m}\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Delta_F(x-y) \\ &+ \delta(x^0 - y^0)P^{(1)}_{\ell m}(-i\nabla)\Big[\Delta_+(x-y) - \Delta_+(y-x)\Big],\end{aligned} \tag{1330}$$

gdje je Δ_F Feynmanov propagator

$$-i\Delta_F(x) \;=\; \theta(x)\Delta_+(x) + \theta(-x)\Delta_+(-x)\ . \tag{1331}$$

Zbog parnosti $\Delta(x)$ u x za prostornolike intervale i $\delta(x^0 - y^0)$ funkcije, drugi član je jednak nuli,

$$\Delta_{\ell m}(x,y) \;=\; P^{(L)}_{\ell m}\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Delta_F(x-y)\ . \tag{1332}$$

D:
Rabimo

$$P^{(L)}_{\ell m}\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big) \;=\; P^{(0)}_{\ell m}(-i\nabla) + \Big(-i\frac{\partial}{\partial x_0}\Big)P^{(1)}_{\ell m}(-i\nabla)\ . \tag{1333}$$

Odatle

$$\begin{aligned}&\Delta_{\ell m}(x,y) \\ &= \theta(x^0 - y^0)P^{(L)}_{\ell m}\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)(i\Delta_+(x-y)) \\ &+ \theta(y^0 - x^0)P^{(L)}_{\ell m}\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)(i\Delta_+(y-x)) \\ &= P^{(L)}_{\ell m}\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big(i\theta(x^0 - y^0)\Delta_+(x-y) + i\theta(y^0 - x^0)\Delta_+(y-x)\Big) \\ &+ \delta(x^0 - y^0)P^{(1)}_{\ell m}(-i\nabla)\Big[(-1)(+1)(-1)(-i)(i\Delta_+(x-y)) \\ &\qquad\qquad + (-1)(-1)(-1)(-i)(i\Delta_+(y-x))\Big]\end{aligned} \tag{1334}$$

$$\begin{aligned}&= P^{(L)}_{\ell m}\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Delta_F(x-y) \\ &+ \delta(x^0 - y^0)P^{(1)}_{\ell m}(-i\nabla)\Big[\Delta_+(x-y) - \Delta_+(y-x)\Big]\end{aligned} \tag{1335}$$

$$= P^{(L)}_{\ell m}\Big(-i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Delta_F(x-y)\ . \tag{1336}$$

Prva od 4 faze u (1334) dolazi jer oduzimamo doprinos koji smo dodali prebacujući vremenku derivaciju preko θ funkcija. Drugi nastaje derivacijom θ funkcije po vremenskoj koordinati (vidi (1329)). Treći dolazi zbog zamjene $\frac{\partial}{\partial x_0} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^0}$ u vremenskoj derivaciji. Četvrti je faza uz parcijalnu derivaciji koja se javlja u $P^L(-i\frac{\partial}{\partial x})$.

$*$ **Prikaz skalarnog propagatora kao $4-D$ Fourier integrala**

- Najzgodniji prikaz propagatora je u obliku $4-D$ Fourier-ovog integrala. Prvi korak u tom smjeru je prikaz skalarnog propagatora kao $4-D$ Fourier integrala. Da bi to ostvarili rabimo Fourier reprezentaciju step funkcije,

$$\theta(t) \;=\; \frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{exp(-ist)}{s+i\epsilon}ds\;, \tag{1337}$$

gdje je ϵ pozitivna infinitizimalna veličina ($\epsilon = +0$).
D:
Po definiciji

$$\theta(t) \;=\; \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}\;. \tag{1338}$$

Rabeći Jordanovu lemu, t integracija po realnoj osi može se proširiti na konturu koja osim integracije po realnoj osi R sadrži i integraciju po beskonačnoj polukružnici u smjeru kazaljke na satu u doljnjoj (gornjoj) poluravnini C_- (C_+) (doprinos te druge integracije jednak je nuli, medjutim integracija po konturi omogućuje upotrebu teorema o residuumima; konture : $C_{R-} = R\cup C_-$, $C_{R+} = R\cup C_+$)

$$\begin{aligned}&\frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{exp(-ist)}{s+i\epsilon}ds\\ &= \begin{cases} t>0 & \frac{-1}{2\pi i}\int_{C_{R-}}\frac{exp(-ist)}{s+i\epsilon}ds \;=\; \frac{-1}{2\pi i}(-1)(2\pi i)1 \;=\; 1 \\ t<0 & \frac{+1}{2\pi i}\int_{C_{R+}}\frac{exp(-ist)}{s+i\epsilon}ds \;=\; \frac{+1}{2\pi i}(+1)(2\pi i)0 \;=\; 0 \end{cases}\;.\end{aligned} \tag{1339}$$

Time je (1337) dokazana.
- Kombinirajući (1337) sa Fourieovim integralom za (1326) za $\Delta_+(x)$ i uvodeći integracijske varijable $\vec{p} = \vec{q}$, $q^0 = p^0 + s$ dobijamo za Feynmanov propagator skalarnog polja $\Delta_F(x-y)$

$$\Delta_F(x) \;=\; \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{e^{iq\cdot x}}{q^2+m^2-i\epsilon}, \tag{1340}$$

gdje je $q^2 = \vec{q}^2 - (q^0)^2$ (u nazivniku smo zamjenili $2\epsilon\sqrt{\vec{q}^2+m^2} \rightarrow \epsilon$ što je dozvoljeno jer je za ϵ bitno samo da je pozitivna infinitezimalna brojka).

D:

$$
\begin{aligned}
-i\Delta_F(x) &\stackrel{(1331)}{=} \theta(x^0)\Delta_+(x) + \theta(-x^0)\Delta_+(-x) \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-isx^0)}{s+i\epsilon} ds \cdot \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2p^0} e^{i\vec{p}\vec{x}-ip^0x^0} \\
&+ \frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-is(-x^0))}{s+i\epsilon} ds \cdot \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2p^0} e^{-i\vec{p}\vec{x}+ip^0x^0} \qquad (1341)\\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} dq^0 \; e^{i\vec{q}\vec{x}-iq^0x^0} \frac{1}{2p^0}\Big[\frac{1}{q^0-p^0+i\epsilon} + \frac{1}{-q^0-p^0+i\epsilon}\Big] \qquad (1342)\\
&= -i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{e^{iq\cdot x}}{q^2+m^2-i\epsilon} \; . \qquad (1343)
\end{aligned}
$$

U (1341) upotrebljene su (1326) i (1337). U (1342) uvedene su sljedeće integracijske varijable: u prvom članu (1341) $\vec{p} = \vec{q}$, $q^0 = p^0 + s$ ($s = q^0 - p^0$), a u drugom članu (1341) $\vec{q} = -\vec{p}$ $q^0 = -p^0 - s$ ($s = -q^0 - p^0$). U (1343) se sredjuje uglata zagrada, rabi $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ i zamjenjuje $2\epsilon p^0 \to \epsilon$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2p^0}\Big[\frac{1}{q^0-p^0+i\epsilon} + \frac{1}{-q^0-p^0+i\epsilon}\Big] \\
&\quad = \frac{1}{2p^0}\Big[\frac{2(-p^0+i\epsilon)}{(p^0-i\epsilon)^2-(q^0)^2}\Big] = \frac{-1}{\vec{q}^2+m^2-(q^0)^2-2i\epsilon p^0} \; . \qquad (1344)
\end{aligned}
$$

$*$ $\Delta_F(x)$ **je Greenova funkcija KG jednadžbe**

- Iz jednadžbe (1340) se vidi da je $\Delta_F(x)$ Greenova funkcija Klein-Gordanove diferencijane jednadžbe,

$$
(\Box - m^2)\Delta_F(x) = -\delta(x), \qquad (1345)
$$

sa rubnim uvjetom specificiranim sa $-i\epsilon$ u nazivniku: (vidi (1331)) za $x^0 \to +\infty$ ($x^0 \to -\infty$) $\Delta_F(x)$ sadrži samo članove pozitivne ($e^{ip^0x^0}$) (negativne ($e^{-ip^0x^0}$)) frekvencije.

$*$ $\Delta_{\ell m}$ **kao** $4-D$ **Fourieov integral; problem sa kovarijantizacijom** $P_{\ell m}$ **i** $\Delta_{\ell m}$ **: singularni** $\delta(x-y)$ **članovi**

- Uvrštavanje (1340) u (1332) daje izraz za opći propagator u $4-D$ Fourier-ovoj reprezentaciji,

$$
\Delta_{\ell m}(x,y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{P^{(L)}_{\ell m}(q)e^{iq\cdot(x-y)}}{q^2+m^2-i\epsilon} \; . \qquad (1346)
$$

- Problem sa (1346) je sljedeći. Polinom $P(p)$ je kovarijantan samo za p na ljusci mase, dok se integracija vrši po cijelom prostoru. Polinom ($P^{(L)}(q)$, ekstenzija polinoma $P(p)$

na cijeli $4-D$ prostor impulsa je lineariziran u q^0 da bi se dobio jednostavni izraz za propagator (1332). Medjutim, ta linearizacija čini $P^{(L)}(q)$ nekovarijantnim osim ako je $P(p)$ konstanta ili polinom linearan u q^i.
- Kovarijantna verzija polinoma $P(p)$ se uvijek može definirati za opći q^μ, u smislu da $P(q)$ zadovoljava Lorentz-kovarijantnost za opći q^μ

$$P_{\ell m}(\Lambda q) \;=\; D_{\ell\ell'}(\Lambda)D^*_{mm'}(\Lambda)P_{\ell' m'}(q), \tag{1347}$$

gdje je $\Lambda^\mu{}_\nu$ opća Lorentzova transformacija, a $D(\Lambda)$ pripadna reprezentacija homogene Lorentzove grupe. Za skalarna i Diracova polja koja su linearna u q^0 $P(q)$ i $P^{(L)}(q)$ se podudaraju

$$P^{(L)}(q) \;=\; P(q) \qquad \text{skalarna, Diracova polja,} \tag{1348}$$

medjutim za vektorska polja se razlikuju u 00 komponenti polinoma $P_{\mu\nu}(q) = \eta_{\mu\nu} + m^{-2}q_\mu q_\nu$ ($P^{(L)}(q)$ ima $\vec{q}^2 + m^2$ na mjestu gdje se u $P(q)$ javlja $(q^0)^2$),

$$\begin{aligned} P^{(L)}_{\mu\nu}(q) &= \eta_{\mu\nu} + m^{-2}\Big[q_\mu q_\nu - \delta^0{}_\mu \delta^0{}_\nu (q_0^2 - \vec{q}^2 - m^2)\Big] \\ &= P_{\mu\nu}(q) + m^{-2}(q^2 + m^2)\delta^0{}_\mu \delta^0{}_\nu \;, \end{aligned} \tag{1349}$$

- Uvrštavanjem (1349) u izraz za opći propagator (1346) dobijamo

$$\Delta_{\mu\nu}(x,y) \;=\; \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{P_{\mu\nu}(q)e^{iq\cdot(x-y)}}{q^2+m^2-i\epsilon} + m^{-2}\delta(x-y)\delta^0{}_\mu\delta^0{}_\nu \;, \tag{1350}$$

Prvi član je manifestno kovarijantan. Drugi nije kovarijantan ali je lokalan i može se ukloniti dodavanjem lokalnog nekovarijantnog člana u gustoću Hamiltonijana. Posebno, ako polje $V_\mu(x)$ medjudjeluje s ostalim poljima preko člana oblika $V_\mu(x)J^\mu(x)$ u $\mathcal{H}(x)$, tada nekovarijantni član medjudjelovanja u (1350) daje efektivno medjudjelovanje (drugi red, kontrakcija V-ova da se dobije propagator, izvlačenje nekov. člana)

$$\begin{aligned} -i\mathcal{H}_{eff}(x) &= \frac{1}{2}[-iJ^\mu(x)][-iJ^\nu(x)][-im^{-2}\delta^0{}_\mu\delta^0{}_\nu] \\ &= -i\frac{-1}{2m^2}[J^0(x)]^2 \;. \end{aligned} \tag{1351}$$

Stoga se efekt nekovarinantnog člana može anulirati dodavanjem nekovarijantnog člana

$$\mathcal{H}_{NC}(x) \;=\; \frac{1}{2m^2}[J^0(x)]^2 \;. \tag{1352}$$

Takav član se javlja kroz singularitet u "equal-time" komutatorima vektorskog polja za $x = y$. Potpuni dokaz Lorentz kovarijantnosti teorije sa vektorskim poljem dan je u poglavlju §7.

∗ **Pojava nekovarijantnih članova nije vezana samo za $j \geq 1$**

U Weinbergu je pokazano da se nekovarijantni članovi mogu javiti i u medjudjelovanjima sa skalarnim poljem, ako se razmatraju npr. derivacije skalarnog polja $\partial_\mu \phi(x)$. **Ovdje preskačemo tu analizu.**

$*$ **Eliminacija efekata nekovarijantnih članova propagatora u $m \neq 0$ teorijama**

- Efekti nekovarijantnih članova propagatora (koji dolaze zbog razlike u definiciji $P^{(L)}(q)$ polinoma koji se javlja u propagatoru i $P(q)$ polinoma) mogu se uvijek ukloniti (barem u masivnim teorijama). Razlog tome jest da je izvor nekovarijantnog člana propagatora, razlika $P^{(L)}(q) - P(q)$, polinom u $q^2 + m^2$ bez konstantnog člana, pa se stoga može prikazati preko $\delta(x-y)$ funkcije i njenih derivacija. Takvi se članovi mogu ukloniti iz medjudjelovanja dodavanjem nekovarijantnih članova koji su kvadratični u strujama (na koje se vežu sparena polja vežu dajući δ-fu.) ili derivacija takvih članova.
- **U daljnjem ćemo prešutno pretpostaviti da su takvi članovi uključeni u gustoću Hamiltonijana medjudjelovanja, tako da ćemo rabiti samo kovarijantni član u računima sa propagatorima (koji dolazi od $P_{\ell m}(q)$ i zanemariti oznaku "L" na polinomu (koja postoji u originalno definiranim propagatorima)**.
- Ova naizgled *ad hoc* procedura ima pokriće u kanonskom formalizmu koji će se razmatrati u poglavlju §7. Kanonski formalizam je izvor nekovarijantnih članova gustoće Hamiltonijana medjudjelovanja koji su potrebni za ostvarenje kovarijantnosti teorije.

$*$ **Ekvivalentna definicija propagatora**

- Vakuumska očekivana vrijednost jednadžbe za propagator (1297) glasi

$$\begin{aligned} -i\Delta_{\ell m}(x,y) &= \theta(x^0-y^0)(\Phi_0, [\psi_\ell^+(x), \psi_m^{+\dagger}(y)]_\mp \Phi_0) \\ &\pm \theta(y^0-x^0)(\Phi_0, [\psi_m^{-\dagger}(y), \psi_\ell^-(x)]_\mp \Phi_0) \qquad (1353) \\ &= \theta(x^0-y^0)(\Phi_0, \psi_\ell^+(x)\psi_m^{+\dagger}(y)\Phi_0) \\ &\pm \theta(y^0-x^0)(\Phi_0, \psi_m^{-\dagger}(y)\psi_\ell^-(x)\Phi_0) \qquad (1354) \\ &= \theta(x^0-y^0)(\Phi_0, \psi_\ell(x)\psi_m^{\dagger}(y)\Phi_0) \\ &\pm \theta(y^0-x^0)(\Phi_0, \psi_m^{\dagger}(y)\psi_\ell(x)\Phi_0) \qquad (1355) \\ &= (\Phi_0, T\{\psi_\ell(x), \psi_m^\dagger(y)\}\Phi_0)\ . \qquad (1356) \end{aligned}$$

- (1353) je vakuumska očekivana vrijednost jednadžbe (1297).
- U (1354) odbacujemo članove iz (anti)komutatora koji se poništavaju djelovanjem na vakuum.

- U (1355) nadopunjavamo polja do punih polja opet rabeći svojsto dodanih članova da se poništavaju djelovanjem na vakuum.
- (1356) je zapravo definicija T produkta dvaju polja (za bozonske (fermionske) predznak medju članovima je pozitivan (negativan)).

6.3 Feynmanova pravila u impulsnom prostoru

□ Integracija po fazama

- Po Feynmanovim pravilima poglavlja §6.1 matrični element S matrice N-tog reda je suma prostorno-vremenskih integrala produkata faktora čija prostorna vremenska ovisnost je sadržana u prostorno-vremenski ovisnim fazama (vidi §6.1 za koeficijentne funkcije i §6.2 za propagatore).
- Faza izlazne čestične (ili antičestične) linije impulsa p' je $e^{-ip'\cdot x}$, faza ulazne čestične (antičestične) linije impulsa p je $e^{+ip\cdot x}$, dok propagator sa koji odgovara unutarnjoj liniji impulsa q sa smjerom od y ka x, $((\Phi_0, T(\Psi_\ell(x)\Psi_m^*(y)\Phi_0)$, sadrži integrand sa fazom $e^{i(q\cdot(x-y))}$.
- q^μ propagatora (koji je uvijek izmedju dva vrha) se interptretira kao impuls koji teče od y ka x, i u skladu s time kao impuls q koji izlazi iz vrha s koordinatom y odnosno kao impuls q^μ koji ulazi u vrh a koordinatom x.
- Integracija po prostorno-vremenskoj koordinati vrha stoga daje faktor

$$(2\pi)^4\delta^4\Big(\sum p + \sum q - \sum p' - \sum q'\Big), \tag{1357}$$

gdje je $\sum p'$ ($\sum p$) ukupni 4-impuls svih izlaznih (ulaznih) čestica koji izlaze (ulaze) u razmatrani vrh, a $\sum q'$ ($\sum q$) ukupni 4-impulsi unutarnjih linija koje izlaze (ulaze) u vrh (vidi Sl. 6.9).

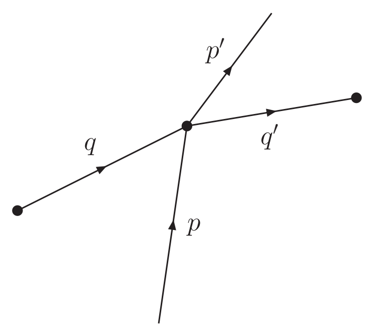


Figure 17: 6.9 Ulazni i izlazni impulsi : suma = 0

Od integracija ostaju samo integracije po 4-impulsima unutarnjih linija.

□ Feynmanova pravila u impulsnom prostoru

- Gornje razmatranje se može formulirati preko novog skupa Feynamnovih pravila (u impulsnom prostoru) (vidi Sl 6.10) za računanje S-matričnih elemenata:

(i) **Feynmanovi dijagrami:**
Nacrtati sve Feynmanove dijagrame željenog reda, kao što je opisano u §6.1. Medjutim, sada se **vrhovi** ne označuju prostorno-vremenskom koordinatom, već se **unutarnje linije** označavaju pripadnim **"off-mass-shell"** impulsom, za koji se uzima da **teče u smjeru strelice** pridružene liniji (ako je čestica neutralna oba smjera su jednakovrijedna) [sjetimo se: smjer strelice zapravo odgovara smjeru toka čestičnog naboja].

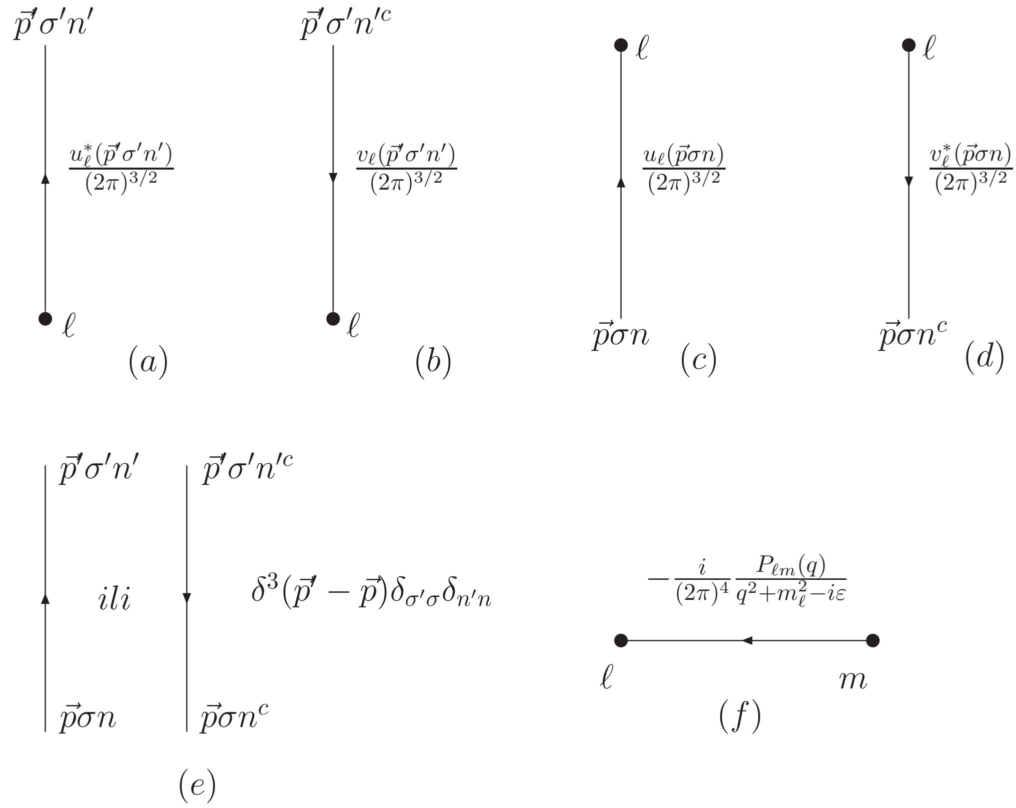


Figure 18: 6.10 Feynmanovi dijagrami u impulsnom prostoru

(ii) **Faktori koji grade pojedinačne sumande S-matričnog elementa:**
- Za svaki **vrh tipa** i uključiti faktor

$$-ig_i(2\pi)^4\delta^4\Big(\sum p + \sum q - \sum p' - \sum q'\Big), \tag{1358}$$

gdje sume po impulsima imaju isto značenje kao u (1357). Delta funkcije (1358) osiguravaju **sačuvanje 4-impulsa u svakom vrhu dijagrama**.
- Za svaku **vanjsku izlaznu liniju** (izlazna linije je iznad područja medjudjelovanja)

uključiti faktor $(2\pi)^{-3/2}u^*_\ell(\vec{p}\,'\sigma'n')$ za strelicu na gore odnosno $(2\pi)^{-3/2}v_\ell(\vec{p}\,'\sigma'n')$ za strelicu na dolje.
- Za svaku **vanjsku ulaznu liniju** (ulazna linije je ispod područja medjudjelovanja) uključiti faktor $(2\pi)^{-3/2}u_\ell(\vec{p}\sigma n)$ za strelicu na gore odnosno $(2\pi)^{-3/2}v^*_\ell(\vec{p}\sigma n)$ za strelicu na dolje.
- Za svaku **unutarnju liniju** čiji si **krajevi** označeni s ℓ i m i koja nosi impuls q^μ uključiti podintegralnu funkciju pripadnog propagatora

$$-i\Delta_{\ell m}(q) \;\; = \;\; -i\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{P_{\ell m}(q)}{q^2+m_\ell^2-i\epsilon} \; . \tag{1359}$$

- Podsjetnik:
Za **skalare (antiskalare)** 4-impulsa q u-ovi i v-ovi su jednaki $(2q^0)^{-1/2}$, a polinom $P(q)$ je jednak jedinici.
Za **Diracove spinore** 4-impulsa p i mase M u-ovi i v-ovi su jednaki normaliziranim spinorima (1126), (1088) odnosno (1127), (1089) a polinom $P(q)$ je matrica $(-i\gamma_\mu p^\mu + M)$.
Za **vektorske čestice** 4-impulsa p i mase M u-ovi i v-ovi su zadani u (957) i (956) a polinom $P(q)$ je jednak $\eta_{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{m^2}$.

(iii) **Integracije po impulsima unutarnjih linija i sume po indeksima polja:**
Integrirati po svim 4-impulsima unutarnjih linija i sumirati po svim indeksima polja (svi indeksi se javljaju u parovima).

(iv) **Sumacija doprinosa Fey. dijag.**
Sumirati doprinose svih Feynmanovih dijagrama razmatranog S matričnog elementa.

Mogu se pojaviti **dodatni kombinatorički faktori** – za analizu vidi (v) i (vi) u §6.1. Nekoliko primjera će biti dano u ovom poglavlju.

∗ Veza broja neodredjenih unutarnjih impulsa, broja integracija po unutarnjim impulsima, broja vrhova i broja nepovezanih dijelova dijagrama

- U dokazu TM da je princip dekompozicije nakupina zadovoljen samo za specifičan oblik Hamiltonijana sreli smo topološki TM (825) i relaciju broja delta funkcija koju nosi S matrični element D, broja vrhova V, broja unutarnjih linija I i broja petlji L (824). Relaciju (824) ovdje dokazujemo rabeći Feynmanove dijagrame u impulsnom prostoru:

(a) Svaki propagator uvodi jednu integraciju po unutarnjem 4-impulsu.
(b) Svaki vrh kroz pripadnu δ-funkciju uvodi jedan uvjet na neodredenost unutarnjih 4-impulsa.
(c) Ako dijagram ima C nepovezanih djelova C uvjeta vrhova se troši na relaciju izmedju vanjskih impulsa. Ti uvjeti nisu uvjeti na unutarnje impulsa, tj. oni ne ograničavaju unutarnje impulse.

- Iz (a), (b) i (c) slijedi da je broj neodredjenih impulsa unutarnjih linija L jednak broju internih linija I umanjenom za (broj vrhova V − broj nepovezanih dijelova Feynmanovog dijagrama C)

$$L = I - (V - C) \ . \tag{1360}$$

- Broj neodredjenih impulsa se definira kao broj petlji (a topološki gledano jednak je broju nezavisnih petlji) danog dijagrama.
- Dijagrami bez petlji ($L = 0$) zovu se drvasti (tree) dijagrami. Oni nemaju neodredjenih unutarnjih 4-impulsa.

• Primjeri računa Feynamnovih dijagrama; Poboljšanja pravila

□ Matrični zapis konstanti veza fermion-fermion-bozon medjudjelovanja

∗ Raspršenje fermiona i bozona u drugom redu računa smetnje

- Za medjudjelovanje (teoriju) (1299) S-matrica fermion-bozonskog raspršenja u drugom redu računa smetnje (1309), prikazana preko Feynmanovih pravila u impulsnom prostoru (Feynmanovi dijagrami prikazani su na Sl. 6.11; skraćenice: $1' = p_1'\sigma_1'n_1'$, $1 = p_1\sigma_1 n_1$, $2' = p_2'\sigma_2'n_2'$ i $2 = p_2\sigma_2 n_2$),

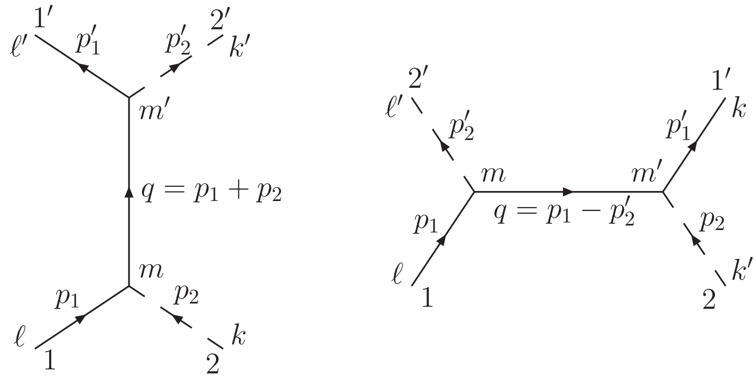


Figure 19: 6.11 Raspršenje fermiona i bozona u drugom redu

glasi (strelice na bozonskim linijama označavaju smjer 4-impulsa)

$$S^{(2)}_{\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1';\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2',\vec{p}_1\sigma_1 n_1;\vec{p}_2\sigma_2 n_2}$$
$$= \sum_{k'\ell'm'k\ell m} (-i)^2 g_{\ell'm'k'} g_{m\ell k} \times (2\pi)^8 \times (2\pi)^{-6} u^*_{\ell'}(1')u_\ell(1)$$

$$
\begin{aligned}
\times \quad & \int d^4q \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{P_{m'm}(q)}{q^2+m_m^2} \Big[u^*_{k'}(2')u_k(2)\delta^4(p_2+p_1-q)\delta^4(-p_2'-p_1'+q) \\
& \qquad\qquad + u^*_k(2')u_{k'}(2)\delta^4(-p_2'+p_1-q)\delta^4(p_2-p_1'-q) \Big] \qquad (1361) \\
= \quad & i(2\pi)^{-2}\delta(p_1+p_2-p_1'-p_2') \sum_{k'\ell'm'k\ell m} g_{\ell'm'k'} g_{m\ell k}\ u^*_{\ell'}(1')u_\ell(1) \\
\times \quad & \Big[\frac{P_{m'm}(p_2+p_1)}{(p_2+p_1)^2+m_m^2-i\epsilon} u^*_{k'}(2')u_k(2) \\
& \frac{P_{m'm}(-p_2'+p_1)}{(-p_2'+p_1)^2+m_m^2-i\epsilon} u^*_k(2')u_{k'}(2) \Big] \qquad (1362) \\
= \quad & i(2\pi)^{-2}\delta(p_1+p_2-p_1'-p_2') \sum_{k'k} \\
& \Big[\Big(u^\dagger(1')\ \Gamma_{k'}\ \frac{P(p_2+p_1)}{(p_2+p_1)^2+M^2-i\epsilon}\ \Gamma_k\ u(1) \Big) u^*_{k'}(2')u_k(2) \\
& + \Big(u^\dagger(1')\ \Gamma_{k'}\ \frac{P(-p_2'+p_1)}{(-p_2'+p_1)^2+M^2-i\epsilon}\ \Gamma_k\ u(1) \Big) u_{k'}(2)u^*_k(2') \Big]\ . \qquad (1363)
\end{aligned}
$$

- U (1361) je S-matrični element napisan prema p-prostornim Fey. pravilima za Fey. dijagrame Slike 6.11.
- U (1362) je provedena $\int d^4q$ integracija. Tu je zgodno uočiti da se fermionski indeksi ℓ', m', ℓ, m nadovezuju kao u matričnom množenju (npr. $u^*_\ell g_{\ell'm'k'} P_{m'm} g_{m\ell k} u_\ell$) i da je masa koja se javlja u propagatoru dijagonalna u fermionskim indeksima,

$$
M_{m'm} = m_m \delta_{m'm}\ . \qquad (1364)
$$

Stoga je prikladno uvesti matričnu notaciju u fermionskim indeksima za konstante $g_{m\ell k}$,

$$
[\Gamma_k]_{m\ell}\ =\ g_{m\ell k}\ . \qquad (1365)
$$

Prvi indeks je indeks kompleksno konjugiranog fermionskog polja (izlaznog fermiona, ulaznog antifermiona) drugi indeks fermionskog polja (ulaznog fermiona, izlaznog antifermiona) a treći indeks skalarnog polja,
- U (1363) je uvedena matrična notacija za konstante $g_{m\ell k}$, mase m_m i "polinom" $P_{\ell m}$.

∗ Fermion-fermionsko raspršenje u drugom redu računa smetnje

- Za medjudjelovanje (teoriju) (1299) Feynmanovi dijagrami za fermion-fermionsko raspršenje su dani na Sl. 6.12.
 Prema njima S matrični element glasi

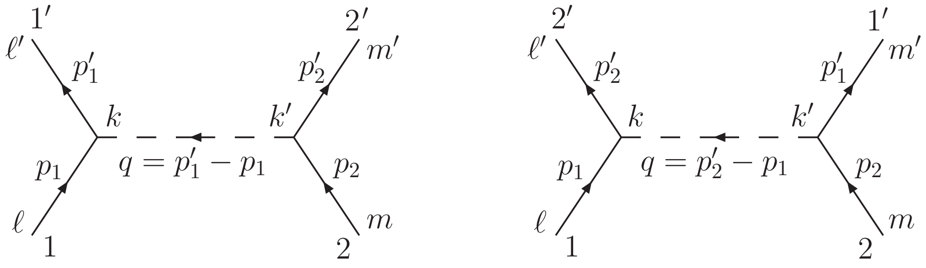


Figure 20: 6.12 Fermion-fermionsko raspršene u drugom redu

$$
\begin{aligned}
&S^{(2)}_{\vec{p}_1{}'\sigma_1'n_1';\vec{p}_2{}'\sigma_2'n_2',\vec{p}_1\sigma_1n_1;\vec{p}_2\sigma_2n_2} \\
&= \sum_{k'\ell'm'k\ell m}(-i)^2 g_{m'mk'}g_{\ell'\ell k}(2\pi)^{-2}u_m(2)u_\ell(1)\int d^4q \\
&\quad \Big[u^*_{m'}(2')u^*_{\ell'}(1')\delta(-p_2'+p_2-q)\delta(-p_1'+p_1+q)\frac{-iP_{k'k}(q)}{q^2+m_k^2-i\epsilon} - [1'\leftrightarrow 2']\Big] \qquad (1366) \\
&= i(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')\sum_{k'\ell'm'k\ell m} g_{m'mk'}g_{\ell'\ell k} \\
&\quad \Big[u^*_{m'}(2')u_m(2)u^*_{\ell'}(1')u_\ell(1)\frac{P_{k'k}(p_1'-p_1)}{(p_1'-p_1)^2+m_k^2-i\epsilon} - [1'\leftrightarrow 2']\Big] \qquad (1367) \\
&= i(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')\sum_{k'\ell'm'k\ell m} g_{m'mk'}g_{\ell'\ell k} \\
&\quad \Big[u^\dagger(2')\Gamma_{k'}u(2)u^\dagger(1')\Gamma_k u(1)\frac{P_{k'k}(p_1'-p_1)}{(p_1'-p_1)^2+m_k^2-i\epsilon} - [1'\leftrightarrow 2']\Big]\,. \qquad (1368)
\end{aligned}
$$

- Ponovno prvi red odgovara primjeni Fey. pravila sada prema Sl. 6.12, u drugom se vrši d^4q integracija, a u trećem se uvodi matrična notacija (1365) za konstante $g_{\ell mk}$.

∗ Opće pravilo za matričnu notaciju

- Opće pravilo pri upotrebi matrične notacije jest da se matrice – spinorne valne funkcije, matrice vezanja i propagatori – vežu niz smjer strelice koja prolazi danom fermionskom linijom.

∗ Raspršenje dva bozona u najnižem redu računa smetnje

U teoriji (1299) raspršenje dva bozona se javlja tek u 4-tom redu računu smetnje (vidi Sl. 6.7). Pripadni Feynmanovi dijagrami u impulsnom prostoru dani su na Sl. 6.13. Sami fermionski operatori javljali bi se uz kombinatorički faktor 1/4, medjutim na fermionsku petlju se 4 bozona veže na 24 načina, dajući 3 topološki različita dijagrama, od kojih

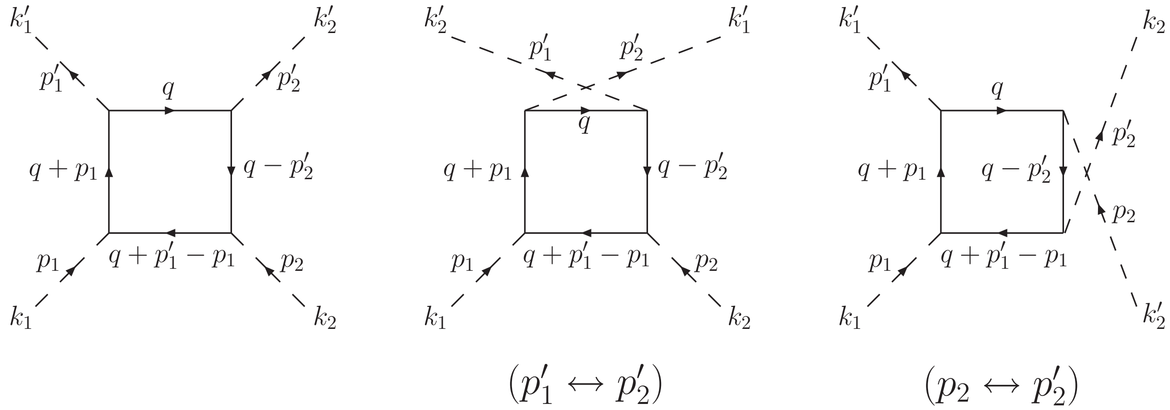


Figure 21: 6.13 Raspršenje dva bozona - najniži red računa smetnje

svaki odgovara 8 od 24 mogućih vezanja bozona. Zato se cjelokupna amplituda javlja sa kombinatoričkim faktorom 2:

$$
\begin{aligned}
S^{(2)}_{\vec{p}_1'\sigma_1'n_1';\vec{p}_2'\sigma_2'n_2',\vec{p}_1\sigma_1n_1;\vec{p}_2\sigma_2n_2} &= -2\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')(2\pi)^{-6} \\
\times \sum_{k_1k_2k_1'k_2'} & u^*_{k_1'}(p_1'\sigma_1'n_1')u^*_{k_2'}(p_2'\sigma_2'n_2')u_{k_1}(p_1\sigma_1n_1)u_{k_2}(p_2\sigma_2n_2) \\
\times \quad & \Big[\int d^4q\, Tr\Big\{\Gamma_{k_2'}\frac{P(q)}{q^2+M^2-i\epsilon}\Gamma_{k_1'}\frac{P(q+p_1')}{(q+p_1')^2+M^2-i\epsilon} \\
& \Gamma_{k_1}\frac{P(q+p_1'-p_1)}{(q+p_1'-p_1)^2+M^2-i\epsilon}\Gamma_{k_2}\frac{P(q-p_2')}{(q-p_2')^2+M^2-i\epsilon}\Big\} \\
+ \quad & (p_2\leftrightarrow -p_2') + (p_1'\leftrightarrow p_2')\Big]\,. \qquad (1369)
\end{aligned}
$$

- Negativni predznak se javlja zbog fermionske petlje.
- Jedna integracija ostaje neodredjena ($L=1$), pa ostaje jedna integracija po unutarnjim impulsima.
- Napomenimo da masa M u fermionskim propagatorima znači da je, zbog dijagonalnosti masene matrice, masa u svim propagatorima jednaka, te da se sumira po masama koje se nalaze na dijagonali fermionske masene matrice.

□ Feynmanova pravila kad se uvede $\overline{\psi}$

∗ Feynmanova pravila za teoriju s medjudjelovanjem $-ig\overline{\psi}\gamma_5\psi$

- Razmotrimo teoriju sa spinornim Diracovim poljem $\psi(x)$ mase M i pseudoskalarnim poljem $\phi(x)$ mase m sa gustoćom Hamiltonijana medjudjelovanja $-ig\overline{\psi}\gamma_5\psi$ (Faktor $-i$ je ubačen da bi za realnu konstantu g medjudjelovanje bilo hermitično).

- Podsjetnik: Za skalar (spinor) $P(q) = 1$ ($P(q) = [-i\gamma_\mu q^\mu + M]\beta$). Za skalar energije E $u(p) = v(p) = (2E)^{-1/2}$, dok su za Diracov spinor u_ℓ i v_ℓ dane sa (1088) i (1089) odnosno (1126) i (1127).

Povezane S amplitude u najnižem redu računa smetnje koje su za opće medjudjelovanje (1299) za fermion-bozonsko raspršenje, fermion-fermionsko raspršenje i su dane bozon-bozonsko raspršenje su dane u (1363), (1368) i (1369) sada glase,

$$
\begin{aligned}
S^{(2)}_{\vec{p}_1{}'\sigma_1';\vec{p}_2{}',\vec{p}_1\sigma_1;\vec{p}_2} &= i(2\pi)^{-2}g^2(4E_2'E_2)^{-1/2}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\times \Big[u^\dagger(1')\beta\gamma_5\frac{[-i\gamma_\mu(p_2+p_1)^\mu+M]\beta}{(p_2+p_1)+M^2-i\epsilon}\beta\gamma_5 u(1) \\
&+ u^\dagger(1')\beta\gamma_5\frac{[-i\gamma_\mu(-p_2'+p_1)^\mu+M]\beta}{(-p_2'+p_1)+M^2-i\epsilon}\beta\gamma_5 u(1) \\
&= \overline{u}(1')\gamma_5\frac{[-i\gamma_\mu(p_2+p_1)^\mu+M]}{(p_2+p_1)+M^2-i\epsilon}\gamma_5 u(1) \\
&+ \overline{u}(1')\gamma_5\frac{[-i\gamma_\mu(-p_2'+p_1)^\mu+M]}{(-p_2'+p_1)+M^2-i\epsilon}\gamma_5 u(1)\Big]\ ,
\end{aligned}
\tag{1370}
$$

(prva jednakost napravljena je za $\psi^\dagger$ polja, a druga za $\overline{\psi}$ polja (i u propagatoru isto) – zbog toga se β-e u vrhovima i propagatorima krate)

$$
\begin{aligned}
S^{(2)}_{\vec{p}_1{}'\sigma_1';\vec{p}_2{}'\sigma_2',\vec{p}_1\sigma_1;\vec{p}_2\sigma_2} &= i(2\pi)^{-2}g^2\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\times \Big[(\overline{u}(2')\gamma_5 u(2))(\overline{u}(1')\gamma_5 u(1))\frac{P_{m'm}(p_1'-p_1)}{(p_1'-p_1)^2+m^2-i\epsilon} \\
&- [1'\leftrightarrow 2']\Big]\ ,
\end{aligned}
\tag{1371}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{(2)}_{\vec{p}_1{}';\vec{p}_2{}',\vec{p}_1;\vec{p}_2} &= -2\times(2\pi)^{-2}g^4(16E_2'E_1'E_2E_1)^{-1/2}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\times \int d^4q\Big\{Tr\Big[\gamma_5\frac{-i\gamma_{\mu_1}q^{\mu_1}+M}{q^2+M^2-i\epsilon}\gamma_5\frac{-i\gamma_{\mu_2}(q+p_1')^{\mu_2}+M}{(q+p_1')^2+M^2-i\epsilon} \\
&\gamma_5\frac{-i\gamma_{\mu_3}(q+p_1'-p_1)^{\mu_3}+M}{(q+p_1'-p_1)^2+M^2-i\epsilon}\gamma_5\frac{-i\gamma_{\mu_4}(q-p_2')^{\mu_4}+M}{(q-p_2')^2+M^2-i\epsilon}\Big] \\
&+(p_2'\leftrightarrow -p_2)+(p_1'\leftrightarrow p_2')\Big\}\ .
\end{aligned}
\tag{1372}
$$

(U S amplitudama fermion-fermion i bozon-bozon raspršenja smo odmah primjenili formalizam sa $\overline{\psi}$ poljima.)

□ Još jedan korisni topološki rezultat

(**Nećemo dokazivati**)

$$2I + E \;\; = \;\; \sum_{n_i} V_i, \tag{1373}$$

gdje je I (E) broj unutarnjih (vanjskih) linija, V_i broj vrhova tipa i a n_i broj linija koje vrh tipa i ima.